



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

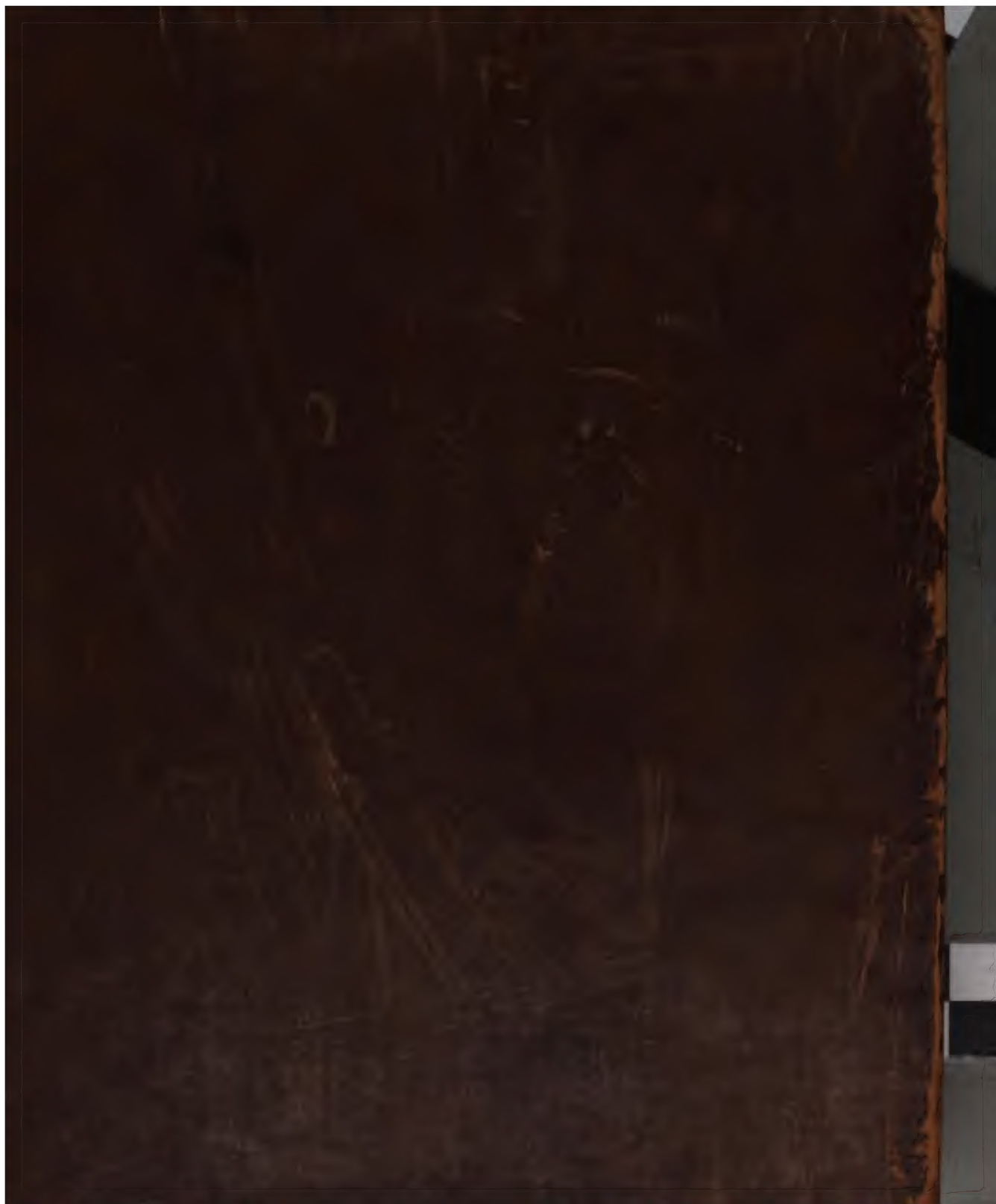
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNEE MDCCXLVIII. 1748



A B E R L I N.
CHEZ HAUDE ET SPENER.
Libraires de la Cour & de l'Academie Royale.
M D C C L.

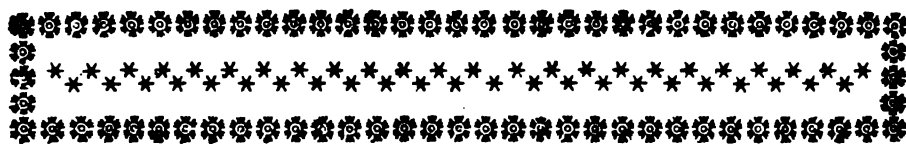
Permis d'imprimer.

P. L. Moreau de Maupertuis
Président.

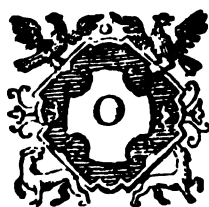
MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE
EXPERIMENTALE.

* *
*



ESSAI
SUR LA
FORMATION DES CORPS
EN
GÉNÉRAL
PAR MR. ELLER.



N fait que cette recherche a bien occupé les Philosophes de tout tems. Les sentimens des Anciens sur ce sujet étoient fort partagés ; ils cherchoient pour la composition des Corps des principes simples, qui ne fussent point résolubles en d'autres mixtes, & ils croyoient les rencontrer dans l'Eau & dans l'Air, aussi bien que dans la Terre, & même dans le Feu, comme dans les quatre Elémens primitifs. Quelques uns d'entre eux n'en admettoient qu'un seul, d'autres en choisissoient deux, quelques uns montoient jusqu'à trois, Aristote & ses sectateurs réunissoient tous les quatre, & ce nombre a subsisté jusqu'à nos jours ; à moins qu'on ne compte aussi les trois Principes, que quelques uns de la secte Cabalistique & Chimique ont tâché de faire valoir, mais qui ne sont pourtant autre chose, quand on les développe, que les Extraits, ou prétendus principes purifiés des quatre précédens.

Les Philosophes modernes du dernier siècle ont taché de pénétrer plus avant dans la recherche de ces élémens primitifs, qu'ils supposent former les Corps. Ils croient qu'il est de la dernière importance de développer entièrement les premières parties, ou molécules, qui entrent dans la composition des Corps, ou qui en font l'étenduë; ce qu'ils appellent *les Etres simples*. Quelques uns se contentent de leur petitesse insécable, ce qui revient aux Atomes de Democrite & d'Epicure; d'autres tachent d'établir leur division à l'infini; d'autres encore regardent, avec Mr. de Leibnitz, ces Etres simples comme des parties non-étenduës, pour rendre raison de ce qui est étendu, & qui a des parties, selon son principe de la raison suffisante, qui nous enseigne; que les êtres étendus, ou les corps composés, existent, parce qu'il y a des êtres simples, ou des *Monades*.

Les propriétés & les attributs de ces êtres simples occupent les esprits de la plus-part de nos Philosophes modernes. On n'est pas tout à fait d'accord, si ces êtres, qui aspirent à devenir matière, peuvent occuper un espace, ou non? Si ces êtres simples, ou ces Monades enfin, sont doués d'un mouvement? S'ils possèdent une force intrinsèque, ou représentative? S'ils ont quelque ressemblance entre eux, ou s'ils sont dissemblables à l'infini? Si cette diversité des êtres simples à l'infini prouve assez leur existence séparée l'un de l'autre? Si l'assemblage des êtres non étendus, séparément existens, peut causer un corps étendu? Si chaque être simple, ou Monade, contient une suite, ou continuité de changements, qui diffère de la suite de changements de tout autre être? &c. Je n'aurois jamais fait, si je prétendois faire ici le dénombrement de toutes ces contrariétés de sentimens, dont on n'est pas encore d'accord, & qui entretiennent la guerre entre nos Philosophes; mais comme leur différend n'a pas la mine d'être vuide si-tot, j'abandonne très volontiers ces Élémens primitifs, & ces Atomes, les Points de *Zenon*, aussi bien que les Monades de *Henri Morus* & de *Leibnitz*; d'autant plus facilement que je vois, que chacun tache de soutenir son hypothèse par des raisonnemens, sans qu'on aye recours aux démonstrations par les expériences.

Mais

Mais comme, en matiere de Physique, les experiences seules font le fil d'Ariadne, qui nous mene à la vraye connoissance de la structure la plus cachée des corps, j'ai taché de pénétrer par ce moyen un peu plus avant dans cette composition, ayant eu le plaisir de faire quelques découvertes, qui semblent montrer la nature dans sa plus grande simplicité, lorsqu'elle forme des Corps.

Dans un Mémoire sur la Nature & les propriétés des quatre Elements, que j'ai eu l'honneur de lire à l'Academie l'année precedente, j'ai montré par des experiences incontestables la conversion de l'Eau dans une veritable terre fixe, homogene & inalterable dans le feu; je tacherai de prouver à présent, que c'est cet élément liquide qui fournit pour la plus-part, la base, ou la matiere solide & corporelle, dans les trois régnes de la Nature. Tout le monde convient, que l'Eau est un corps extrêmement fluide, transparent, sans couleur, & qui n'affecte ni l'odorat, ni le gout. Les Physiciens modernes se sont donné beaucoup de peine pour pénétrer dans l'interieur, ou dans les parties simples & separées, qui composent cet élément merveilleux; mais ils n'ont pu en venir à bout jusqu'ici, faute de mesure applicable à la petitesse de ses parties constitutives; ce qui prouve assez leur parfaite homogeneité, qui ne permettra jamais, je crois, une diversité à l'infini dans les êtres simples de cet Elément. Par conséquent, le principe des Indiscernables court grand risque de souffrir ici quelque exception considerable.

Voyons à cette heure de quelle maniere l'Eau agit pour former les Corps, & premierement, les Corps des Vegetaux. Cette verité a été soupconnee déjà par l'ancien Philosophe *Thales*; & le grand restaurateur de la Philosophie naturelle, le Chancelier *Bacon*, en étoit convaincu, & adoptoit le meme sentiment. *Van Helmont* le Père l'a prouvée par l'experience faite avec un saule, qu'il fit croître à une grosseur considerable, en l'arrosant seulement avec de l'eau commune, sans que la terre du vaisseau dans lequel l'arbre étoit planté, diminuât de son poids. Cela fut confirmé par des experiences semblables de *Robert Boyle*,* & le celebre *Woodward* y en a joint diverses autres, * de Orig. form. p. 165.

Ces épreuves , il est vrai , ne contentent pas suffisamment un Censeur rigide , qui pourra objecter ; que l'Eau peut dissoudre , & renfermer aisément dans son sein une terre subtile , qu'elle a entraînée de partout , avant que d'entrer dans le tuyau des racines ; laquelle terre ayant été déposée ensuite dans les fibres des vaisseaux de la plante pour son accroissement , laisse échaper l'humidité , comme son vehicule , au travers des pores de ses branches & de ses feuilles. On pourra objecter encore , qu'on découvre dans les plantes une espece d'huile , ou matiere inflammable , & un esprit acide ; choses que l'eau simple & élémentaire ne sauroit fournir , moins encore pourroit-elle produire par la circulation seule de la sève ces sortes de liquides , si différents de la nature de l'Eau.

Ces sortes d'objections , & autres semblables , que je me suis formées là dessus , m'ont enfin encouragé à faire quelques nouvelles Experiences , relatives à la Végétation par l'eau toute seule. Pour cette fin , j'ai pris de l'eau de fontaine , la plus pure que j'ai pu trouver , sachant bien qu'elle doit déposer toutes les parties terrestres , & heterogenes , dans le sable , par lequel elle passe sous terre ; mais pour m'assurer d'avantage de la vraie pureté , je la fis passer tout doucement par un Alembic de verre au Bain-Marie , c'est à dire , par le moyen d'une eau bouillante qui environnoit l'alembic. Par cette opération , tout ce qu'il y avoit encore de parties heterogenes s'arrêta au fond de mon alembic , & il ne coula dans le récipient qu'une eau parfaitement purifiée de toute terre ; laquelle , à ce qu'on m'accordera facilement , ne peut pas monter si haut , surtout par un degré de chaleur , qui ne cause qu'une foible évaporation dans l'Eau , qu'on distille de cette maniere.

C'etoit donc avec l'Eau purifiée de cette facon que je fis l'épreuve de la Végétation , ayant placé dans plusieurs flacons de verre routes sortes de coupures de branches d'arbre , & sur tout des Oignons de fleurs , qui poussèrent bientot leur branches , feuilles & fleurs , quoiqu'ils n'eussent pour toute nourriture , que l'Eau purifiée de la maniere que je viens de dire. Il n'etoit pas difficile alors de déterminer la quantité , ou le poids de la terre , que cette eau par l'accroissement

fement des branches avoit fourni. Car, ayant trouvé le poids de la terre qu'une branche, qui pesoit, par exemple, une once, rendit après sa combustion & calcination, si donc une branche du meme poids mise dans l'eau, pesoit apres cette Végétation une fois autant, plus ou moins, il est facile de déterminer alors, que la moitié des parties terrestres qu'elle contient, a été produite de l'eau dont on l'a arrosé.

Par ces experiences je fus convaincu, que l'eau fournissoit la terre, comme la base de la solidité de tous les Vegetaux ; il me restoit encore à lever la grande difficulté, d'ou cette partie inflammable, huileuse, ou résineuse, qu'on rencontre dans les plantes, peut tirer son origine ? Les Qualités occultes des Anciens, & les Fermens de quelques Modernes, ne me donnerent pas la moindre satisfaction ; je me trouvai obligé de nouveau d'avoir recours aux experiences. J'avois remarqué que la rosée & l'eau de pluie, amassées pendant l'Été, quand on les renferme dans des bouteilles de verre, commencent à se troubler avec le tems, & déposent peu à peu au fonds un limon, ou matiere trouble & épaisse. Ce phénomène meritoit de l'attention ; j'en fis cette experience. Après avoir jetté l'eau qui nageoit sur cette matiere bourbeuse, je la mis dans une Cornue, & par le degré de feu que je donnai, je vis sortir des nûages blanchâtres, qui dans le récipient se convertissoient dans une espece d'esprit acide, qui fût suivi à la fin par un peu d'huile, ou baume rougeatre, qui se trainoit le long du col de la cornue.

Je croyois d'abord, que la solution du problème en question étoit trouvée ; car je m'imaginois d'avoir découvert l'origine de l'acide, aussi bien que de l'inflammable des plantes, que je cherchois depuis quelque tems. Mais mes réflexions ulterieures m'apprirent, que la rosée & l'eau de pluie pourroient, en tombant, entraîner très facilement cette matiere inflammable, dont l'air est toujours rempli, & qui réside dans les vapeurs qui s'elevent sans cesse de la terre, à l'occasion de la combustion & de la putréfaction des plantes & des animaux. Pour ce qui regarde l'esprit acide que j'avois rencontré, je le croyois une engeance de cet esprit acide universel, qui doit ré-

sider

fidér dans l'air, dont les Cabalistes nous vantent tant de merveilles, & qui est leur *Demogorgon*, cause de la production de toutes choses dans les trois régnes de la Nature.

Nonobstant cela, ces phénomènes me donnerent l'occasion de faire quelques nouvelles expériences, pour me tirer de l'embarras où j'étois par raport à cette recherche ; j'eus recours derechef à de l'eau de fontaine, purifiée avec soin de toute matiere terrestre par la distillation au bain de vapeurs, comme je l'indique ci-dessus. Cette eau, par une seconde distillation, executée de la même maniere, ne laissa rien au fond de l'alembic, qu'une très petite tache transparente ; par où je fus convaincu, que cette eau étoit un liquide assez homogène, élémentaire, qui ne renfermoit pas dans son volume la moindre marque d'une matiere acide, ou inflammable ; je m'en procurai une quantité suffisante, dont je remplis un grand verre large & cylindrique, ayant l'ouverture égale à son fonds ; j'eus soin de le couvrir avec une feuille de papier que je liai autour de l'ouverture. Une autre portion fut mise dans une grande bouteille de verre qui contenoit plusieurs mesures ; l'ayant remplie jusqu'à deux tiers, je la fermai avec un bouchon, je les plaçai toutes deux au Soleil, au coeur de l'Eté passé, pendant plusieurs semaines, & je remarquai bientôt, que cette eau, toute claire qu'elle étoit au commencement, changeoit insensiblement de couleur, & que poussant de petites vessies, & une écume mince à la surface, elle devenoit un peu verdâtre au fond, & moins transparente.

Quelques circonstances m'obligerent de retirer cette eau des rayons du Soleil, mais je n'oubliai pas de l'examiner, pour me donner quelque satisfaction sur le changement, qu'elle avoit subi, pendant qu'elle avoit été exposée au Soleil. Je la mis par reprises dans un alembic de verre, & je la fis distiller successivement au bain Marie, jusqu'à ce que j'eusse retiré toute l'eau pure & claire ; il me resta au fond de l'alembic une petite quantité d'une liqueur trouble & moins transparente, laquelle je versai dans une petite cornue de verre, & y ayant adapté un récipient, je poussai le feu par degré, qui me fit sortir à la fin, après quelque humidité aqueuse, de semblables nuages blan-

blanchâtres, & un peu d'huile tirant sur le rouge, que j'avois rencontrée en distillant la rosée & l'eau de pluie, après qu'elles avoient subi une espee de putréfaction.

Cette experience me fit naitre une nouvelle idée, d'une très grande conséquence par raport à ma recherche ; car je fus convaincu, que les rayons elancés du Soleil, de quelque nature qu'ils puissent être, causoient dans l'eau une changement essentiel, en y introduisant une matiere impalpable, qui par une espee d'alteration, qui approche de la fermentation, fait naitre dans l'examen de l'eau les deux principes si nécessaires à la production des plantes que je cherchois.

Je me procurai ausi par là la solution du problème de l'existence, & de la génération de l'Acide universel, tant vanté par la Secte Cabalistique de quelques Chymistes anciens. Car les rayons, par la chaleur qu'ils causent dans l'eau, y operent la même chose dans ce vaste espace qui entoure nôtre Globe, que ce que je vis naitre dans l'eau renfermée dans mes verres. Quand ces vapeurs secondées de cette façon, & condensées en pluie, tombent & pénètrent dans la terre, elles y alterent & changent tout ce qu'elles rencontrent, elles dissolvent & combinent différentes especes de terres. Et c'est à cette opération de l'acide universel, que nous devons l'existence de ces sels différents, comme le Vitriol, l'Alun, le Salpêtre, le sel commun &c. que la terre nous fournit.

Mais, pour retourner à la production & à l'accroissement des Vegetaux, nous voyons, (& l'homme le plus simple ne l'ignore pas,) que cette action de la Nature n'a lieu que dans cette saison de l'année, ou le Soleil cause un certain degré de chaleur, qui est suffisant pour opérer sur l'eau les effets susdits, & qui peut la mettre en mouvement, pour pénétrer dans les tuyaux & conduits les plus cachés des plantes, & des arbres, que la Nature a soigneusement formés, & qu'on y rencontre en forme fluide, & sous le nom de la sève. Quand la chaleur du Soleil, par l'éloignement de cet astre, n'a plus la force de procurer ce mouvement dans l'eau, cette action dans les plantes s'arrête, elles restent immobiles ; ce que nous voyons arriver

pendant l'hiver, où la chaleur du Soleil diminuë de deux tiers, en comparaison du degré où elle parvient dans le coeur de l'Été.

Cette chaleur ainsi diminuëe, n'est plus capable d'entretenir le mouvement, ou de conserver la fluidité dans l'eau; ses parties se joignent alors ensemble, faute de molécules ignées que le Soleil n'en lance plus en quantité suffisante pour les séparer; elle se coagule donc sous la forme de la glace. Ainsi la fluidité de l'eau est uniquement l'effet d'un certain degré de chaleur, qui entretient un mouvement perpetuel entre ses parties constitutives; par conséquent elle ressemble entierement à tout autre corps fondu, agité par l'action du feu; ses parties se trouvant ainsi dans une agitation continuelle, entrent facilement dans les pores de la plus-part des corps qu'elles touchent.

Mais cette action de l'eau est encore entretenuë, & augmentée par la structure de plantes, dont les racines sont autant de tuyaux capillaires, par lesquels s'élève promptement cet élément liquide, ou cette sève, dans les vaisseaux qui composent le tronc, & comme ceux-ci sont d'une extrême petitesse, la chaleur qui les environne pendant l'Été, y fait passer l'eau, probablement sous la forme de vapeurs, & cette résolution d'eau en vapeurs, qui ne peuvent se condenser derechef en eau, si longtems qu'elles sont renfermées dans ces tuyaux extrêmement petits, est apparemment la cause de cette quantité d'air, que Mr. *Hales* a rencontrée dans ses Experiences sur les vegetaux. Quoique la plus part de ces experiences roulent sur la production de l'air, que la fermentation, ou bien que le combat des acides avec les alcalis, ont produit dans ses differens mélanges, quelques autres experiences de cet Auteur dans sa *Statique des Vegetaux*, nous prouvent, que l'attraction & la dissipation de la sève dans un Tournesol, comparée à la nourriture & à la transpiration d'un homme, est comme 17. à 1. Ainsi, proportions égales & en tems égaux, cette plante tire & transpire 17. fois plus que l'homme, c'est à dire, dans le coeur de l'Été.

Cette grande difference entre la transpiration animale & vegetale ne doit pas nous étonner, si nous nous donnons le loisir de réfléchir un peu

un peu sur la structure de l'un & de l'autre. Dans le corps de l'homme, & dans celui de tout autre animal, la masse du sang, ou les humeurs qui circulent, sont distribuées par les arteres, dont la structure est conique, & où ce liquide trouve une infinité de résistances, par les angles & courbures des vaisseaux arteriels, qui composent tant de vilceres & d'organes dans les corps des animaux. Dans les plantes au contraire, il se développe une structure plus simple, & plus aisée pour faire passer la sève. Les tuyaux qui reçoivent cette humidité, sont des canaux cylindriques & paralleles, qui se touchent étroitement pour composer le tronc; à diverses distances ils se séparent aux angles aigus, des vaisseaux cylindriques semblables aux premiers, pour en former des boutons, qui sont la base des branches, des fleurs & des fruits, qui se dévelopent de ces boutons.

Tous ces Vaisseaux cylindriques, qui composent le tronc & les branches d'une plante, ou d'un arbre, sont fermés entre eux & liés ensemble par un tissu cellulaire & membraneux, qui communique avec les vaisseaux paralleles, & dont les plus petits canaux reçoivent cette matiere phlogistique, huileuse, ou résineuse, par une espece de secretion, & qui est charriée dans le tissu cellulaire entre le tronc & l'écorce de la plante, & dans l'écorce même, pour la garantir contre le froid, & pour en faire un nouveau dépôt, dont les boutons tirent de cette matiere ce qui leur est convenable, savoir, le plus essentiel de la plante, pour en former les fleurs & les fruits. Une eau de pluie colorée d'une certaine façon, & qui n'étoit point nuisible à la germination des plantes, que je fis entrer par un petit artifice dans quelques rejettons, ou coupures des arbres, m'a montré avec l'aide d'un Microscope cette structure, & a confirmé ce que *Malpighi*, *Loewenboek*, *Grew*, *Hales* & *Bradley* en ont écrit.

Mais cette petite digression, où je ne pretends pas donner un détail exact de la structure des plantes dans toute son étendue, m'a mené un peu trop loin de mon but; qui est, de faire comprendre la possibilité, que l'eau seule avec l'aide de la chaleur puisse prendre une forme corporelle dans les plantes. J'ai montré plus haut, que ce liquide purifié de toute matiere terrestre heterogene, a non seulement

pouffé des germes, mais qu'il a caufé aufi un accroiffement confiderable dans les oignons des fleurs, & dans les branches d'arbres coupées pendant l'hiver, ou au commencement du printems. Tout ceci fait voir, que la viteffe étonnante avec laquelle l'humidité, ou la fève reçue par les racines, paffe par les tuyaux cylindriques d'une plante, ou d'un arbre, y caufe un frottement très confiderable contre les parois des petits canaux. Je ne balance pas d'affurer, qu'il arrive ici ce que nous voyons arriver, lorsque nous frottons l'eau commune bien purifiée dans un mortier de verre avec un pilon de la même matiere. L'experience fait voir, que par cette manoeuvre, l'eau prise en petite quantité dans le mortier, montre en quelques minutes une coagulation blanche, vifcide, terreftre, que la continuation du broyement convertit dans une efpece de terre extrêmement déliée & fixe.

Par cette métamorphofe, favoir, par la conversion de l'eau en matiere terreftre, toute plante, ou arbre, acquiert fa bafe & fa fermeté; & lorsque dans la fuite les parties terreftres font tellement augmentées par ce frottement, que quelques vaiffeaux en font remplis, elles fe joignent enfemble par la cohéfion, qui eft fi naturelle à tous les corps qui fe touchent; le canal bouché refuse alors le paffage à la circulation ulterieure de la fève, devient une fibre folide, & c'eft par là qu'une plante, ou arbre, gagne fuccesfivement fa folidité. Cette démonftration femble prouver en même tems, que la terre d'où les plantes fortent, pour gagner leur perfection dans l'air, ne contribué en rien à leur accroiffement, fi ce n'eft qu'elle reçoit & qu'elle garde dans fon fein cette eau nouriffante, fecondée par les rayons du Soleil, que la pluye fournit, pour la rendre aux racines, lesquelles augmentent en nombre fous terre, à mefure que la plante s'étend hors de terre, pour attrapper la quantité néceffaire à la nourriture, & pour l'affermir aufi, & l'attacher à l'endroit où elle a pouffé; & nous voyons, que la nature garde toujours une exacte proportion entre les racines & les branches d'une plante, ou d'un arbre, pour ce befoin fi néceffaire à leur confervation.

La difference prefque inconcevable que nous rencontrons dans ce régime de la Nature, merite ici une petite attention. Nous voyons

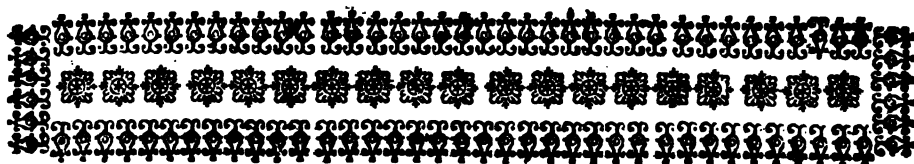
voyons en général, que les plantes croissent & s'aggrandissent d'une même maniere ; l'eau préparée & fécondée par la chaleur, & par les rayons du Soleil, est leur nourriture commune. Nonobstant cela, elles se distinguent presque toutes par leurs figures, & par les qualités différentes que nous y rencontrons par nos sens. Il paroît fort vraisemblable que le divin Auteur de la Nature, par sa sagesse infinie, pour la production des especes innombrables, que demande la perfection de ce Tout que nous voyons, a placé cette difference dans la graine de chaque individu. D'habiles Physiciens ont montré que chaque graine, ou semence, aussi bien que les boutons, renferme la delineation entiere d'une plante, ou d'un arbre, en raccourci : ce que la maniere d'entrer en bouton prouve de ces derniers. La seve ne fait que développer successivement ces empreintes des parties infiniment petites par la circulation ; & lorsque la plante s'est épanouie en feuilles, celles-ci attirent de l'air ce qui leur convient pour être converti dans la nature de cette qualité spécifique, dont la premiere graine de cette espece a reçu la forme & la propriété dans la Création. Ceci se confirme en quelque maniere par l'experience suivante. Les Sapins, les Bouleaux & les Chênes, croissent souvent ensemble dans un terrain sablonneux & sterile. Le premier de ces arbres nous offre une grande quantité de résine & de poix ; de sorte qu'on en peut tirer une cinquantaine de livres quelquefois d'un seul arbre de cette espece, pendant qu'on auroit de la peine à decouvrir un grain de cette matiere dans les deux autres ; & la terre, ou plutot le sable, desquels ils ont tiré leur nourriture pour croître, ne montre pas le moindre vestige d'une substance résineuse, quand on en a fait la recherche même la plus exacte. Par conséquent, puisque nous voyons, que l'humidité commune, que les racines de ces arbres tirent du sein de la terre, ne fournit point cette difference des Sucs, & de tant d'autres qualités que nous y rencontrons, il faut que la Nature vienne au secours par d'autres voyes, qu'elle cache à la grossiereté de nos sens. Les experiences de Mr. *Hales*, Observateur infatigable, & celles de l'habile Botaniste *Miller* à Chelsea, nous prouvent suffisamment, que cette attraction se fait par les feuilles, qui ressemblent en cela aux

Veines résorbentes, que nous rencontrons dans tous les points de la surface de notre Corps, par lesquelles l'eau, aussi bien que les esprits Chymiques, & même le Mercure, appliqués à la peau, entrent dans les vaisseaux, & se mêlent avec la masse du sang. Cette réflexion, qui se développe par les expériences, nous mène à l'origine des veines, qui sont d'autant plus nécessaires dans les plantes que leur structure même suppose leur existence. Elles transportent ce qui a été attiré de l'air, & en font un dépôt dans la substance cellulaire, entre le tronc & l'écorce, où elles rencontrent les vaisseaux sécrétoires des artères. Et c'est là sans doute, où les humeurs préparées se spécifient dans la Nature différente des plantes, selon la différente vertu spermatique, que chacune a reçue dans la première formation, lorsque l'Univers sortit de son néant. L'humidité de l'air attirée, & altérée sans cesse, par l'action du Soleil, & rendue féconde par la propriété incompréhensible de ses rayons, est cette source intarissable, où toutes les plantes, aussi bien que les animaux puisent, & qui se change dans la nature prolifique de chaque individu. Cela se prouve encore par quelques phénomènes, que nous voyons arriver aux boutons. Ceux-ci renferment, aussi bien que la graine, l'espèce de la plante, ou de l'arbre, qui les ont poussés; ce qui est confirmé par la manière d'entrer en bouton. Nous voyons aussi que tel bouton qui réussit, quand il est enté dans quelques arbres d'une autre espèce, a été toujours soutenu par une feuille qui se développe à la racine de ce bouton. Si on coupe cette feuille dans le printemps, lorsqu'elle paroît, le bouton n'est plus propre à être enté, puisqu'il ne pousse pas une branche prolifique; ce qui marque que la feuille attire de l'air cette sorte d'humidité, qui lui convient pour être convertie dans sa nature, qui la distingue de toute autre espèce. L'expérience que j'ai faite, de couper de la branche d'un arbre toutes les feuilles, avant que les fleurs parussent, m'a fait voir, que cette branche reste stérile, sans produire aucun fruit, pendant que les autres branches du même arbre en portent abondamment. En un mot, c'est l'eau mise en action par la chaleur, qui forme peu à peu les petites parties solides, & corporelles des plantes; Et la vertu spermatique primordiale, attachée à la semence, y in-

y introduit & perpetué la propriété spécifique dans chaque espece & individu.

Après qu'on a compris l'évidence de tout ce qu'on vient de prouver jusqu'ici, il n'est pas difficile de comprendre l'origine & la formation des corps dans les animaux; nous y rencontrons une analogie parfaite, si nous remontons jusqu'aux premiers commencemens d'un Embryon; nous y voyons l'ébauche de l'animal futur, comme celle de la plante dans la graine, ou dans la semence; tout se développe & s'aggrandit par le mouvement, & par la circulation de l'humidité préparée de la manière susdite. L'accroissement d'un Corps animal profite de l'avantage que ses sucs nourriciers sont déjà préparés dans les plantes, dont la plupart des animaux se rassasient. L'eau y a déjà souffert sa première transformation en visqueux terrestre, mêlé d'onctuosité phlogistique. Ce mixte mis en mouvement par l'action du coeur, & appliqué aux parois des petits vaisseaux, s'y insinue, les étend, forme des fibres, des membranes, & à mesure que cette viscidité humide se dessèche & s'affermit, les membranes se changent en cartilages, & puis en os, selon la première delinéation de la structure de l'animal dans son embryon. Si on regarde l'extrême petitesse des vaisseaux lactés, qui se dérobent aux Microscopes dans leur origine, on juge facilement qu'il n'y peut entrer que le plus fluide & le plus délié des humeurs qu'on puisse imaginer; néanmoins nous le voyons changé en matière solide & terrestre dans les os.

Il ne sera pas trop hardi d'affirmer ici, que les mêmes principes suffisent à la production des minéraux. Dans l'analyse de ces Corps, l'eau commune, l'acide, & la matière inflammable, se montrent par tout. Les différens mélanges des ces trois principes suffisent pour fournir une infinité de productions minérales; mais la chose est d'une trop vaste étendue pour être examinée à présent, comme il faut; elle nous fournira des recherches curieuses dans une autre Dissertation.



RECHERCHES
SUR LA NATURE ET LES PROPRIÉTÉS
DU FIEL DE VERRE,
PAR MR. POTT.

Traduit de Latin.



L

E sujet, sur lequel vont rouler nos recherches, porte communément le nom de *Fiel de Verre*. Il ne lui vient point du fiel, ou de la bile des animaux, que les Physiciens prenoient autrefois, pour un pur excrément, comme si ce fiel étoit aussi un excrément que le feu séparât du mélange, d'où se forme le verre, & qu'il eut quelque sorte d'amertume. Cette dénomination vient plutôt d'une erreur dans la traduction du nom que cette matière porte en Allemand. On l'y appelle ordinairement *Glass Galle*; & comme le sens propre du mot de *Galle* est *fel*, on a rendu l'expression entière par *Fiel de verre*. Mais il me paroît beaucoup plus vraisemblable qu'il faut rappeler ici l'ancienne signification du mot de *Galle*, par où l'on entendoit une bulle d'écume, & qui se conserve encore dans le mot *Wasser Galle*, *écume d'eau*, qui à cause de la légèreté de l'air qui y est renfermé, occupe la surface de l'eau. C'est de la même manière que le fiel de verre est toujours poussé par la force du feu à la surface de la matière

matiere du verre. On lui a encore donné par la même raison le nom de *graisse*, ou *suin de verre*, *axungia vitri*, quoiqu'il n'y ait rien du tout de gras. Enfin quelques uns l'ont appelé abusivement *sel de verre*; & *Crollius* avec quelques autres se sont servi du nom d'*Anatron*.

II. Cette matiere n'est autre chose qu'un mélange de terre & de sel, qui coule comme une écume sur la surface du verre en fusion, & qui pendant ce flux en est séparée par abstraction. En effet, quand on a préparé le mélange des matieres, dont on a coutume de se servir pour faire le verre, & qu'on appelle *Fritte*, & que ce mélange a eu pendant quelque tems un flux liquide, on le remuë avec un fer propre à cet usage, pour éprouver si la fusion liquide du mélange est parfaite & universelle; & après s'en être assuré, on enleve avec une cueillere de fer l'écume de sel ardente, qui est au dessus, & qui n'entre pas dans le mélange du verre, on la jette dans l'eau, & par la coagulation on en fait des pains blancs, ou cendrés. Entre ces pains, ceux qui viennent de la préparation du verre crystallin, surpassent de beaucoup les autres en blancheur, & ce sont eux qui constituent le *Fiel de verre* proprement ainsi dit. Toutes les especes de verre fournissent à la verité une semblable matiere, tant le verre verd commun, ou le verre blanc & de craye, que celui de crystal. Mais le verre commun en fournit moins à cause de la petite quantité de sels qu'il renferme, au lieu que les verres de craye & de cristal, qui contiennent beaucoup plus de sels, donnent bien davantage de ce fiel; d'où l'on peut tirer cette règle certaine, que plus on fait entrer de corps salins dans la composition de la fritte du verre, plus elle rend de fiel de verre, & réciproquement. Celui qui se vend ordinairement, vient presque toujours du verre de craye & de soude. Il y en a qui prétendent qu'on peut se promettre quelque chose de particulier du fiel de verre qu'on sépare du verre de rubis; mais je crois que cette prétension est tout à fait dénuée de fondement.

III. Voici les especes ordinaires du Fiel de verre. D'abord il y a le nôtre, ou celui qu'on tire de nos verreries, il y a celui d'Italie, & il y a celui qu'on nomme vulgairement de Hollande, mais qui, à

parler plus exactement, est d'Espagne. Ces especes ont une ressemblance générale, mais on y remarque aussi certaines differences dans quelques circonstances particulieres. Ces differences viennent du plus ou du moins de pureté des sels, qui ont été employés, tant sels alcalis, ou cendres clavelées, que cendres des végétaux, Nitre, Tarte, Soude &c. Elles viennent encore des proportions plus ou moins grandes de ces sels, de l'espace de tems plus ou moins long, au bout duquel on tire ce fiel du creuset de la verrerie, & par conséquent du plus, ou du moins, de tems qu'il est demeuré au feu. Toutes ces causes font que les masses de fiel de verre different, tant à l'égard des parties salines qu'à l'égard des parties terrestres.

IV. Quelques uns préparent eux-mêmes le fiel de verre, en mettant en fusion au creuset du sel commun mêlé avec parties egales, ou avec deux parties de verre, ou avec des cailloux, & en séparant les scories superieures, ou le sel, de la masse inferieure réduite en verre. Mais ce produit ne s'accorde pas parfaitement avec notre fiel ordinaire de verre, parce qu'il contient encore beaucoup de sel commun, changé simplement en sel fondu. Il y a aussi un fiel de verre que les Orfèvres font ordinairement de sel commun, de sel alcali, & de litarage, & qu'ils employent dans la conferrumination, pour suppléer au Borax qui est plus cher; mais il n'a pas a non plus une convenance entiere avec le notre, quoique dans certaines circonstances il puisse produire les mêmes effets.

V. Il y a déjà bien des siècles que les Physiciens, les Chymistes, & les Medecins ont fait connoître dans leurs Ecoles notre Fiel de verre, & qu'ils l'ont employé à diverses opérations Chymiques. Les Ouvriers eux même s'en sont servi, & on en a tiré quelques usages dans la Medecine. Cependant je n'ai trouvé personne encore, qui se soit proposé d'en faire avec exactitude un examen Physico-Chymique; & c'est ce qui me détermine à l'entreprendre.

VI. Ceux qui, d'après les Auteurs qui ont écrit en Physique & en Chymie, ont tâché jusqu'à present de décrire la nature & les propriétés du Fiel de verre, se sont partagés en deux Sectes; les uns le rangeant parmi les especes de sel commun, & les autres parmi les sels
alcalis

alcalis fixes. Entre les premiers M. König, dans son *Regn. Miner.* le définit; *Une ecume salée du verre, qui se forme d'une quantité de sel & de particules terrestres, & où le sel s'unis si étroitement avec la terre en vitrification qu'il est très difficile de les séparer.* Avant lui, Tackanius avoit déjà dit à peu près la même chose dans son *Hippocr. Chym.* où il en fournit cette description. *C'est, dit-il, un sel salé que les Bergers donnent à lécher à leur bétail en guise de sel commun, qui se fond à l'air, & alors la poudre des cailloux entremêlée se separe, cette liqueur se coagule ensuite en sel commun, comme le prouvent sa granulation & sa distillation.* Et ailleurs il ajoute; *Le fiel de verre tire sa saveur de l'acidité du caillou; car il ne précipite pas entièrement le Mercure.* C'est aussi pourquoi Merret rapporte qu'on s'en sert en France pour saler les viandes. Voilà sans doute le fondement sur lequel Mors a dit avec tant de confiance; * *Le fiel de verre approche de la* * *Fac. Chym.*
Nature du sel fossile, & on en tire par la distillation un esprit acide, P. 97.
comme l'esprit de sel. La principale raison sur laquelle tous ces Auteurs s'appuyent, c'est qu'en Italie & en Espagne on employe la soude dans la composition du verre; or cette soude n'est pas un pur sel alcali, mais elle renferme beaucoup de sel commun, parce que la plante *Kali* croit sur le bord de la mer & des lacs salés, où elle attire le sel commun, s'en imbibe, & en conserve beaucoup, sans aucun changement. Aussi peut-on y découvrir au simple goût une saveur salée, & c'est en quoi consiste la différence d'avec l'alcali commun, aussi bien qu'en ce qu'il s'y trouve aussi quelques parties de sel merveilleux. Ajoutez que le nitre qu'on employe pour faire certains verres, n'est pas pour l'ordinaire assez dépuré, mais qu'il porte de même avec soi quelques parties de sel commun. Cependant, & malgré tout ce qui vient d'être rapporté, les Experiences suivantes feront voir de la maniere la plus claire, qu'il reste si peu de sel commun dans le fiel de verre, qu'on ne peut se fonder sur aucune raison pour le ranger dans la Classe du sel commun. Les Experiences dont on voudroit s'autoriser pour cet effet, sont en partie fausses, ou superficiellement examinées, en partie mal appliquées.

• En Not. ad
teri Vitr. p.
l. 239.

VI. Mr. *Merret* estime* que le fiel de verre est une espece de sel alcali, qui se charge dans la vitrification d'une quantité insuffisante de Terre vitrifiable, & qui par conséquent demeure incomplet. On ne sauroit nier qu'il n'y ait là dedans quelque apparence de probabilité, puisqu'il est constant qu'on ne sauroit faire aucun verre commun, sans y mettre du sel alcali, dont il seroit possible que les parties superflües se séparassent de cette maniere. De plus, & M. *Merret* ne manque pas non plus d'insister sur ces circonstances, le fiel de verre se fond à l'air, & il produit sur le syrop de violettes le même effet que les autres sels alcalis, c'est de changer sa couleur bleuë en verte. Avec tout cela cette opinion ne sauroit etre adoptée; puisque l'alcali même superflu s'unit etroitement avec la terre vitrifiable, comme on en trouve la preuve dans la masse qui se prépare pour faire la liqueur des cailloux. Il y a aussi plusieurs produits salins manifestement acides, qui donnent la couleur verte au syrop de violettes.

VII. Je me suis donc mis à examiner par moi-même le sujet en question, & cet examen m'a fourni les phénomènes suivans. Le Fiel de verre conserve assez de consistance à l'air, & ne se fond pas aisément par défaillance, à moins qu'on ne l'ait laissé assez longtems exposé dans une cave froide & humide; auquel cas plusieurs sels moyens commencent à se fondre en quelque sorte: ce qui se remarque aussi dans le sel commun, exposé pendant longtems de la même maniere. Le fiel de verre, comme tous les autres sels, se fond assez promptement dans l'eau, & après la filtration, il donne une solution d'une parfaite transparence, déposant dans le filtre une terre blanchâtre, tantot plus, tantot moins abondamment; car il y a telle espece qui ne m'a donné que fort peu de cette terre, tandis qu'une autre en a rendu plus de quatre onces par livre. Cette terre avec l'huile de vitriol ne reçoit qu'une très legere ébullition; ce qui prouve qu'elle renferme fort peu de terre alcaline, & qu'elle consiste principalement en terre vitrifiable. Dans le feu notre sel se soutient, ce qui le met au rang des sels fixes; & lorsqu'on en répand immédiatement sur des charbons ardents, il se fait une fort petite crépitation, & très différente de la crépitation ordinaire au sel commun. Mais au feu
dans

dans le creuset, il a un flux assez prompt & coulant, il rougit un peu, & en même tems, il est propre à accélérer la liquefaction des corps qui se fondent difficilement ; ce qui fait que les Orfevres l'employent avec succès pour fondre la limaille d'argent.

VIII. Notre sel dépuré n'a point d'effervescence avec les menstrués acides, comme l'esprit de nitre, l'esprit de sel commun, & le vinaigre distillé, ce qui empêche qu'on puisse le mettre au nombre des sels alcalis. Cependant quelques especes de ce sel avec l'huile de vitriol font voir une especie d'ébullition, qui provient non du sel alcali, mais plutôt du sel commun, dont une petite quantité demeure contenuë dans certaines especes de fiel de verre, & principalement dans celles d'Espagne, qui tirent leur origine de la soude, & dans celles qui viennent des Verreries, où l'on ajoute beaucoup de sel commun à la composition de la fritte. Car les autres especes, où ce sel n'entre pas, n'acquierent pour l'ordinaire aucune effervescence avec l'huile de vitriol ; au lieu qu'il est connu que l'effervescence arrive assez promptement, lorsque l'huile de vitriol est jointe au sel commun. Le changement de couleur qu'éprouve le syrop de violettes ne mene pas non plus à la conséquence qu'on veut en tirer ; puisque la solution de sel commun fondu, la solution de sel armoniac fixe, & plusieurs mélanges salins qui renferment de la terre alcaline, produisent le même phénomène, qui ne prouve pas toujours la présence du sel alcali. D'ailleurs le fiel de verre ne trouble point la solution d'Alun, ce que font pourtant tous les vrais sels alcalis ; il ne précipite point non plus la liqueur de sel armoniac fixe, d'où l'on est pleinement en droit de conclurre l'absence de l'acide vitriolique.

IX. La solution de notre sel étant filtrée, évaporée, & cristallisée à diverses reprises, donne des crystaux qui ressemblent assez, en partie au tartre vitriolé, en partie au sel des eaux minerales. Si cette cristallisation se fait lentement, & d'une maniere réitérée, les premiers crystaux qui se forment sont oblongs, & les derniers principalement ont pour l'ordinaire une sorte d'ébullition avec l'huile de vitriol, & exhalent une fumée de sel acide, qui est un indice qu'ils renferment quelque quantité de sel commun ; ce qui ne se manifeste

en aucune manière dans les premiers. Il arrive par conséquent, que si l'on sépare par abstraction quatre parties d'acide nitreux d'une partie de fiel de verre, l'esprit qui transpire fournit une eau régale propre à la solution de l'or. La proportion de ce sel commun dans le Fiel de verre n'est pas toujours égale; cependant il n'arrive presque jamais qu'elle aille au de là du quart, & pour l'ordinaire il y en a beaucoup moins, puisqu'il ne faut que très peu d'acide de sel pour convertir en eau régale une grande quantité d'acide nitreux. Si l'on pouvoit fonder un jugement assuré sur l'apparence extérieure de notre sel, lorsqu'il est dépuré, on affirmeroit qu'il contient en très grande partie du tartre vitriolé: mais quand on compare l'extrême résistance que ce tartre vitriolé apporte à la fusion, avec la grande fusibilité de notre sel, cela mène à d'autres idées. Et s'il y a quelque partie de tartre vitriolé dans le fiel de verre, comme il y en a surtout dans celui de nos contrées, qui provient de cendres communes peu nettes & clavelées, qui ont été longtems exposées à l'air, cela se connoit d'abord par la manière dont il crépité & s'écarte, lorsqu'on le jette sur des charbons ardents, ou qu'on en presse la flamme avec un chalumeau: car ce phénomène ne se montre point dans le sel admirable pur, qui entraîne pourtant avec soi en fusion le tartre vitriolé; ce qui arrive aussi au tartre vitriolé, qui éprouve une fusion fort liquide par l'addition du sel commun, ou du sel alcali, ou de l'Alun calciné, ou du vitriol saoulé de son acide. Il faut donc supposer plutôt que notre sel par rapport à la plus grande & principale partie, s'accorde avec celui qui porte le nom de *sel admirable de Glauber*. S'il ne se forme pas en cristaux aussi grands que ceux de ce sel admirable, cela ne fait pas une difficulté, car la disposition à prendre cette figure est détruite par le feu véhément de la vitrification, qui lui fait violer la règle de l'immutabilité de la figure, commune aux sels. Cela se confirme par le sel admirable lui-même, lorsqu'il est pur; si on l'expose pendant quelque tems à un feu véhément, & qu'ensuite on procède à la solution & à la cristallisation, il ne rend que de fort petits cristaux. Il est néanmoins possible que certaines espèces de fiel de verre, surtout d'Espagne, montrent aussi quelquefois

fois une portion de sel merveilleux dans de grands cryftaux ; car je vois qu'il est arrivé quelque chose de pareil à Boyle, quoiqu'il n'ait osé déterminer l'espece, ni assigner le veritable nom, lorsqu'il rapporte, * *qu'ayant exposé à la crySTALLISATION du fiel de verre dissous dans l'eau, il s'en forma divers crySTaux en forme de nitre, tout à fait trans- parens, & à la fin du sel commun cubique ; à quoi il ajoute, que ces crySTaux à la chaleur se changent en caux, mais qu'ils reprennent dans l'eau leur forme crySTALLINE.* Ce Physicien ne pouvoit résoudre ce phénomène dans le tems où il vivoit, mais il est assez connu aujourd'hui que le sel admirable montre les qualités dont il s'agit. De là vient que la solution du fiel de verre précipite la solution du Mercure par l'eau forte, en lui donnant une couleur jaune, de la même maniere que la solution de sel admirable, lorsque l'acide du Vitriol est adhérent au Mercure. Il est vrai que la couleur du Mercure précipité avec le sel admirable est un peu plus jaune, qu'avec le fiel de verre ; mais je crois qu'il faut en chercher la raison dans la Terre alcaline que ce fiel contient. De même la cendre parfaitement edulcorée, faoulée ensuite de l'acide du vitriol, & enfin crySTALLISÉE, forme une espece de sel amer fusible, qui a beaucoup de conformité avec le nôtre dans certaines circonstances.

* Dans son Traité, de producibil. princ. Chymie. p. 17.

X. La principale partie du Fiel de verre constitué donc une espece de Sel admirable, & il ne faut pas ici aller chercher bien loin les ingrediens de ce sel, puisque l'on découvre d'abord le sel commun dans la soude, & une espece de terre *alcalino-vitrescible* dans les cendres. Seulement on pourroit former quelque doute sur l'existence de l'acide vitriolique ; mais comme avec le tems les sels alcalis s'imbibent d'un semblable acide, qu'ils tirent de l'air, & qu'il est probable que le feu ardent de la verrerie détruit les qualités spécifiques des acides, ce qui fait que le reste retourne à son état primitif, il ne faudra pas non plus aller loin pour trouver l'acide en question. Ajoutez que souvent dans les terres vitrifiables, comme dans le sable, les cailloux, les briques &c. on conjecture qu'il y a de l'acide vitriolique renfermé qui se répand de là dans la masse. *Tackenius* a même osé déterminer qu'il y a de l'acide dans les cailloux, ce qui s'accorde assez

sez avec les principes de *Beccher*, & la Terre primitive, sans compter une experience qui semble encore favoriser cette opinion; c'est qu'après avoir cuit dans un fourneau de potier de l'alcali, des cailloux & du sel commun, & en avoir fait la solution dans beaucoup d'eau, il s'en forme en partie une espece de sel admirable. C'est ce qu'il faudra examiner plus soigneusement.

XI. Quand on procure la crySTALLISATION du Fiel de verre d'Espagne, en le faisant evaporer lentement & à diverses reprises successives, la dernière matiere qui reste, & qui ne peut plus être réduite en crySTaux, fournit un peu de sel alcali avec une petite quantité de terre alcaline, dissoute dans l'esprit acide du sel; car cette matiere entre en effervescence avec l'eau forte & précipite la terre; elle acquiert une effervescence encore plus forte avec l'huile de vitriol, elle jette la terre alcaline, & exhale en même tems un esprit de sel, qui frappe bientôt l'odorat. Que si l'on fait evaporer la solution de Fiel de verre dans un vase de plomb, & qu'on l'expose à la crySTALLISATION, il en naît alors des crySTaux assez petits; mais si l'evaporation & la crySTALLISATION se font dans un vase d'étain, les crySTaux sont beaucoup plus grands & oblongs. Les uns & les autres cependant, exposés à un air tiède, s'en vont en poussiere blanchâtre, comme cela arrive ordinairement au sel admirable. On peut inferer de là que les vases qu'on employe, causent des changemens & des altérations à la crySTALLISATION, ce qu'il faut attribuer au plus grand, ou moindre degré de froid, qui peut être pris plus aisément par un vase que par un autre. Il en est de même de toutes les autres Experiences Chymiques sur ce sujet; on y apperçoit aisément l'harmonie de notre sel avec le sel admirable; car avec la poussiere de charbon, il constitue un foye de soufre, & forme un soufre parfait; avec un egal poids d'Antimoine crud, il se fond en foye d'Antimoine, sans laisser aucune trace de régule; mais étant fondu avec une semblable portion de régule d'Antimoine, il en détruit une partie, ou la convertit en scories, & le reste du régule demeure sans aucun changement, si ce n'est que ses rayes sont un peu moindres. Le Fiel de verre employé avec l'Alun, & mis ensemble à la calcination, ou à la fusion, fournit un sel admirable plus abon-

abondant, & en assez grands crystaux, parce que l'on saoule abondamment le sel commun superflu par l'acide de vitriol dans l'Alun. Le fiel de verre, fondu avec de la soude dépurée, dissous, & convenablement évaporé, forme d'assez grands crystaux. Ce même fiel, fondu avec deux parties de soude, & longtems exposé au feu, fournit une grande quantité de verre fusible souffré; parce que l'acide de notre sel admirable avec la terre de charbon de soude, rend d'abord un souffre; & la terre vitrifiable de cet acide souffré, en continuant le feu, forme un verre souffré noir. Pour faire cette Expérience il faut employer de la soude cruë: car le fiel de verre avec la soude non dépurée fournit, au moyen de la fusion & de la solution un foye de souffre; au lieu que l'acide vitriolique de notre Sel, uni à la terre de charbon de soude, forme un souffre, que le sel alcali de soude dissout & arrête.

XII. Les rapports de notre sel avec les terres plus simples conviennent aux rapports du sel admirable avec les mêmes terres. C'est ainsi que la craye, ou le marbre, avec deux parties de sel admirable, confluent en une masse, qui a la forme d'un verre jaune tirant sur le verd. La même craye avec autant de fiel de verre refuse de se fondre; mais avec deux parties de fiel de verre, elle forme de la même manière une masse comme de verre & verdâtre; cependant elle écume beaucoup au commencement, & si le creuset est trop rempli, elle en passe aisément les bords: il est même arrivé quelquefois, lorsqu'on a donné un feu trop véhément, que toute la masse a transpiré à travers le creuset; mais quand on se sert d'un feu plus modéré, il se forme une masse consistente, blanche & saline. De l'albatre, avec une égale quantité, ou avec deux portions de sel admirable, forme un corps comme de verre, d'un jaune verdâtre; néanmoins, en l'exposant à un feu plus long & plus fort, toute la matière pénètre le creuset. Le même albatre avec autant de fiel de verre demeure en quelque manière poreux, à cause des impuretés, qui se trouvent communément mêlées au fiel de verre; par la même raison avec deux parties de fiel de verre, il en a résulté une fois une masse d'une couleur un peu brune, & une autrefois une masse moins serrée & blanchâtre: ce-

cependant à un feu plus violent, elle passe tout de même à travers le creuset. L'argille blanche mêlée avec une, deux, trois ou quatre parties de sel admirable, & mise au feu, se réunit en une masse sans transparence d'un blanc cendré; la même chose arrive, en remuant de l'argille blanche avec autant, ou avec deux parties, de fiel de verre. Les cailloux remués au feu, avec une, deux, trois, ou quatre parties de sel admirable, se réunissent en une masse blanche, qui a l'air d'écume, tant sa texture est rare. Les mêmes cailloux, avec une ou deux parties de fiel de verre, se réunissent en une masse semblable blanchâtre. Deux parties de fiel de verre avec une partie de *Quartz*, se rassemblent aussi, mais superficiellement, & sans qu'il y ait une parfaite union, ou combinaison. De même aussi deux parties de fiel de verre avec une partie de *Spatum fluxile*, forment une semblable masse, mais jaunâtre & en partie rouge. Enfin le fiel de verre avec un poids égal de verre pulvérisé, après qu'on l'a fait fondre pendant longtemps, laisse un verre imbu d'une couleur blanche, & d'une si grande dureté qu'il rend des étincelles, en le frappant contre l'acier; mais cette grande véhémence du feu détruit la plus grande partie du fiel de verre.

XIII. Il reste encore quelque chose à ajouter sur l'usage du sujet que nous venons d'examiner. Ayant fait voir ci-dessus, que lorsque notre fiel de verre est dépuré, on trouve que la principale partie consiste en sel admirable, cela ouvre un moyen d'acquies à meilleur prix ce sel qui est cher, & d'employer à sa place dans les Expériences de Chymie, & les usages de Médecine, celui que le fiel de verre fournit. Jusqu'à présent le plus grand parti qu'on tiroit de ce sel, consistoit à s'en servir, comme le font les Orfèvres, pour fondre la limaille d'or & d'argent, & pour suppléer au Borax dans la fermentation. Ceux qui travaillent aux Mines, l'emploient aussi dans la fonte des minieres, surtout de celles qui résistent à la fusion; il y sert à donner de la fluidité aux parties roides & terrestres, & à les séparer des parties métalliques, en sorte que celles-ci puissent confluër & s'unir. Mais ce fiel a de la peine à suffire seul partout, parce que le régule retient aisément quelque chose de salin, surtout s'il y a un mélan-

mélange de souffre dans la miniere; car alors notre sel admirable le résout en foye de souffre, lequel foye s'empare de nouveau d'une quantité assez considerable de métal, le dissout, & le convertit en scories: effet que nous avons déjà remarqué ci-dessus dans l'Experience avec l'Antimoine. On employe avec plus de succès le fiel de verre pour diverses vitrifications, parce qu'il ne cause point de réduction aux corps métalliques calcinés, à cause de l'absence du *phlogiston*, mais qu'au contraire en les attenuant, il les dispose à la vitrification. Il augmente par conséquent la fusibilité du verre de Saturne, tant simple que composé; & en les couvrant, il empêche qu'ils ne s'évaporent si aisément, ou fait que l'air extérieur durcit plus promptement la croute de la surface. La raison en est que cette matiere ne se mêle, ni au verre, ni au metal, mais qu'elle se tient toujours au dessus. Voilà pourquoi encore les Potiers l'employent pour le vernissement des vases de terre. Le fiel de verre est aussi de quelque usage pour augmenter la malleabilité des metaux, qui à cause du mélange des matieres etrangeres, refusent d'obeir au marteau, & il agit sur eux en s'imbibant, pendant le flux coulant de la fusion, dans les parties terrestres les plus legeres, qu'il enleve. *Merret* donne la solution du fiel de verre, comme une Recette, pour empêcher dans les Jardins les insectes de toucher aux herbes & aux fleurs, qu'il faut en arroser, & vû son amertume la chose ne manque pas de vraisemblance.

Enfin, dans la Medecine, notre sel, surtout lorsqu'il est dépuré, peut etre employé fort heureusement & en toute sûreté, comme laxatif, aperitif & servant à la digestion; il convient aussi pendant la cure des Eaux minerales, aussi bien qu'en cent autres occasions; & cela dans la même proportion, & avec les mêmes effets, que l'on a éprouvé jusqu'ici de la part du Sel admirable, ou de celui d'Angleterre. Cependant je ne conseillerois pas le fiel de verre, qui résulte des compositions de crystal artificiel, où l'Arsenic entre.



SUR LES MOYENS PROPRES À DÉCOUVRIR,

LA CONSTRUCTION DES VISCERES,

PAR M. LIEBERKÜHN.



Tous ceux qui s'appliquent à l'étude du Corps humain, & qui tâchent d'expliquer par la structure même de cette Machine, ce qu'elle fait, & ce qu'elle peut faire, tous ceux, dis-je, qui sont versés dans ces connoissances, savent suffisamment que nous ne sommes pas encore parvenus assez loin, pour pouvoir démontrer comment se font toutes les actions naturelles. Je ne parle pas de celles que nous appelons animales, parce que les premiers organes par le moyen desquels elles s'exécutent, sont d'une si grande délicatesse, qu'elle les rend non seulement imperceptibles à nos Observations, mais même qu'elle ne nous permet presque pas d'en concevoir aucune idée. Nous ignorons, par exemple, encore, comment se fait la bile dans le foye, & comment s'opère la sécretion de l'urine dans les Reins, quoique *Glisson*, *Bellini* & *Eustachius*, aient fait là dessus de très belles découvertes, qu'on peut trouver dans leurs excellens Ouvrages.

J'ometts bien d'autres preuves des bornes étroites de nos connoissances. Cependant nous poussons tous les jours plus loin nos recherches, & je ne doute pas qu'avec le tems on ne vienne à bout d'expliquer bien des choses qui sont encore inexplicables pour nous, & en particulier de faire des découvertes, dont on tirera beaucoup d'usages dans la Medecine.

Qu'est-

Qu'est-ce qui nous empêche de trouver le Mechanisme de ces parties, que nous pouvons néanmoins si bien injecter avec de la cire colorée, qu'on ne sauroit douter que la matiere injectée ne passe par tous les vaisseaux, dont ces parties sont composées? C'est ce qui a lieu surtout dans le Foye, & dans les Reins.

Il est vrai que *Ruyseb* a déjà poussé en quelque sorte ses injections dans tous les vaisseaux de ces parties là; mais à quoi cela l'a-t-il mené? Il n'y trouve, comme ailleurs, que ce qu'on nomme les *pinceaux* des vaisseaux, qui ne nous expliquent pas grand' chose.

Lorsque ce célèbre Anatomiste avoit injecté quelques viscères avec une matiere molle, ou liquide, dont il n'étoit pas trop le maître, il la maceroit, & en la contractant beaucoup avec les mains sous l'eau qu'il rafraichissoit souvent, il faisoit paroître partout les *pinceaux* en question.

Mais que produisoit il par ce moyen? Il détruisoit la liaison des vaisseaux plus subtils, changeoit leur situation, les déchiroit tous, & faisoit tomber dans l'eau ce qu'il cherchoit à connoître. Que diroit l'Horloger le moins habile, s'il voyoit qu'on s'y prit de cette maniere pour démontrer la structure d'une Montre?

Aussi la matiere molle dont *Ruyseb* s'est servi, ne convient-elle point à cet usage. Car, dès qu'on en coupe un petit morceau pour l'exposer au Microscope, elle sort des vaisseaux par où elle étoit entrée, ils deviennent flasques, la matiere séparée ne montre plus que de petits points marqués, sans apparence de liaison; enfin, & en un mot, cette matiere enduit le tout d'une graisse, qui ne permet gueres de voir autre chose que cette graisse même.

Il faut s'y prendre plus doucement avec des ouvrages de la Nature aussi délicatement travaillés, & se servir d'une matiere plus dure & cohérente pour injecter ces vaisseaux, lorsqu'on veut avoir le plaisir d'en découvrir les merveilles. Voici une idée abrégée des moyens dont je me suis servi pour examiner les parties nobles de notre Corps.

J'appelle *grands vaisseaux* des viscères, ceux qui n'ont pas encore de connexion avec les vaisseaux excretoires; & je nomme

petits vaisseaux, tant ceux qui ont cette connexion, que les excretoires eux-mêmes.

Telle est la maniere d'injecter les grands vaisseaux des visceres.

Prenez de la cire blanche, bien exemte de toute graisse de boeuf, ou de mouton, autant que vous en voulez. Joignez y une cinquieme partie de Colophonie, une dixieme de Therebentine de Venise; & du Vermillon, ou autre couleur, autant qu'il en faut, pour donner assez de teinte & de cohésion à la matiere refroidie. Injectez ensuite les grands vaisseaux avec cette matiere, au point que vous voulez, en y employant toute la dexterité que demande cette Operation.

Donnons à present la maniere de séparer les vaisseaux fins d'avec les grands, par le moyen de la matiere injectée, en observant l'espace des cavités des grands vaisseaux.

Mettez la partie injectée dans de l'esprit de nitre assez fort, ou dans de l'huile de vitriol, détrempée dans de l'eau. Laissez-la dedans, jusqu'à ce que l'acide ait dissous ce qui n'est pas de la cire. Prenez la ensuite, lavez la dans de l'eau fraîche, & vous aurez le plaisir de voir les cavités des grands vaisseaux, formées en cire.

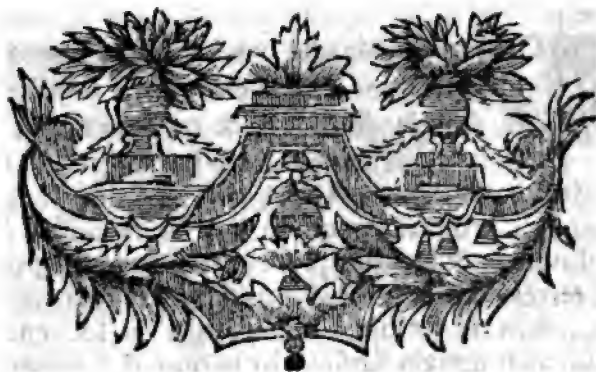
Comme ces fortes de préparations sont les plus curieuses de toutes celles que les Anatomistes peuvent garder dans leurs Cabinets, mais quelles y sont exposées à être facilement gâtées & cassées; je vais fournir encore une methode propre à les rendre plus durables, avant que d'exposer celle que demande l'examen des vaisseaux fins.

Prenez deux parties de gypse en poudre très subtilisé, & une partie de tuiles pulvérisées. Mélez bien ensemble ces poudres seches dans un vaisseau, mettez y ensuite autant d'eau de fontaine qu'il en faut, pour faire une pâte assez fluide, après avoir mêlé rapidement ces masses avec la main. Jetez dans cette masse votre préparation de cire, & tenez l'y, jusqu'à ce quelle ait durci. Après qu'elle a durci, & qu'on l'a fait sécher à l'air, mettez la au feu, & de degré en degré faites la chauffer jusqu'à la rougeur. Quand cette rougeur paroît, & que toute la cire est brûlée, vous avez le moule. Dans ce moule versez de l'argent bien fondu; après quoi mettez le moule dans du vinaigre, & vous trouverez assez de facilité à le séparer de l'argent.

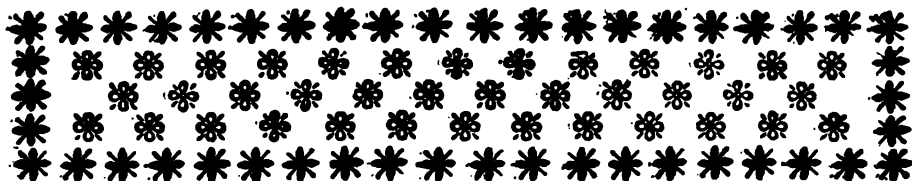
De

De cette façon on peut injecter les vaisseaux de degré en degré, & les préparer jusqu'aux vaisseaux les plus fins, que l'on injecte ensuite de cette manière.

Prenez la matière que j'ai indiquée pour les grands vaisseaux, & ajoutez y seulement autant d'huile de Therebentine qu'il en faut, pour l'insinuer ensuite dans les vaisseaux plus fins. Coupez après cela un petit morceau de la partie que vous voulez examiner, versez une goutte d'eau forte sur la surface, & laissez l'y jusqu'à ce qu'elle ait séparé les membranes des vaisseaux. Exposez la enfin au Microscope avec le miroir de réflexion; & vous verrez un ouvrage bien plus accompli que celui que les Graveurs peuvent exécuter sur des plaques de cuivre, & dans lequel vous découvrirez & développerez tout ce que vous souhaitez.

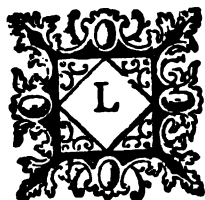


OBSER-



O B S E R V A T I O N S
SUR LA VERITABLE OSTEOCOLLE DE LA
MARCHE DE BRANDEBOURG,
PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.



L Orsque Sa Majesté voulut bien m'accorder, il y a quelques années, la charge de *Physicien provincial* du Cercle de *Lebus*, & qu'habitant à la Campagne, je cultivois mes études de Botanique dans les contrées qui sont en deçà & en delà de l'Oder, aussi bien que dans celles qu'arrose la Sprée, je trouvai l'occasion la plus favorable de faire dans des lieux sablonneux & incultes plusieurs découvertes par rapport aux pierres, aux terres, & aux productions figurées, ou pétrifiées. C'est, par exemple, dans de semblables lieux que j'ai souvent recueilli de vieilles pièces d'un certain fossile, sur le nom & l'origine duquel j'étois d'abord fort incertain; mais je me procurai ensuite la certitude que c'étoit de véritables branches du *Lapis sabulosus* de *Thomas Erasmus*, (*) qu'on nomme vulgairement *Osteocolle*, quoique d'autres luy aient

(*) Voyez la Lettre qu'il écrit à Cont. Gesner en 1572. *de natura, materia, ortu & usu LAPIDIS SABULOSI, qui in Palatinatu ad Rhenum reperitur*. On la trouve à la fin de la II. Part. de sa *Disput. de Medicina nova Phil. Theophrasti*.

ayent imposé les noms de *Psammosteum*, *Holosteum*, *Fossile arborescens* &c. (*)

II. Ce fossile, l'un des plus curieux, n'a été gueres connu des Auteurs qui ont écrit sur l'Histoire Naturelle; ou sur la matiere Medicale, on n'en trouve que des descriptions imparfaites & confuses; & c'est ce qui m'a engagé à le soumettre à un examen plus attentif. Il n'étoit gueres question que de la figure externe de notre fossile, & du lieu de son origine, dans les principales relations qu'on en a données jusqu'ici, & ne faisant pas beaucoup d'attention à la chose même, on avoit confondu plusieurs productions étrangères, par exemple, les *gypseuses*, les *arenaires*, les *selenitiques*, les *tobacées*, les *stalactitiques*, les *argilleuses*, & même les *concretions salines*, avec les productions *martiales*, & autres *metalliques figurées*. C'est ce qui me donnera lieu de relever plusieurs erreurs, & de les rectifier suivant la mesure de mes forces.

III. Pour arriver à mon but, j'ai fait en divers tems, & dans des saisons différentes, des courses dans les lieux sablonneux & incultes des deux Marches, où ce fossile étoit depuis plusieurs siècles connu de tout le monde, recueilli & employé à des usages tant internes qu'externes. J'en ai pris les informations les plus exactes, & j'ai mis par écrit tout ce qui concernoit notre fossile, par rapport au lieu, à la situation, à la figure, à la grandeur, à la proportion, & à la matiere.

IV. Il y a des terrains assez étendus dans la Marche Electorale & dans la Nouvelle, qui, bien qu'environnés de toutes parts de campagnes plus fertiles, & même excellentes, ne laissent pas d'être entièrement sablonneux & pierreux. C'est ce qui fait qu'aucune plante ne sauroit presque y vivre, ou du moins y prospérer, excepté le *Tibymale*, la *Bruyere*, la *Statice*, l'*Yrayer*, le *Jasbon*, le *Pié de Chat*, le *Bouleau*, le *Pin*, & très peu de *Cbiendent*. S'il en faut croire les anciens monumens, toutes ces contrées du tems de nos Ancêtres n'étoient que d'immenses forêts, que la négligence, ou l'avarice des habitans ont détruites, & que l'on a mal à propos entrepris de défricher,

(*) Voy. *Hermann. Massilograph. p. 183. & s.*

cher, pour en faire des champs, ou des prés, au lieu qu'on n'en a fait que des terres ingrates & misérables, qui seroient à peine rétablies & fertilisées par le travail & l'industrie d'un siècle entier. Il est résulté de cet attentat oeconomique, si je puis m'exprimer ainsi, les inconveniens les plus fâcheux. En labourant, on détruit le peu de mousse dont la terre sablonneuse est revêtue, elle meurt, & ensuite l'ardeur du Soleil atténue le sable, & la violence du vent l'emporte de toutes parts. Il arrive quelquefois, dans de grandes tempêtes, que des lieux élevés s'applanissent, ou qu'il se forme des montagnes dans les plaines; de sorte qu'il ne reste presque aucune espérance de voir une croute mousseuse regarnir ces contrées.

V. Il est fort vraisemblable que les anciennes forêts dont nous avons parlé, n'étoient composées, outre les diverses espèces de *Côtes*, que de *Bouleaux*, de *Pins*, de *Peupliers tremblans*, de *Charmes*, & d'*Aunes*; la stérilité du terroir auroit eu peine à en nourrir d'autres. Après les avoir abattus, nos Ancêtres qui avoient du bois en abondance, ne se sont pas mis en peine d'en arracher les troncs & les racines; comme le prouvent ces amas de racines qu'on trouve ensevelis ça & là sous le sable, & qui avec le tems s'y sont enfoncés de plus en plus.

VI. C'est dans les endroits que nous venons de décrire qu'on rencontre une quantité considérable de notre fossile, dans un sable plus ou moins léger, blanc, gris, rouge, ou jaunâtre, fort ressemblant à l'espèce de sable, qu'on trouve ordinairement au fond des rivières. Celui qui touche immédiatement notre fossile est plus blanc, & plus mou que le reste, & annonce suffisamment l'existence d'une terre plus délicate, qui est d'une blancheur de neige, & qui sous la forme & l'apparence de farine s'attache fortement aux mains. Quand dans les tems pluvieux cette terre vient à se dissoudre dans des lieux élevés, les eaux l'entraînent en forme d'émulsion dans les creux qui se trouvent placés au dessous.

VII. Cette terre subtile ne diffère guères de la *Marne*, & conformément à l'examen que M. *Pott* en a fait, on peut la mettre au rang des véritables terres de chaux. Elle se trouve attachée au sable dans

dans des proportions très différentes, depuis la hauteur de trois ou quatre pieds jusqu'à celle de huit ; & plus le sable est voisin des branches de notre fossile, plus la quantité de cette terre augmente. On peut même dire qu'il n'y a pas grande différence entr'elle & la matière même, qui constituë le corps du fossile.

VIII. Quoique nous ayons infinuë que cette terre descend le plus souvent des lieux élevés dans d'autres plus bas, cela n'empêche pas qu'on n'en trouve quelquefois des lits entiers mêlés au sable, à la profondeur de quinze ou vint pieds, & même tout le fonds de quelques étangs en est, comme on peut aisément s'en convaincre en examinant celui de divers étangs des cercles de *Barnim* & de *Lebus*. Il y en a surtout un bien remarquable, situé dans le bois fort connu de *Lapenow*; entre les villages de *Friedland* & d'*Hermersdorff*, auquel on a spécialement donné le nom de *Weissenfee*, à cause de la couleur blanche de son fonds. Et, pour ajouter ceci en passant, ce qui augmente la célébrité de cet Etang dans toute la Province, & dans celles qui y confinent, c'est que les poissons & autres animaux aquatiques y sont blancs, ou du moins plus blancs, en sorte qu'à la couleur seule on peut les distinguer aisément de ceux qu'on prend dans les Etangs voisins. *

IX. Pour ce qui concerne le tems de l'année, où notre fossile s'offre aux regards des curieux, il n'y en a point de particulier, comme quelques uns le prétendent ; mais ce qu'il y a de vrai, c'est que les tems venteux, ou pluvieux, font distinguer beaucoup plus aisément les piéces de ce fossile, en sorte qu'elles s'offrent, pour ainsi dire, d'elles mêmes aux yeux. L'impetuosité du vent enleve, par exemple, quelquefois tout le sable, & laisse entièrement à nud les extrémités du fossile, ou au contraire, le vent rassemble de petits monceaux d'un sable plus luisant, sous lesquels on juge aisément que le fossile se trouve caché. Pareillement une pluie un peu longue, ou une fonte subite de neige, venant à laver diverses branches du fossile, qui poussent vers la surface, les découvre tout à fait, & sépare d'avec le sable le reste de la terre qui les environne. Car ces branches inhérentes indiquent avec beaucoup plus de certitude le tronc entier du fossile qui est ca-

*Voy. une
petite Diff.
j'ai publiée
de Foss. sub-
globose, sessili,
& molli.

ché, que les pieces rompuës qu'on trouve çà & là comme égarées sur la surface du sable, & que le vulgaire des *Lithophiles* prend pour des indices certains & indubitables. Mais ces bonnes gens se trompent le plus souvent, & sont dans le cas de ceux qui, faute de connoissances métalliques assez étenduës, s'imaginent, en voyant des fragmens de mines, ou des pierres qu'on nomme *gemmes*, épars dans une contrée, qu'on doit infailliblement trouver, en creusant au même endroit, des lits entiers & souterrains de métaux, ou de gemmes. C'est aussi quelque chose de bien ridicule que ce que *Zorn* rapporte de *Colerus*, (*) qui prenoit " l'Osteocolle pour une veritable plante, à laquelle il attribuoit une petite fleur bleuë, qui laisse en tombant sur le sable des traces, par le moyen desquelles on découvre le fossile entier." On trouve à peu près des choses du même ordre dans le petit conte suivant, par lequel *Anselme Boesius de Boodt* en imposoit à la crédulité d'un certain *Uldaric de Burchsdorff*, Maître d'Hotel de l'Empereur Frederic Rodolphe II. Il lui disoit, " que dans sa Patrie le *Lapis sabulosus* croissoit comme une plante, d'une maniere tout à fait admirable, & qu'au commencement du Printems on le voyoit pousser de terre sous l'apparence d'un petit Chou cabut, avec de petites feuilles cendrées, & noirâtres, qui se développoient ensuite, & s'étendoient du côté de la terre. Que dans cette petite tête qui sortoit, on trouvoit une moëlle, ou poussiere, qui se fondoit aisément en liqueur, & que les branches de cette plante étoient seuses." Se peut-il des observations plus fausses, & un récit plus ridicule ?

X. A l'aide du vent, ou des pluies, les branches de notre fossile se découvrent beaucoup plus aisément dans les lieux élevés que dans les plaines. Quand on les a trouvées, on détache avec précaution le sable d'un côté en suivant la branche jusqu'à ce qu'on soit arrivé au tronc de tout le fossile, & qu'on l'ait mis à nud avec toutes les racines qu'il jette de côté & d'autre. La longueur de la racine, qu'il n'est pas bien possible de déterminer, mene aussi quelquefois obliquement

(*) Botanolog. Med. p. 498. Ajoutez à ce que nous disons ici *Sebenckfeldt, Catal. Fossil. Silf. L. III. p. 387. & Aphan. Kircher. Mus. p. 207.*

quement au tronc même; & quand on y est parvenu, il faut ôter tout le sable, (qui a pour l'ordinaire deux pieds au moins de hauteur,) de manière qu'on puisse appercevoir commodément du même coup d'oeil le partage & le cours des racines. Au reste, tout le sable qui est à decouvert dans les bois, dans les champs, & dans les bruyeres, est ordinairement sec à la profondeur de deux pieds; mais dans les endroits, où notre fossile croit, on trouve déjà l'humidité à un pied; & cette humidité va en augmentant d'une manière sensible étant même plus grande; à proportion qu'il y a dans le sable une plus grande quantité de cette terre de chaux, dont nous avons parlé ci-dessus. Cette quantité d'humeur croupissante humecte perpétuellement le bas des plus grandes branches de notre fossile, autour desquelles elle se rencontre.

XI. Tant que le tronc entier est encore renfermé dans le sable, la forme du fossile ne s'offre aux yeux que d'un côté, & alors elle représente assez parfaitement le bas du tronc d'un vieil arbre champêtre, par rapport à la figure, à la grandeur, à la situation & aux proportions; & les racines en partie descendent jusqu'à la profondeur de quatre à six pieds, en partie s'étendent obliquement de tous côtés. Il faut relever ici ce que quelques uns des Auteurs, qui ont écrit sur l'Histoire Naturelle, avancent de contradictoire à la vraie situation de ce fossile, en disant que *ses branches croissent à la surface de la terre*. Il y a pourtant des relations qui sont assez d'accord avec notre exposé, comme celles de *Beckmann*, (*) d'*Hermann*, (**) & d'*Erastus*, (***) Professeur autrefois assez célèbre à Heidelberg, qui s'exprime ainsi au sujet de la grandeur & de la figure de notre fossile. " Aux environs du même endroit, nous avons trouvé le tronc, qui conservoit la même grandeur jusqu'aux racines, en sorte qu'il ressembloit à un tronc d'arbre recourbé dans cet endroit."

E 3

XII. Ce

(*) Dans une Lettre à *Henri Oldenbourg*, inserée dans les *Transf. Phil.* du mois de Septembre 1668.

(**) *Maslogr.* p. 184. & c. où l'Auteur donne la figure, non de tout le fossile, mais d'une grosse branche, & encore peu fidelement.

(***) *loc. cit.* Voy. le Note sur le §. I.

XII. Ce que nous avons dit jusqu'ici, sert non seulement à faire connoître la figure de notre fossile, mais on y apperçoit encore plusieurs circonstances, qui menent à des conclusions fort probables sur la génération. Le tronc même du fossile, dont la grandeur & l'épaisseur varient, doit sans doute son origine au tronc de quelque arbre mort, & en partie carié: ce qui se prouve suffisamment par la lésion & la destruction de sa structure intérieure. Car le tronc extérieurement raboteux, est rompu d'un côté, & creusé par une espèce de carie, qui enlève non seulement toute la substance intérieure, dont le défaut est suppléé par la terre de chaux, ou par le sable, mais même ne laisse souvent aucun vestige de l'écorce, ni des cercles du corps ligneux. Quelquefois pourtant, mais rarement, on trouve encore le parenchyme à l'extrémité des racines.

XIII. Les racines les plus fortes, & les plus voisines du tronc, soit qu'elles descendent profondément en ligne droite dans le sable, soit qu'elles s'étendent obliquement, sont presque toujours plus grosses que le bras, mais elles s'amincissent peu à peu au se divisant, de sorte que les dernières ramifications ont à peine une circonférence, qui égale le diamètre d'une plume d'oye. Pour les productions capillaires des racines, elles ne se trouvent en aucun endroit du fossile, sans doute parce que la ténuité de leur texture ne leur permet pas de résister à la putréfaction; mais on ne laisse pas d'observer dans les racines des traces abondantes de leur existence, telles que sont, par exemple, divers tubercules, des noeuds, des avances, des éminences, & de petits creux dispersés sur la surface.

XIV. Quelquefois une *Matrice* d'une figure singulière entoure les racines, surtout les plus grandes, & les serre étroitement. Sa substance n'est pas fort cohérente, & ressemble à de la limaille. C'est un composé d'écorce en poussière, & de bois pourri; & l'on y trouve un témoignage certain de la corruption à laquelle a été réduit un arbre auparavant vivant. C'est ce qui fait que, quoique le sable ne manque pas d'humidité, on ne sauroit détacher cette matrice entière, mais qu'elle tombe aussitôt en une masse informe, en se confondant avec la terre de chaux & le sable. Surtout quand le sable domine dans

dans le mélange avec la terre. La matiere de notre fossile est un mixte qu'on a peine à définir: au moins ne peut-on le faire qu'à l'égard des fragmens les plus purs; tous les autres montrent une extrême inconstance, tant à l'égard de leur composition, que de leur humidité & de leur dureté. C'est ainsi, par exemple, comme des observations fréquemment répétées le prouvent, qu'on trouve rarement le tronc & les grosses racines, durcies ou petrifiées dans le sable; elles y sont plutot un peu humides, & molles; & lorsqu'on les expose à l'air, elles deviennent sèches & friables. On peut établir quelques proportions dans leur composition, mais on en découvre moins dans les autres, qui sont plus petites, & qui, tant dans le sable qu'à la surface, conservent rarement le même ordre de composition. Ces dernières ont outre cela une écorce purement sablonneuse, raboteuse, d'une couleur cendrée ou mêlée; & sous ce sable on trouve une substance, qui a quelque humidité, mais qui est pourtant dure, & presque entièrement pierreuse. Cette difference a été, si je ne me trompe, inconnue aux Auteurs, qui jusqu'à présent n'avoient entrepris l'histoire de l'Osteocolle, que d'après les fragmens qui se trouvent dans les Apoticaïereries, & qui sont de ceux qui ont souffert les injures du mauvais tems.

XV. La couleur du fossile encore enseveli sous le sable, est ordinairement d'un blanc tirant sur le jaune; mais pourtant quelques parties ont la blancheur de la neige, tandis que d'autres sont cendrées, ou noirâtres. Cela dépend souvent du sable seul, & quand on l'a écarté, la blancheur de la matiere se manifeste. Quelquefois aussi, ce changement de couleur arrive par la simple exposition à l'air.

XVI. Les circonstances du tems & du lieu, la figure externe, la situation, & le mélange des parties, se trouvent donc déterminées au sujet de notre fossile, par les Observations que nous venons de proposer. Il sembleroit convenable d'en offrir à présent la figure aux yeux du Lecteur; mais divers obstacles déjà insinués ci-dessus ne le permettent pas. On en approcheroit assez, vû le rapport extreme de la figure extérieure, en faisant graver des racines de divers arbres, mortes & cariées. En effet, il n'y auroit aucune contradiction à dire, que

que des changemens d'une même espèce, *pierreux*, par exemple, ou *salins*, ou *metalliques*, peuvent arriver aux racines d'arbres de plusieurs espèces différentes; & l'expérience le confirme. Il n'y auroit par conséquent non plus aucune absurdité dans l'opinion, que des arbres de diverses espèces venant à mourir, & ensuite à se pourrir & se creuser, concourent à la formation d'un seul & même fossile, assavoir le notre.

XVII. Considérons présentement l'intérieur de ce fossile avec plus d'attention; nous y trouverons plusieurs choses fort remarquables. Et d'abord à l'égard des racines, les principales sont tout à fait entières, & d'une substance presque uniforme. Cette substance est plus rare au milieu, & vers l'écorce plus dure, & en quelque sorte graveleuse. Il y a cette différence entre les branches plus grosses & plus épaisses, & les moindres, que les premières sont composées d'une matière beaucoup plus déliée, plus pure, & qui, à cause du défaut d'une sorte de glu naturelle, à moins de cohésion; au lieu que celles-ci, c'est à dire, les moindres & les plus petites, admettent le plus souvent deux substances dans leur composition. Certaines petites branches d'un seul & même tronc, quoique cachées dans un sable assez humide, sont dures, & leur dureté augmente, au point qu'elles deviennent de véritables pierres, qui rendent des étincelles en les frappant contre l'acier. Quelquefois j'en ai vu à la surface du sable plusieurs, dont le centre est creusé; mais ce sont le Soleil & la température de l'air, qui les ont calcinées hors du lieu de leur formation; elles appartiennent à la Classe de celles que nous avons indiquées ci-dessus §. I. & IX.

XVIII. Cependant, quoique les racines de notre fossile soient moins creusées en forme de tuyaux, lorsqu'elles ne sortent pas de leur place naturelle, on y remarque encore d'autres différences. Il y en a, par exemple, quelques unes dont la substance est tellement uniforme, qu'on ne sauroit distinguer l'écorce d'avec le centre, au lieu que dans d'autres le centre est tout percé de petits trous, qui le font ressembler exactement à la *diplûe* des Os; phénomène, dont nous expliquerons plus bas la raison, qui dérive de la formation même du fossile.

file. Dans certaines grosses branches il demeure quelquefois des restes de bois pourri, sans suc, & comme de la limaille; tandis que dans d'autres le centre du corps ligneux est sec, dur, & presque comme de corne: ce qui s'étend quelquefois à diverses reprises jusqu'à la longueur de quatre, ou de six pieds. Cette portion *cornée* du corps ligneux n'est point une des moindres racines, une racine capillaire, (comme pourroit se l'imaginer une personne peu au fait de ces matieres;) pour s'assurer du contraire, il n'y a qu'à examiner les troncs d'arbre, qui dans les lieux marécageux viennent à se détruire peu à peu, étant creusés, & rendus poreux par l'humidité naturelle du terroir.

XIX. Nous avons déjà donné une idée de la matiere de notre fossile, & nous avons fait connoître l'extreme rapport qu'il y a entre elle, & la terre de chaux mêlée au sable: pour achever de dire ici ce que nous en pensons, il n'y presque point, ou même point de difference entre ces matieres. Il faut seulement prendre garde qu'il ne s'agit point de ces pieces, qui étant exposées à l'air, y éprouvent des changemens. La masse terrestre, qui, à proprement parler, constitue notre fossile, est une vraie terre de chaux, & quand on l'a nettoyée du sable & de la pourriture qui peut y rester, l'acide vitriolique, avec lequel elle prend une forte effervescence, la dissout en partie: mais je suis pourtant en doute, si c'est une Terre pure, & entierement dégagée de la liqueur du bois pourri, ou de l'acide. Le *savant Henckel* * nie l'effervescence & la solution de l'Osteocolle dans l'acide du vitriol; mais il faut qu'il ait pris quelque autre fossile pour l'Osteocolle de la Marche.

* *Flora Sa-*
turn. p. 285.

XX. La matiere de notre fossile, lorsqu'elle est encore renfermée dans le sable, est molle, elle a de l'humidité, sa cohérence est lâche, & elle exhale une odeur acre, assez foible cependant; ou bien elle forme un corps graveleux, pierreux, insipide & sans odeur. Tout cela met en évidence, que la terre de chaux de ce fossile n'est point du gravier fin, lié par le moyen d'une glu, comme le prétendent *Tb. Erastus* † & *Hermann*; * ce dernier étant même persuadé, que le sable fin se convertit avec le tems dans la matiere de notre fossile. P. 140.

Cela répugne aux principes reçus, suivant lesquels toute espece de

† *ib. sup.*
* *Maßlogr.*
p. 185.

sable étant une terre vitrifiable, se trouve par là en opposition avec les terres de chaux, & ne peut jamais se changer en elles.

XXI. Lorsqu'on peut remarquer, quelque proportion dans la composition de la matiere de notre fosfile, elle consiste pour l'ordinaire en parties égales de sable & de terre de chaux, comme je m'en suis assuré en les séparant dans l'eau. De cette maniere, une once de matiere pure a rendu une demi-once & cinq grains de terre de chaux très deliée, où se trouvoit mêlée une portion de sable commun, grossier & pesant, qui alloit au poids d'une drachme & quinze grains; à quoi il falloit ajouter enfin deux drachmes d'un sable très fin, qu'on avoit plus de peine à séparer du reste de la terre de chaux. Ainsi il ne manquoit au poids entier de la matiere que deux scrupules qui s'étoient perdus dans la solution. L'examen Chymique de notre fosfile a été fait par Mrs. *Kundmann*, *Neumann*, *Pott*, & quelques autres, aux écrits desquels nous renvoyons ceux qui en font courieux, le sujet n'étant pas de notre ressort. Nous attendons une nouvelle

C'est celle analyse de l'Osteocolle, que M. *Marggraff* nous fait esperer. *

il suit ce émoire.

XXII. Par rapport à la génération de notre fosfile, les Auteurs se partagent en divers sentimens; mais les contradictions où ils tombent, viennent surtout de ce qu'ils confondent d'une maniere étonnante des corps étrangers, & entièrement differens, Il y en a aussi, qui déduisent, par exemple, l'origine de notre fosfile d'une espece d'incrustation fortuite & confuse, salino-terrestre, ou glutineuse, pareille à celle qui produit le *Zingiberites*, aussi bien que plusieurs veines mêlées d'argille & de sable. Mais lorsqu'en comparant soigneusement toutes les circonstances qui concernent notre fosfile, nous l'examinons attentivement, & suivant les règles de l'Histoire Naturelle, dans le lieu même de sa formation, nous n'avons plus besoin de recourir à aucune de ces fictions. Quelques Auteurs ont été plus près du vrai, mais en très petit nombre, comme *Neumann*, qui a pris notre fosfile pour une racine d'arbre petrifiée, & *Ferrantes Imperatus*, † qui dit; que l'Osteocolle est une racine changée en pierre, molle comme du ciment, & d'une substance sablonneuse. Ces dernieres opinions sont plus solidement appuyées. En effet notre fosfile, dont

† *Hist. Nat. Imperatus*, † qui dit; que l'Osteocolle est une racine changée en pierre, molle comme du ciment, & d'une substance sablonneuse. Ces dernieres opinions sont plus solidement appuyées. En effet notre fosfile, dont

dont la figure naturelle & constante est celle d'une racine d'arbre champêtre, n'est réellement autre chose qu'une *semblable racine avec le bas du tronc, qui étant morte a été pourrie dans le sable par l'humidité croupissante, & dont le tems a changé l'apparence, en la remplissant de terre de chaux.* Les observations que nous rapporterons encore dans la suite, acheveront de justifier notre hypothèse.

XXIII. Outre le témoignage de l'expérience, on peut encore prendre pour garans les caractères suivans, qui conviennent à tout corps naturel & vrai, qui a subi le changement de la pétrification, & qui le distinguent sensiblement de toutes les incrustations, ou productions figurées quelconques. Ces caractères sont la *figure, la grandeur, le nombre, la situation, & la proportion naturelle.* Quand ils se trouvent réunis dans un corps pétrifié, & le rendent constamment semblable à un corps tel qu'il étoit dans son état de vie, cela détruit entièrement tout soupçon d'incrustation, ou de telle autre formation fortuite & confuse.

XXIV. En parcourant des lieux champêtres & marécageux, on rencontre çà & là des troncs d'arbre pourris, qui ont une parfaite ressemblance avec les troncs vivans les plus sains, & qui, à en juger par leur grandeur, devroient avoir un poids très considérable, quoique souvent ils ayent à peine quelques livres. C'est qu'ils n'ont point de substance ligneuse intérieure ; en sorte que depuis la tige jusqu'aux racines c'est une pure cavité, où il ne reste presque que les nerfs qu'on nomme *cornés*, & un petit nombre de vaisseaux cartilagineux du corps ligneux, toutes les apparences néanmoins s'y conservant. Cet effet singulier est causé par l'abord perpétuel de l'humidité, & par l'état croupissant, qui pourrissent peu à peu toute cette substance intérieure, comme l'expérience en fait foi.

XXV. Cette humeur putride & croupissante pénètre la tige par le moyen de son acreté, en passant à travers la texture celluleuse jusqu'au cercle ligneux, elle obstruë partout les fibres du bois, les amollit, & les ronge, de manière qu'il en résulte la solution de tout le continu, à la réserve d'un très petit nombre des parties les plus pures, qui semblent résister entièrement à la putréfaction. Des

trons & des racines dans cet état sont ce que l'on peut imaginer de plus propre à la génération de notre fossile dans le sable; & voici comment la chose se passe. Il se forme dans ces trons, & dans ces racines, des cavités, où s'insinuent facilement par le moyen de l'eau la solution de sable & de terre de chaux, en entrant par tous les trous & les endroits cariés, & en descendant jusqu'aux extrémités de toute la tige & des racines, jusqu'à ce qu'avec le tems toutes ces cavités se trouvent exactement remplies. L'eau superflue trouve aisément une issue, dont les traces se manifestent dans le centre poreux (voy. §. XVIII.) des branches les plus pures qui sont moindres. C'est là l'unique manière dont arrive la formation de notre fossile; la chose est incontestablement appuyée sur l'expérience, & c'est par là que l'on explique sans peine, comment l'Osteocolle reçoit & conserve la figure, la grandeur, la situation, & la proportion exactement naturelle qu'on y remarque. Qu'est ce qui pourroit donc nous empêcher d'imiter la formation de ce fossile, & de produire nous-mêmes en un moindre espace de tems de l'Osteocolle, faite avec plus d'art, & plus pure? Je n'y vois point de difficulté.

XXVI. Au reste on découvre la raison de cette mollesse des plus grosses branches de notre fossile, dont nous avons parlé §§. XVI. XVII. en réfléchissant surtout, que toute l'humidité distille pendant un plus long espace de tems, & sans discontinuer, à travers le sable jusqu'au tronc. En effet le corps de l'Osteocolle déjà tout formé se trouve plus dense que le sable, & trop ferré pour transmettre l'eau, & s'il le fait, ce n'est qu'avec beaucoup de lenteur & de difficulté, ce qui fait qu'il y a autour du fossile une humidité qui croupit perpétuellement, & qui est un véritable obstacle à la pétrification. *M. Henckel* a déjà touché cette idée assez heureusement, dans celui de ses Ouvrages que nous avons cité plus haut. D'ailleurs il n'y a point de contradiction entre ce que nous avançons ici, & ce que nous avons dit §. XIV. des plus petites branches qui sont aux extrémités, & qui étant comme dispersées, & fort éloignées du centre, sont polies & presque de pur sable.

XXVII. Ce

XXVII. Ce que l'Auteur de la *Mafsiographie*, & quelques autres, difent au fujet de l'incruftation, ne s'accorde point avec la verité, tant à caufe qu'il ne s'y trouve point de glu naturelle propre à produire cet effet, ou du moins qu'elle eft trop délayée, que parce qu'on trouve fouverit dans la mafle de notre fofile une portion égale de fable & d'ordures. Outre cela il y a divers bois morts, ou pierres, qui fe trouvent environnées de matiere pareille à celle qui forme l'Ofteocolle, c'eft à dire, de fable & de terre de chaux; & qui ne reçoivent point pour cela d'incruftation.

XXVIII. (*) Je vais continuer à dégager l'Hiftoire de l'Ofteocolle de toutes les fictions, dont on l'avoit embaraffée. Pour cet effet je mettrai fous les yeux de l'Academie les nouvelles pieces de ce fofile, que j'ai dernièrement recueillies, & j'y joindrai les Observations incontestables, que j'ai réitérées plufieurs fois, & avec toute l'exaétitude dont je fuis capable, fur les lieux mêmes de la formation.

XXIX. J'ai toujours eu une véritable ardeur pour l'étude de l'Hiftoire Naturelle, & j'ai parcouru avidement tous les Tréfors qui ont été publiés, pour en étendre les bornes. L'Ofteocolle m'a fourni une nouvelle occafion de les feuilleter avec attention. Mais j'avoie ingénuement, que je n'y ai jamais rien trouvé, qui pût mener à quelque certitude fur la connoiffance de ce fofile, & procurer en particulier un jugement affuré fur fa génération. Au contraire je n'ai prefque rencontré partout qu'une extreme confufion. Quelques uns des échantillons que les Auteurs produifent, approchent à la verité de la forme & de la couleur de l'Ofteocolle; mais la plupart n'ont même aucune reflemblance avec ce fofile, qui puiſſe leur en faire porter le nom.

XXX. Il m'eſt arrivé furtout de rencontrer fréquemment, tant dans les Cabinets des Curieux, que dans les Apoticaiereries, une certaine eſpece de tuf, en partie informe, en partie compoſé de l'aſſemblage de plufieurs petits tuyaux de différente nature, qu'on faiſoit

F 3

paſſer

(*) Ici commence un ſecond Mémoire, que M. Gleditſch lut à l'Academie un an après le premier, pour lui rendre compte de nouvelles Observations, qu'il avoit faites depuis ce tems-là.

passer pour de l'Osteocolle. Ce tuf se trouve en abondance dans plusieurs contrées de la Thuringe, par exemple, autour de *Tennstedt*, *Sondershausen*, *Ost & West-Creisfen*, *Grosen-Ebrig* &c. sur les bords de l'*Helpa*, & en d'autres endroits, & il est caché à la profondeur d'un pied ou de deux, sous les terres les plus fertiles. On prétend qu'après avoir réduit une grande quantité de ce tuf en poudre par le moyen de certaines machines particulières, on la porte tous les ans à *Meissen*, pour entrer dans la composition de la Porcelaine.

XXXI. Il m'est bien arrivé aussi assez souvent de trouver de la vraie Osteocolle, mais elle étoit si vieille, & si gâtée par l'action de l'air, qu'il étoit impossible de s'en servir pour faire des Observations. En voulant employer de semblables pieces altérées, pour en tirer des conclusions sur la nature & la génération de tout le fossile, on pourroit tomber dans des erreurs pareilles à celles des personnes, qui prennent pour des os de quelques Géants d'une grandeur étonnante, les os des animaux marins qu'on rencontre sous terre. J'ai encore remarqué une plus grande confusion à cet égard dans les Apoticaieries qui sont hors de la Marche, & où l'on devoit trouver de véritable Osteocolle, aussi bien que dans les nôtres. On n'y emploie, surtout vers les confins de la Forêt noire, que du Gypse le plus commun, qui prenant le titre d'Osteocolle, sert à tous les usages de Chirurgie, par une erreur très dangereuse, mais à laquelle personne ne s'oppose.

XXXII. Il semble qu'on ait quelque raison de demander ici, pourquoi les Physiciens n'ont encore dit que des choses si incertaines sur l'origine de notre fossile, quoiqu'il y ait environ trois siècles qu'on en fait mention dans les Ecrits des Medecins. Mais il faut remarquer que, malgré l'ancienneté de son usage, les pieces d'Osteocolle ont été considérées fort négligemment, parce qu'elles paroissent peu pures, & qu'elles tombent aisément en poussière. Le petit peuple ramassant ces pieces, les alloit porter à bas prix aux Apoticaies, & leur livroit pêle-mêle les branches trouvées sous le sable, ou celles qui s'étoient calcinées à la surface, blanches, gâtées, dures, entamées, &c. Et c'est d'après cet état que les Auteurs ont fait leurs relations, qui y conviennent fort bien. Il y a longtems que je m'étois aperçu

aperçu que les opinions erronées de ces Auteurs dérhoient principalement de cette source. Si les pauvres gens qui ramassoient l'Osteocolle, n'avoient voulu en apporter aux Apoticaïres que de bien nette, & dégagée de toute pourriture de bois & d'ecorce, ceux-ci ne leur en auroient pas su beaucoup plus de gré, & ne les auroient gueres misux payé.

XXXIII. Le seul Ecrivain que je sache, qui dans le siècle passé ait assez bien connu l'Osteocolle, est *Ferrantes Imperatus*. Il en a donné une courte description dans son *Histoire Naturelle*, & a joint la figure fort nette d'une piece, qui paroît avoir été formée dans un tronç de Bouleau. Quoique depuis lui quelques uns ayent parlé par ci par là dans leurs Ecrits de l'Osteocolle, & en ayent même dit certaines choses nécessaires à savoir, personne néanmoins n'a pu démontrer solidement l'origine de ce fossile, & cela faute d'Observations.

XXXIV. A l'égard du terroir natal de l'Osteocolle, où elle habite, pour ainsi dire, & a coutume de se former, l'Experience jointe au consentement de plusieurs Auteurs, dépose que le plus convenable est un terroir stérile, sablonneux, & léger. Au contraire toute Terre grasse, consistante, argilleuse, onctueuse, limoneuse, &c. lorsqu'elle vient à être délayée par quelque écoulement abondant d'eaux, laisse passer lentement & difficilement l'eau elle-même, à plus forte raison quelques autres terres, comme celle dont l'Osteocolle est formée. L'Osteocolle se mêleroit intimement à la terre grasse, ou elle formeroit des lits plats au dedans d'elle, plutôt que de pénétrer une substance aussi consistante.

XXXV. Voici le nom des endroits sablonneux & incultes des deux Marches, où j'ai spécialement recueilli des fragmens d'Osteocolle, & en ai observé la génération. Le premier lieu qui m'ait fourni de véritable Osteocolle, c'est une campagne fort sablonneuse, qui confine aux Villes de *Potsdam*, *Treuenbritzen*, & *Belitz*, où je fis cette découverte en 1735. A ces premiers fragmens j'en joignis d'autres, que me fournit Mr. *Feldmann*, habile Medecin & Physicien de *Ruppin*, qui les avoit tirés de la montagne sablonneuse de *Cremme*. En 1737. je fis une récolte abondante d'Osteocolle dans le territoire même

même de Berlin, hors de la porte qu'on nomme de Halle, & dans les terres sablonneuses, qui vont du Village de Schoeneberg à Charlottenbourg; mais les pieces étoient assez petites & vieilles. J'ai encore rencontré ce fossile dans plusieurs endroits du Cercle de *Lebus*, entr'autres autour de la Ville de *Münchenberg*, & des Villages de *Hoppengarten*, *Quilitz*, *Rosenthal* & *Friedland*, où j'ai recueilli beaucoup de pieces d'Osteocolle en divers tems, depuis 1738. jusqu'en 1741. aussi bien que dans les districts voisins de la basse Lusace, autour des Villes de *Beskow*, *Storckow* & *Lieberose*. Mais l'abondance & la variété de l'Osteocolle régnerent surtout dans les petites collines sèches & sablonneuses de la Nouvelle Marche, & principalement dans les champs, vignobles & bruyeres, qui sont autour de la Ville de *Drossen*, & de *Sonnenbourg*. C'est là où depuis 1742 jusqu'en 1747. j'ai fait mes plus importantes Observations sur la véritable génération de l'Osteocolle.

XXXVI. J'ai déjà parlé §. VIII. de la matiere de notre fossile, quand il est enseveli dans ces lits, qu'on trouve quelquefois mêlés en grand nombre au sable. Dans la dernière course que j'ai faite sur le territoire de *Drossen*, j'ai eu occasion d'examiner de nouveau de semblables lits, qui se trouvoient auprès d'une vigne abandonnée. Le terroir de la vigne, stérile & sablonneux, étoit couvert jusqu'à la profondeur d'environ un pied d'une espece de sable blanc, léger, & pur, sous lequel se trouvoient quelques lits de terre de chaux, qui alloient obliquement de haut embas à six ou huit pieds de profondeur, (étant à peu près disposés comme une certaine sorte de pierre de taille.) Chaque lit de cette terre de chaux, de l'épaisseur d'environ deux pouces, & qu'on auroit pu appeler plutôt une *lame*, ou *plaque*, de terre de chaux, étoit un peu humide & molle; la substance en étoit beaucoup plus épaisse & plus dense que celle de l'Osteocolle déjà formée dans le creux d'un arbre pourri, mais elle étoit tout aussi fragile.

XXXVII. Cependant la substance de cette lame grossiere permet le passage à travers sa partie inférieure, où elle a le plus d'humidité & de mollesse, à diverses petites racines d'arbres & d'arbrustes, tels que le Cerisier, le Cornoillier, le Coudrier, l'Eglantier &c. dont les

les ramifications capillaires se dispersent presque par toute la lame. J'ai aussi observé des morceaux de bois autour de ces lames, sans en avoir jamais remarqué un seul, qui ait souffert d'incrustation, ni de pétrification.

XXXVIII. Dans les endroits de la vigne en question, opposés à ceux-ci, & qui sont les plus élevés, on trouve sous le gazon des veines de terre de chaux, dont le mélange est confus & incertain, & au milieu desquelles se rencontrent des amas de feuilles de Coudrier, qui ne sont pas encore pourries. Ces veines se forment & s'accroissent tous les ans dans les tems de pluie, lorsque l'écoulement des eaux entraîne avec soi vers les lieux situés plus bas, la terre de chaux, avec la terre ordinaire, les feuilles, le sable & les autres ordures, plus ou moins divisées, sous la forme & l'apparence de rayons. Mais, ni ces veines, que les ignorans confondent avec l'Osteocolle, ni les lames dont nous avons parlé, ne constituent point la véritable Osteocolle, quoiqu'elles renferment une partie de terre de chaux, qui est même quelquefois la plus forte dans le sable. En effet toute terre de chaux, & figurée, n'est pas de l'Osteocolle; celle là seule doit porter ce nom, qui par le moyen de la terre de chaux a subi un changement & une concretion, qui la rendent semblable à une vraie racine d'arbre, ou celle qui a été effectivement formée dans une racine d'arbre creuse & cariée, que l'eau pourrit & remplit peu à peu de terre de chaux, de manière qu'elle renferme une partie de la substance végétale dissoute, & quelle retient les caractères naturels d'une racine d'arbre, savoir la figure, la grandeur, la situation & la proportion. Voilà la seule production qu'on puisse nommer à juste titre *Osteocolle*, & la seule qui devrait avoir le droit d'entrer dans les Apoticaïereries, pour fournir des usages dans la Médecine.

XXXIX. A la descente des mêmes lieux, vers une aunaye marécageuse, j'ai fait une petite Observation, à laquelle je ne m'attendois point du tout, & qui m'a causé une véritable admiration. Il y a dans un lieu escarpé un haut Pin d'environ soixante ans, qui étend ses branches au loin, & qui est d'une verdure éclatante. Un débordement subit d'eaux a entraîné autrefois d'autour de cet arbre une

quantité de sable, qui couvre les couches humides du terrain voisin. Cela a mis entierement à nud ses racines de devant, elles sont exposées à l'air, & par là ce bel arbre menace à toute heure ruine.

XL. Cela m'a fait naître l'envie d'examiner ses racines de derriere, qui sont, ou enfoncées dans le sable, ou couvertes de mousse. En levant la petite envelope mousseuse, il s'est offert à ma vuë un spectacle tout à fait agréable, savoir, une branche de la grosseur du bras, continuë au tronc, dont toute la substance morte étoit changée en veritable Osteocolle, la terre ligneuse & pourrie étant demeurée au centre; Cas certainement des plus rares, & qui fournit une preuve de mon hypothese au dessus de toute exception, puisqu'on y voit la pétrification d'une racine encore ensévelie de la longueur de six pieds dans le sable, & qui tient à l'arbre vivant. Je ne crois pas qu'après cela on puisse encore former le moindre doute sur la génération de l'Osteocolle.

XLI. Rien ne fait plus de peine que l'extreme fragilité de notre fossile, lorsqu'il est encore tout frais; fragilité qui ne permet pas d'en conserver aucune belle piece entiere pendant longtems, la seule action de l'air, ou le moindre mouvement, y produisant mille fentes, qui le font tomber par pieces entre les mains.

XLII. Enfin j'ai trouvé l'occasion la plus favorable de répéter toutes mes Experiences sur l'Osteocolle, & de leur donner tout le degré possible de certitude. Le lieu qui me l'a fournie, est un monticule sablonneux & desert, qui termine un petit bois de pins dans la contrée de *Sonnenbourg*.

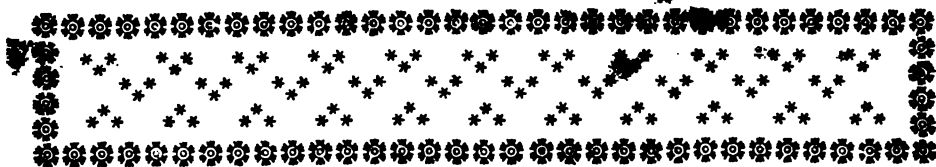
XLIII. J'y ai vu la veritable Osteocolle déjà formée en diverses manieres, dans les racines de plusieurs arbres, creusées par la pourriture. Ces racines, suivant la diversité de leur disposition, étoient plus ou moins profondément remplies; tantot des troncs entiers étoient convertis en Osteocolle, tantôt une, ou plusieurs racines, les autres n'étant pleines que de cette terre noirâtre de bois pourri, qu'on nomme en Allemand *Holz-Erde*, ou même de pur sable. Dans quelques arbres dont l'écorce étoit fenduë vers le bas, on voyoit la matiere de l'Osteocolle, en masse encore grossiere, chercher une issue vers
les

les extrémités qu'elle s'étoit rassemblée; dans d'autres, l'Osteocolle n'a-
voit pu occuper profondément les cavités, à cause de la quantité de
sable, ou de terre pourrie, qui s'y étoit déjà insinuée.

XLIV. J'ai aussi compris que plusieurs troncs étoient uniquement
remplis de terre de bois, ou de sable, parce que dans la plupart des
autres le mélange des ces matieres en parties presque égales, rendoit
l'Osteocolle très impure, & ne permettoit presque pas de la recon-
noître hors du lieu de sa formation. J'ai en effet trouvé la substance
ligneuse de quelques uns, réduite dans une poussière qui ne se dissi-
poit pas, mais qui mêlée avec l'Osteocolle, formoit une concretion
pierreuse, plus ou moins dure.

XLV. C'est ainsi qu'à force de voyages pénibles, mais agréa-
bles, je me flatte d'avoir rassemblé toutes les Observations qui servent
à expliquer l'origine, la forme, & la génération de l'Osteocolle, & à
rendre complete la véritable histoire de ce fossile.





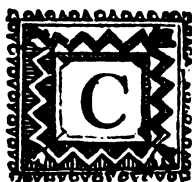
EXPERIENCES CHYMIQUES

FAITES

SUR L'OSTEOCOLLE DE LA MARCHE,

PAR M. MARGGRAF.

Traduit du Latin.



I.

Voyez le Mémoire précédent.* **CE qui m'a fourni la principale occasion de faire un examen chymique de ce mixte qu'on nomme *Osteocolle*, c'est la connoissance plus exacte que nous en a donnée M. *Gleditsch*, * & les pieces mêmes de ce fosile, qu'il a bien voulu me fournir, & qui m'ont procuré la certitude, que je travaillois sur la véritable Osteocolle, & non sur quelcune des matieres, auxquelles on a faussement donné ce nom.

II. Toutes les Experiences Chymiques que je vais rapporter, ont donc uniquement pour objet cette espece d'Osteocolle, que M. *Gleditsch* a trouvée dans les contrées de *Sonnenbourg* & de *Drossen*, entre l'*Oder* & la *Warte*: & il ne faut les entendre d'aucune autre espece.

III. Entre les diverses pieces d'Osteocolle, que j'ai reçues de M. *Gleditsch*, j'ai cru ne devoir soumettre à l'examen chymique, que celles qui étoient les plus pures, & dans lesquelles le mélange paroisoit le plus parfait. J'ai fait choix en particulier de cette branche remarquable, dont M. *Gleditsch* a parlé dans son Mémoire, † comme
XL. ayant

ayant encore fait partie d'un Pin vivant, lorsqu'elle a été convertie en Osteocolle. C'étoit un morceau épais, pas trop dur, qui représentoit exactement une Racine d'arbre, & qui contenoit par-ci par-là quelques fibres de la racine, dont il avoit été formé, mais en petit nombre, & fort minces.

IV. La principale raison, pour laquelle j'ai préféré cette piece d'Osteocolle à toutes les autres, pour en faire le sujet de mes Expériences, c'est que je l'ai trouvée moins sablonneuse, & moins mêlée de particules végétales que les autres; & aussi, parce que j'en ai pû tirer par la lotion une plus grande quantité de terre subtile que des autres.

V. J'ai donc commencé mes opérations par la lotion, ou élu-triation, de l'Osteocolle. Pour cet effet j'en ai pris une demi-livre, que j'ai d'abord bien pilée dans un mortier de verre net, je l'ai mise ensuite dans un vase de verre, dont l'orifice étoit large, j'y ai versé de l'eau claire, & j'ai bien remué le tout; après quoi la partie la plus pesante s'étant reposée au fonds, j'ai versé un instant après la liqueur encore trouble dans un autre vase. J'ai versé de nouvelle eau sur ce qui étoit resté dans le verre après la décantation, laquelle j'ai réitéré de la même maniere, continuant ce travail, jusqu'à ce que l'eau ne parût plus trouble, J'ai mis reposer l'eau trouble, & peu à peu j'ai vû une terre blanche subtile gagner le fonds. Cette terre, après avoir été desséchée, pesoit quatre onces & demie. Cela étant fait, j'ai aussi procuré l'exsiccation de la partie plus pesante, qui étoit demeurée dans le premier verre, & j'ai trouvé trois onces & demie d'un sable fin.

VI. Ayant fait la décantation & la filtration de l'eau claire, qui restoit après que la terre subtile s'étoit reposée, je l'ai évaporée jusqu'à la sécheresse, & j'en ai tiré une très petite quantité de substance salino-terrestre; qui étant délayée dans de l'eau, a causé une foible précipitation de la solution d'argent, de Mercure, & de plomb, faite dans l'acide du nitre; mais c'étoit si peu de chose, que cela ne méritoit presque point d'attention.

VII. Ayant exactement séparé de la maniere susdite, tant la terre subtile, que la terre sablonneuse plus pesante, je me suis premierement mis à l'examen de la terre subtile, & j'ai observé qu'elle entroit en effervescence avec tous les acides, par exemple, avec l'acide de sel commun, de nitre, & de vitriol, aussi bien qu'avec les acides des végétaux. L'acide vitriolique attaque cette terre subtile avec beaucoup de véhémence, en la faisant écumer. Cette même terre, jettée peu à peu dans l'esprit de vitriol, s'en imbibe presque entièrement; & lorsqu'elle en est parfaitement saoulée, forme une masse épaisse, comme de la bouillie. J'ai versé de l'eau chaude sur cette masse, je l'ai bien remuée, j'ai ensuite fait la filtration, & par une évaporation convenable, je l'ai disposée à la crySTALLISATION; ce qui étant fait, cela m'a donné de petits cristaux oblongs, mais en très petit nombre. L'acide vitriolique paroît avoir ici les mêmes relations avec notre sujet, qu'il a avec la pierre de chaux, à la partie terrestre de laquelle il s'attache principalement; & c'est par la même raison qu'on ne peut séparer de ce sujet que très peu de particules salines.

VIII. Au contraire, l'acide du nitre s'empare de notre terre avec une plus grande véhémence, & la dissout entièrement, à la réserve d'une fort petite quantité, qui tombe au fonds du vase, & qui n'est autre chose que la partie la plus subtile de cette terre sablonneuse, qui s'y étoit mêlée pendant l'elutriation. Quand l'acide du nitre a été parfaitement saoulé de cette terre, il en résulte une solution, qui a une parfaite ressemblance avec la solution de la pierre de chaux par l'esprit de nitre. L'ayant filtrée, je lui ai procuré la consistance convenable par l'exhalation, mais il ne s'est point voulu former en cristaux. C'est ce qui m'a engagé à dessécher cette solution par l'évaporation; ce qui étant fait, j'ai observé que cette masse desséchée, lorsqu'on l'expose à l'air, attire facilement l'humidité, & se fond en une liqueur brunâtre. J'ai aussi mis une portion de cette solution desséchée dans un petit creuset, je l'ai exposée au feu, cette masse s'est mise à écumer, & l'esprit de nitre s'est envolé copieusement par voye d'exhalation. Enfin, tout l'esprit de nitre étant presque évaporé, j'ai gouverné le feu de la même maniere, dont les Chymistes

mises ont accoutumé de le faire dans la préparation du Phosphore de *Balduinus*, & par cette voye j'ai moi-même produit un Phosphore, aussi beau que celui qu'on prépare ordinairement, en employant la craye & l'esprit de nitre. En traitant de même la pierre de chaux avec l'esprit de nitre, j'ai eu un semblable produit, c'est à dire, un beau Phosphore. Les experiences que renferme cette opération, font donc voir la convenance de la terre de chaux avec la terre de craye.

IX. Notre terre subtile d'Osteocolle est aussi saisie assez rapidement par l'acide du sel commun, & se dissout entièrement, de la même façon que nous avons déjà indiquée, en parlant de l'esprit de nitre; à cause de quelques particules sablonneuses, qui se sont mêlées avec cette terre subtile dans l'elutriation. Ici aussi, pendant la solution, il tombe quelque chose au fonds, quoiqu'en très petite quantité. Quand l'acide du sel est parfaitement saoulé de cette terre, & qu'ensuite on filtre cette solution, & qu'on la fait évaporer jusqu'à la sècheresse, parce qu'elle se refuse à la crySTALLISATION; les mêmes relations se manifestent, que lorsqu'on dissout la pierre de chaux dans cet acide, & que l'on continuë le même procédé. En effet cette solution desséchée se fond à l'air au bout de quelque tems, & il lui arrive d'ailleurs précisément la même chose, qu'au sel armoniac fixe, ou à toute autre solution faite avec la chaux vive & l'acide de sel, & puis desséchée.

X. J'ai ensuite ajouté du sel armoniac à cette terre subtile d'Osteocolle, savoir, deux parties de terre avec une de sel armoniac dépuré, je les ai mêlées exactement par voye de trituration; mais de ce mélange, non plus que d'un semblable fait de pierre de chaux cruë, & de sel armoniac, je n'ai pu dégager rien d'urineux; car mon mixte ne rendoit aucune odeur. Mais, lorsqu'en l'approchant du feu il a commencé à s'y embraser, non seulement l'urineux s'est envolé en abondance, mais même ce qui est resté dans le creuset a formé un mixte salin vrai & parfait, qui étoit un sel armoniac fixe, pareil à celui que produisent ordinairement la pierre de chaux, ou la chaux vive, avec le sel armoniac.

XI. Je n'ai pas cru devoir oublier non plus d'examiner, si cette terre d'Osteocolle, traitée dûment, pourroit produire de la chaux vive? Pour cet effet j'en ai pris environ une once que j'ai exactement calcinée, pendant l'espace d'une heure, dans un creuset fermé; & après le refroidissement, j'ai remarqué qu'elle possédoit parfaitement toutes les qualités & les propriétés de la pierre de chaux calcinée. En effet cette terre d'Osteocolle, traitée de la manière précédente, quand on la pile ensuite au mortier avec le sel armoniac, dégage aussitôt, comme la chaux vive, la partie urineuse; ou si l'on jette cette terre calcinée dans l'eau froide, elle s'échauffe, & après cette incandescence, l'eau qui surnage, montre toutes les propriétés de l'eau de chaux vive; car elle précipite la solution de Mercure sublimé, en donnant à ce précipité une couleur d'un jaune clair; elle précipite de même la solution de Mercure faite dans l'eau forte, en lui donnant une couleur brunâtre; elle trouble les solutions d'Argent, de Cuivre, de Plomb, de Fer, de Zinc & de Bismuth, faites dans l'acide du nitre, aussi bien que la solution d'Etain dans l'eau régale; enfin elle donne une belle couleur verte à une eau bleue extraite des Violettes.

XII. Cette terre toujours traitée de la même manière, comme la chaux vive, rend caustique le sel alcali fixe, & en le cuisant, le rend aussi acre, que pourroit faire la chaux vive elle même. Elle dissout aussi fort volontiers le soufre commun: car, en mêlant quatre parties de cette terre calcinée, avec une partie de soufre, & y ajoutant environ six ou huit parties d'eau, le soufre se dissout fort bien dans la coction, & ensuite se précipite aisément de la lessive filtrée, en y ajoutant des acides. Ainsi, dans toute cette opération, la conformité entre la terre d'Osteocolle & la chaux vive se manifeste de la manière la plus évidente.

XIII. Enfin, j'ai aussi mêlé deux parties de sel alcali fixe avec une partie de cette terre, & les ayant mis en fusion, j'en ai tiré une masse opaque, d'une couleur blanchâtre, qui est parfaitement semblable à la masse que produisent deux parties de sel alcali fixe, mises en fusion avec une partie de chaux vive.

XIV. Par

XIX. Par rapport à l'autre partie terrestre, que j'ai indiquée §. V. & que l'elutriation sépare de l'Osteocolle, en la faisant tomber au fonds, comme la partie la plus pesante; ce n'est autre chose qu'un sable fin, & par conséquent une vraie & belle terre vitrifiable. En effet, quoique cette partie de l'Osteocolle entre encore dans une effervescence assez forte avec les acides, cela ne vient que de l'union des acides avec un petit nombre de particules de chaux, qui demeurent adhérentes à cette terre, & qui n'ont pas pu souffrir une exacte séparation. J'ai versé sur une portion de cette terre de l'Esprit de nitre, qui a pris encore à la vérité avec elle une forte effervescence, mais qui a laissé, sans y toucher, la terre sablonneuse la plus pure, parce qu'en effet cette terre, après la lotion & l'exsiccation, ne présente autre chose qu'un sable subtil très pur. J'ai bien mêlé dans le mortier une partie de cette terre sablonneuse, desséchée avec partie égale de sel alcali fixe, & je les ai mises en fusion, en y employant le plus violent degré de feu; ce qui a produit un beau verre jaune, couleur qui lui vient peut-être du petit nombre de particules de fer, qui s'y trouvent encore mêlées. Cette opération montre donc clairement que la terre d'Osteocolle dont il s'agit ici, appartient à l'espèce des cailloux, ou du sable, & que par conséquent c'est une terre vitrifiable.

XV. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici, met donc en évidence, que les parties qui constituent proprement l'Osteocolle, sont la terre de chaux, & la terre sablonneuse. Je passe à présent aux relations qu'on découvre dans l'Osteocolle même crüe, en l'exposant à un feu découvert dans des vaisseaux fermés. J'ai mis pour cet effet huit onces d'Osteocolle crüe dans une retorte de terre, & y ayant adapté le récipient, & luté exactement toutes les jointures, j'ai donné un degré violent de feu, poussé jusqu'à l'incandescence. Ensuite, après le refroidissement, j'ai trouvé dans le récipient environ deux dragmes de liqueur, qui

1. exhaloit une odeur urineuse, & en même tems empyreumatique, pareille à celle d'un foible esprit de corne de cerf rectifié;

2. teignoit en verd le syrop de violettes, comme le fait l'alcali volatil;

3. entroit dans une effervescence sensible avec les acides;

4. n'en recevoit absolument aucune avec l'alcali fixe dissous, (quoique M. *Neumann* ait affirmé le contraire,) mais jettoit plutôt quelquefois une odeur urineuse plus forte;

5. précipitoit les solutions des métaux faites dans les acides, par exemple, la solution d'argent, de Mercure & de cuivre, en donnant à cette dernière une belle couleur d'azur, comme le font ordinairement tous les esprits urinaires purs.

Pour renfermer plusieurs choses en peu de mots, cette liqueur possède toutes les qualités & propriétés de l'esprit urinaire. À l'égard de cette huile empyreumatique, semblable à la Pétrole, que M. *Neumann* assure y avoir observé, il ne s'en est pas montré une seule goutte à mes yeux, quoique j'aye réitéré ce travail plus d'une fois. La terre aussi, que j'ai tirée de la retorte, après que la distillation a été finie, a toutes les qualités & tous les caractères de la chaux vive, quoi-

V. Neum. Præloß. 1795. que le même M. *Neumann* * soutienne le contraire. Au reste, il faut encore remarquer ici, que cet esprit urinaire d'Osteocolle dont nous avons parlé, tire sans doute son origine des particules de végétaux pourries, qui se trouvent mêlées à l'Osteocolle.

XVI. L'Auteur que je viens de nommer, affirme aussi, qu'ayant versé de l'huile de vitriol sur de l'Osteocolle qu'il avoit mise dans une retorte à tuyau, il en avoit tiré, par la distillation de l'esprit de sel. Pour vérifier cette assertion, j'ai aussi mis quatre onces d'Osteocolle crüe pulvérisée dans une retorte à tuyau, & y ayant adapté le récipient, j'ai échauffé cette retorte, posée sur une coupelle remplie de sable, en mettant du feu dessous; ensuite j'y ai versé à diverses reprises une once d'huile de vitriol, tenant le tuyau toujours soigneusement fermé, & à la fin j'ai donné un degré véhément de feu; ce qui étant fait, j'ai bien trouvé une espèce de liquide dans le récipient, mais qui ne donnoit pas le moindre indice qu'il contint de l'acide.

Au contraire

1. il étoit insipide, ou tout au plus, il avoit une petite saveur de brûlé;

2. il ne précipitoit les solutions d'aucuns métaux;

3. il

3. il n'entroit en effervescence avec aucun sel alcali, &
4. n'apportoit point de changement à la couleur du Syrop de violettes.

Pour abrégé, c'étoit un pur mixte aqueux. Mais, comme ce n'est pas M. Neumann lui-même, qui a donné au public cet examen de l'Osteocolle, il se peut que l'Editeur de ses *Leçons Chymico-pharmaceutiques*, M. Zimmermann, ait rencontré une Copie peu exacte, & qu'ainsi il ne faille pas rejeter cette erreur sur M. Neumann.

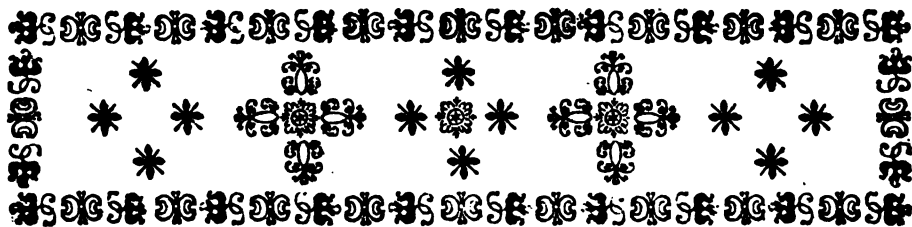
XVII. Toutes les Experiences Chymiques, qui viennent d'être rapportées, & qui ont eu pour objet l'Osteocolle, & les produits qui en résultent, font voir clairement que c'est un mixte terrestre composé

*de pierre de chaux,
de sable fin, &
de particules des vegetaux pourries.*

Les §§. VII- XII. établissent l'existence de la pierre de chaux. Celle du sable fin est prouvée au §. XIV.

Et pour ce qui regarde la troisième sorte de parties, ce sont ces particules des vegetaux, copieusement mêlées à l'Osteocolle, qui, tant à cause de leur putréfaction, que de diverses parties animales des insectes, qui s'y trouvent con. enuës, & qui s'attachent ordinairement en quantité au bois pourri; ce sont, dis-je, ces parties, dont conformément au §. XV. on tire avec facilité l'esprit urinaire par la voye de la distillation,





CONJECTURE
SUR L'USAGE DES CORPS DIAPHANES
DE MICHELIUS
DANS LES CHAMPIGNONS 'A LAMES,
PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.



N'examinant les especes d'Agaric, & la maniere dont elles fructifient, on trouve trois choses principales dans les petites lames des Champignons, qui sont tout à fait dignes d'un examen attentif. Ces petites lames, dont il est question, se trouvent rassemblées au revers du *pileole*, & il y en a de deux sortes. Les unes sont tout à fait entières, & s'étendent du centre, où le *periole* est planté, jusqu'à la circonference; les autres, plus petites & plus étroites, sont comme entremêlées parmi les premières, & commençant tantôt à la circonference, tantôt au centre, elles s'arrêtent vers le milieu.

Ces petites lames sont les vrais réservoirs de la génération : car de l'extrémité de leur bord pendent les vraies étamines avec leurs *capsules*, & leurs poussieres; & les deux surfaces de chaque lame sont abon-

abondamment garnies de semences, & couvertes d'eminences papillaires diaphanes.

La premiere des choses remarquables, dont je veux parler, ce sont donc ces *organes mâles*, ces étamines mêmes, qui dans une seule & même plante sont si éloignés des *organes femelles*. La seconde chose remarquable, ce sont ces semences dispersées sur la partie plane de chaque lame, qui sont fort éloignées des étamines, & qu'on ne peut distinguer les unes des autres qu'à l'aide du Microscope. Enfin, la troisieme chose qui excite l'attention, ce sont certains corps que *Michelius* a nommé *diaphanes*, lesquels se trouvent aussi en abondance, étant distincts des étamines, & placés alternativement entre les semences.

C'est une chose surprenante que les organes mâles s'étant déjà montrés à l'oeil armé du Microscope, les organes femelles, à cause de leur extreme petitesse, aient échappé jusqu'ici à toute l'industrie des Physiciens, & s'y refusent encore actuellement; puisqu'à l'exception des semences, on n'a pû encore y découvrir aucune autre partie. Néanmoins la chute de la poussiere qui tombe des capsules au dedans des corps diaphanes, met hors de tout doute que les organes femelles doivent être cachés dans la substance de chaque lame, & leurs petites embouchures servent apparemment à recevoir les molecules infiniment subtiles de la poussiere feminine, ou du moins elles admettent cette espece de vapeur génitale, qui y est contenuë sous l'apparence d'un souffle très léger.

Ce n'est donc point une conjecture à rejeter, que celle qui suppose de *petits pores des organes femelles, ouverts au dedans des corps diaphanes, qui sont à la surface des lames*: puisque, non seulement la poussiere feminine parvient effectivement à ces petits espaces, qui entrecourent les corps diaphanes, mais encore qu'on apperçoit peu après des semences parfaites dans ces endroits. La maniere dont les *Agarics* fructifient est donc fort curieuse, & ressemble beaucoup à celle qui a lieu dans les plantes plus parfaites, dans lesquelles les organes mâles & femelles existent séparément, quoique dans la même plante (*Monoïca*.)

On auroit tort de prendre les Corps mêmes diaphanes de *Michelius* pour les organes femelles, surtout puisqu'ils se présentent d'abord & dès le commencement sous la même figure, & de la même grosseur, qu'ils conservent d'une manière immuable presque jusqu'à l'entière destruction du Champignon; ce qui, suivant les loix de la génération, arrive & doit arriver tout autrement dans les organes femelles des végétaux.

Voici la description que le savant *Michelius* donne de ses Corps diaphanes. „ Il y a de plus, dit-il, * dans quelques especes de „ Champignons, & surtout dans ceux qui naissent du fumier des „ chevaux, des bœufs, & de semblables animaux, une chose qui „ nous a paru bien digne d'être observée, c'est que la surface de leurs „ lames est non seulement, Tab. 23. fig. 1. garnie de semences, mais „ qu'on y découvre aussi certains *corps diaphanes*, dont dans quelques especes la figure est conique *k*, & dans d'autres pyramidale *l*. „ Ces corps, par un sage arrangement de la Nature, empêchent „ qu'une des lames ne touche l'autre, afin que les semences qui sont „ entre ces lames, ne viennent point à se gâter, ou à tomber, avant „ qu'il en soit tems; & ces corps eux-mêmes tombent, quand la „ semence est mure, ou qu'elle s'est détachée. ”

Je vais ajouter à cette description certaines particularités, qui d'un côté mettront dans un plus grand jour l'usage de ces Corps, & de l'autre rectifieront à quelques égards l'opinion de ce célèbre Botaniste. En effet je me suis assuré, tant par un examen réitéré des fleurs plus parfaites, que par la contemplation des Champignons mêmes; que ces *corps diaphanes* ont un usage beaucoup plus important & plus décidé dans les Champignons à lames.

D'abord, pour ce qui regarde les especes de Champignons, l'Auteur n'en a point entendu d'autres que celles à lame, lesquelles dans ma *Méthode des Champignons* j'ai toutes rapportées à l'Agaric, en me fondant sur leur caractère naturel. Mais je ne suis pas du même avis que *Michelius* en ce qu'il ajoute, que ce Corps diaphane n'existent que dans certains Champignons, & principalement, dans ceux qui naissent du fumier des animaux. Car dans l'Été & dans l'Au-

l'Automne, j'ai découvert avec le Microscope ces mêmes corps dans d'autres especes de Champignons, qui croissent à l'ombre, & se plaisent dans des lieux humides, & non exposés à l'air.

Mais pour les autres especes d'Agarics, dont les lames sont plus dures, plus sèches, cartilagineuses, & presque immarcescibles, je n'y ai point encore trouvé de *corps diaphanes papillaires*, quoique je sois persuadé qu'ils se trouvent, & peuvent naturellement se trouver de même dans la plupart, bien qu'ils ne s'y offrent pas aux sens avec la même facilité que dans les précédens. Le raisonnement, l'usage, la nécessité même, dictent que cela doit être ainsi.

Ces *Corpuscules*, que le Microscope seul découvre, comme je l'ai déjà dit plus haut, sont des *éminences papillaires* de diverses grandeurs, dont les plus petites sont mêlées en très copieuse quantité aux plus grandes sur toute la surface de la lame.

Dans les diverses especes la figure de ces *Corpuscules* differe, étant tantot obtuse & conique, tantot pyramidale & anguleuse; & les petits espaces entremêlés parmi ces éminences sont dans le tems de la fleur tout remplis de la poussiere seminale, ou peu après, des semences elles-mêmes, rangées quelquefois quatre à quatre, quelquefois sans aucun ordre.

A l'égard de la situation de ces *Corpuscules* dans les petites lames des Agarics, elle est toujours horizontale à l'égard de chaque lame, & pour l'ordinaire, on les remarque plus aisément d'un des côtés que de l'autre.

C'est avec beaucoup de raison que *Michelius* a nommé ces Corps *diaphanes*, car ils sont en effet d'une texture très mince, & transparents, comme certaine croute cristalline, qu'on appelle en Allemand, *eine Druse*, ou comme ces croutes salines, qui dans les carrieres metalliques souterraines, occupent, ou même forment quelquefois de petites cavernes entieres.

Le même Botaniste attribué un double usage à ces corpuscules, & infere de leur situation, qu'ils ont été principalement donnés aux Champignons; premièrement, afin d'empêcher l'affaîssement des lames,

mes, chargées de semences, ou la compression de ces semences; & ensuite, afin que les semences ne tombent pas avant leur maturité.

Je souscrirois à ces idées, si un examen réitéré des Champignons ne m'en avoit fourni d'autres. J'ai observé que ces Corpuscules diaphanes, entremêlés de toutes parts parmi les petites lames, naissoient vers le tems de la fructification, & qu'ayant une petite roideur, ils aidoient par leur développement succesif, les petites lames, auparavant tout à fait fermées & bouchées, à se dilater peu à peu, à s'éloigner les unes des autres, & à ouvrir leurs cavités pour laisser entrer l'air, & recevoir la poussiere seminale. Ensuite, quand le tems de la fleur est passé, tout le champignon se développe, & les petites lames, couvertes auparavant de la poussiere seminale, sont alors tout enflées de la semence, qui prend des accroissémens insensibles, & elles s'éloignent l'une de l'autre, de maniere qu'elles n'ont plus besoin de ces corps. A quoi il faut ajouter que ces Corps diaphanes de *Michelius*, alors extrêmement tendres & petits, ne touchent point les lames opposées, & n'ont pas la force de les séparer l'une d'avec l'autre.

Il y a de plus quelques Champignons, auxquels la nature ne paroît point avoir donné les Corps diaphanes pour empêcher la chute prématurée des semences, puisque ces semences, lorsqu'elles sont fécondes, & n'ont aucune maladie, sont si fortement emboîtées dans leur étui, qu'elles n'en tombent jamais, à moins que la morsure des insectes, ou quelque autre attaque extérieure, ne les en tirent.

Or les lames étant dans les Agarics les vrais réservoirs de la fructification, sur la partie plane desquels tombe non seulement la semence mâle, mais où cette semence s'arrête dans des organes particuliers, après quoi s'ensuit la perfection de la semence fécondée; il est manifeste que ces corps diaphanes de *Michelius*, environnés d'organes femelles, dont ils sont par conséquent très proches, & demeurant dans cette situation, depuis que les parties qui servent à la fructification, commencent à se développer, jusqu'à la perfection de la semence, doivent être destinés à un usage beaucoup plus important. Et en effet les circonstances qu'on observe, confirment que ces corps diaphanes ont été accordés à quel-

à quelques especes de Champignons en faveur de la poussiere *seminale*.

Ce sont des organes secondaires, qui dans l'un & dans l'autre sexe des plantes, aident beaucoup à faire fleurir ; il y a plusieurs fleurs plus parfaites, dans lesquelles ils se rencontrent, tant dans les pistilles, ou organes feminins, que dans les capsules, ou organes masculins. Ils s'y présentent sous toutes sortes de figures ; arrondis, anguleux, droits, d'une seule piece, avec des branches, roides, velûs, étendus, avec des feuilles, ou des tuyaux, dans un état de contraction, réfléchis, crochus, inclinés d'un coté ou de l'autre, ou se portant de tous les cotés à la fois, &c.

Dans le pistille ils occupent pour l'ordinaire cet organe particulier, sur lequel se fait suivant les voyes de la nature la chute de la semence. Un exemple peut suffire pour tous, c'est celui de ce qui arrive à l'ouverture du stigmate, dans la fleur de melon, & de Lis blanc.

Dans le Lis blanc ce stigmate, qui est assez grand & triangulaire, se montre, pour ainsi dire, tout herissé de corps diaphanes assez considerables, qui ont leur direction en tout sens, & qui environnent aussi l'orifice superieur de sa cavité cylindrique. Ces corps reçoivent avec abondance dans leurs interstices la poussiere *feminale* qui est secouée par l'elasticité des fibres, & il n'est pas rare qu'ils la retiennent jusqu'à la chute du pistille entier.

Ajoutez que ce qui facilite merveilleusement toute cette opération, c'est la figure même de la poussiere *feminale*, qui est celle d'un globe oblong, ou sphérique, & dont la surface est pour l'ordinaire toute herissée de pointes.

Il est vrai que les fruits de la plante avortent quelquefois, mais j'ai pourtant acquis dans le cours de cet Eté une pleine certitude de l'entrée de la semence mâle par le stigmate dans la cavité du *style*. Pour cet effet j'ai examiné tous les mois les pistilles de plusieurs Lis, & j'ai quelquefois vû la chute de la poussiere sur l'ouverture du pistille blanc. Il en étoit presque tout couvert, & une partie de cette poussiere, qui étoit adhérente à la superficie des eminences papillaires diaphanes, se dispoit pour l'ordinaire au bout de trois ou quatre

jours, excepté seulement la partie du stigmate, où la poussière s'étoit insinuée plus profondément dans les interstices des corpuscules diaphanes.

Un seul de ces petits corpuscules, attrapant la cavité du *style*, descend plus bas que le milieu, vers le sein de l'ovaire. Sa figure s'y change tellement qu'il semble détruit, & l'ovaire de son côté acquiert une autre forme en se gonflant.

J'ai encore trouvé cette année une autre espèce de Corps diaphanes, qui est plus épaisse, & arrondie vers le bas, au lieu qu'elle est pointuë vers le haut. C'est dans la capsule du melon que je l'ai observée, au moment même où s'exécutoit l'acte de la profusion féminale.

La capsule est formée par un corps cylindrique & droit, qui est comme couvert par une ligne qui fait divers tours de haut embas, & de bas en haut, & qui est chargée de farine. Les corpuscules diaphanes, tantot en plus grande, tantot en moindre quantité, s'elevent comme des coins hors des cavités de cette ligne farineuse, & en perçant les bords des lames de cette ligne, ils les irritent peu à peu, les piquent, & les disposent à une rupture subite. C'est ce qui produit la dispersion rapide de la semence, parce que les bords des lames, picotés par les eminences papillaires, éclatent avec un certain degré d'élasticité.

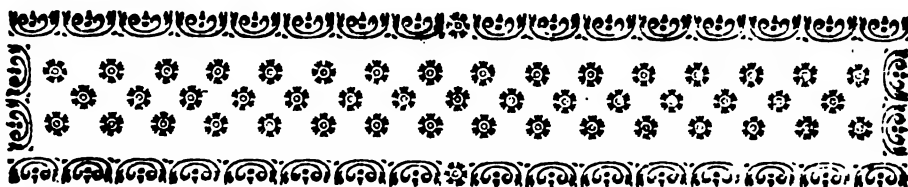
Mes Observations se bornent ici, & je n'ai garde de rien affirmer au delà de ce que j'ai vu. C'est la ressemblance des corps diaphanes de *Michelius*, dans les *Agarics* de *Linnaeus*, avec les autres eminences papillaires, qui naissent dans les capsules & dans les pistilles des fleurs plus parfaites; c'est, dis-je, cette ressemblance qui m'a principalement conduit aux conjectures que je viens de proposer.



MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

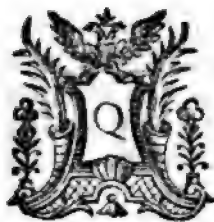
CLASSE DE MATHEMA-
TIQUE.





SUR LA VIBRATION
DES CORDES,
PAR M. EULER.

Traduit du Latin.



I.

Uoique tout ce que Mrs. *Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à présent au sujet du mouvement vibratoire des cordes, semble avoir épuisé la matiere, il y reste néanmoins une double limitation, qui la restreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puisse déterminer le veritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont supposé que les cordes tenduës faisoient seulement des vibrations quasi infiniment petites, en sorte que dans ce mouvement, la corde, soit qu'elle ait une situation droite, ou courbe, peut pourtant être censée conserver toujours la même longueur. L'autre limitation consiste, en ce qu'ils ont supposé toutes les vibrations régulières, prétendant que dans chaque vibration la corde entière, & tout à la fois, s'étend directement, & cherchant hors de cette situation sa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini.

II. A' la verité la premiere limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la

corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur-sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mécanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies. A l'égard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulières, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'écartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un très court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée.

III. Il est effectivement prouvé d'une manière suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette règle, toutes les suivantes doivent l'observer aussi. On voit en même tems par là, comment l'état des vibrations suivantes dépend des précédentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'état des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont précédé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulières, il ne sera en aucune manière possible que les précédentes se soient écartées de la règle; d'où résulte aussi évidemment, que si la première vibration a été irrégulière, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

IV. De là naît donc la Question suivante, dans laquelle toute cette recherche est comprise.

Si une corde d'une longueur, & d'une masse donnée, est tendue par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne diffère cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lache tout à coup; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée,

M. d'A-

M, d'Alembert s'est attaché le premier, avec un succès des plus heureux, à l'examen de ce Problème, si difficile tant dans la Mécanique que dans l'Analyse, & il en a communiqué à notre Académie une très belle solution. Mais, comme dans ces discussions sublimes on tire souvent un fruit fort considérable de la comparaison de plusieurs solutions différentes du même problème, je ne balance point à proposer celle que j'ai trouvée sur cette question. Quoiqu'elle ne diffère pas beaucoup de celle de M. d'Alembert; cependant la grande étendue de ce sujet fait que je me persuade d'avoir ajouté quelques observations assez intéressantes dans l'application des formules générales.

V. Je commencerai donc par proposer le Problème d'une façon bien nette, afin qu'il paroisse quels secours on a besoin de tirer, tant de l'Analyse que de la Mécanique, pour arriver à la solution. Soit donc la corde proposée A B, fixement attachée à ses extrémités A & B, & tendue suivant la direction A F par une force quelconque, comme cela se fait ordinairement dans les Instrumens de Musique. Que cette corde soit partout d'une égale épaisseur, & qu'on appelle

sa longueur A B = l

sa masse, ou son poids = M

& que la force tendante A F soit égale à un poids = F.

Qu'alors on fasse passer cette corde de son état naturel A B à un état de courbure quelconque A L / B, qui pourtant ne différera qu'infinitement peu de l'état naturel droit A B, de manière que la longueur A L / B ne surpasse pas sensiblement la longueur A B; & que cette figure A L / B donnée d'abord à la corde, soit connue. On demande, en supposant que la corde soit lâchée subitement de cet état, quel mouvement elle aquerra, & quelles seront les vibrations qu'elle fera?

VI. Aussi-tôt donc que la corde sera lâchée de son état A L / B, la force tendante la pressera d'abord vers la situation naturelle A B, que tous ses points atteindront, ou à la fois, ou en divers momens: par conséquent, la corde changera continuellement de figure, & tous ses points participeront au mouvement vibratoire, jusqu'à ce que la

résistan-

Fig. 2.

résistance ait calmé toute l'agitation. Or pour connoître parfaitement en quoi consiste ce mouvement, il suffira d'avoir assigné pour chaque tems l'état de la corde, c'est à dire, sa figure. Car, tandis que d'un côté on définit le changement de figure par la succession instantanée, on détermine en même tems de l'autre la vitesse de chaque point de la corde, & ainsi on parvient à la connoissance de tout le mouvement. Il ne sera donc pas besoin dans cette recherche de faire attention aux vitesses de chacun des points de la corde; ce qui diminue considérablement la difficulté de cette solution.

VII. Puisque nous avons supposé, que la longueur de la corde ne souffre aucun changement, tandis qu'elle revêt successivement toutes ces figures, en sorte que $AL/B = AB$, il en résulte qu'en menant les appliquées quelconques PL, pl , normales à l'axe AB , les arcs AL, Al seront égaux aux abscisses AP, Ap ; & par conséquent les appliquées PL, pl , seront comme infiniment petites à l'égard des abscisses. Par conséquent, si l'on appelle l'abscisse $AP = x$, l'appliquée PL sera infiniment petite en comparaison de x , & l'arc même AL sera $= x$; d'où l'on aura $Pp = Ll = dx$. Cela fait comprendre, que lorsque la corde reçoit diverses figures successives, chacun de ses points L se meut perpétuellement selon la direction de l'appliquée LP , en sorte que chaque appliquée LP représente le chemin, par lequel le point L de la corde s'approche de l'état naturel AB : mais alors, à cause du mouvement reçu, suivant la même direction normale à AB , il tendra du côté opposé.

VIII. Après avoir fait ces remarques, posons qu'au bout du tems t la corde soit arrivée à la situation $AMmB$, ayant quitté sa situation primitive AL/B , de sorte que le point L soit parvenu en M . En supposant donc l'abscisse quelconque $AP = x$, qui exprime en même tems la longueur de l'arc AM , soit l'appliquée dans cette courbe AMB répondante à $PM = y$; & parce que cette courbe AMB dépend du tems écoulé $= t$, y sera une fonction des deux variables x & t ; en sorte qu'en posant $t = 0$, la valeur de y fournisse l'appliquée de la courbe primitive ALB . Or il est clair que si l'on connoît la nature de cette fonction de x & t , qui exprime la quantité de l'appliquée y , on

y, on peut par son moyen assigner la figure même de la corde pour un tems quelconque t ; & de plus on conclura aisément de la mutabilité le mouvement de toute la corde.

IX. Ainsi y étant une fonction de x & t , son différentiel aura une forme telle, $dy = p dx + q dt$; laquelle formule comprend non seulement la variabilité de y par la courbe A-M-B, mais encore eu égard au tems qui s'écoule. En effet, si le tems t est établi constant, ou $dt = 0$, l'équation $dy = p dx$ exprimera la nature de la courbe A-M-B; mais si l'abscisse x est supposée constante, ou $dx = 0$, l'équation $dy = q dt$ définira le mouvement du point L pour tout le tems que le mouvement de la corde dure, parce que par elle on peut assigner pour un tems quelconque t écoulé depuis le commencement, le lieu M, auquel le point L sera parvenu. Or p & q seront de nouveau des fonctions de x & t , dont les différentiels, en posant t & x l'une & l'autre variable, soient,

$$dp = r dx + s dt \text{ \& } dq = s dx + u dt.$$

Car il est constant par la nature des différentiels, que l'élément dt en dp , & l'élément dx en dq , doivent avoir un coefficient commun.

X. Comme il s'agit présentement de déterminer le mouvement de la corde par les forces sollicitantes, soit la force acceleratrice, par laquelle le point M de la corde est accéléré vers l'axe A-B = P, & il est clair que toutes ces forces, par lesquelles chacun des élémens de la corde est pressé vers l'axe A-B. prises ensemble doivent être équivalentes à la force, par laquelle la corde est actuellement tendue, & que nous avons posée A-F = F; ou bien, si nous concevons des forces contraires & égales à P, appliquées suivant M-L dans chacun des points M de la corde, alors elles devront se trouver en équilibre avec la force qui tend la corde A-F = F, & par cette propriété on pourra déterminer la véritable force acceleratrice P, par laquelle chaque élément M-m de la corde est actuellement sollicité.

XI. La masse, ou le poids de toute la corde étant = M, & se distribuant également par toute la longueur A-B, le poids de la portion A-P, ou A-M, sera = $\frac{Mx}{a}$, & par conséquent le petit poids de

l'élément $Mm = dx$ sera $= \frac{M dx}{a}$; lequel étant sollicité suivant ML par la force accélératrice $= P$, la force motrice de cet élément sera $= \frac{M dx}{a} P$, & la somme de toutes les forces motrices par l'arc AM sera $= \frac{M}{a} \int P dx$. Mais parce que le point A est supposé fixe, il est permis de concevoir une certaine force $AG = G$, qui lui soit appliquée dans la direction AG normale à AB , & assez grande, pour que le point A soit conservé en repos. Ces choses étant posées, la théorie de l'équilibre des forces appliquées à un fil parfaitement flexible, fournira l'équation suivante:

$$Fy - Gx + \frac{M}{a} \int dx \int P dx = 0$$

ou Fy & Gx sont les momens des forces F & G à l'égard du point M , & $\frac{M}{a} \int dx \int P dx$ est la somme de tous les momens des forces élémentaires à l'égard du même point M .

XII. Que l'on considère à présent la courbe AMB , que la corde forme dans ce moment, dont la nature sera exprimée par les formules données ci-dessus, si le temps t est pris constant, ou $dt = 0$, & par conséquent on aura $dy = p dx$, & $dp = r dx$. Par là l'équation que l'état d'équilibre a fait trouver, étant différenciée, & en posant $p dx$, au lieu de dy , donnera divisée par dx

$$Fp - G + \frac{M}{a} \int P dx = 0.$$

Qu'on différencie de nouveau cette équation, en posant $r dx$ pour dp , & en divisant par dx , on obtiendra $Fr + \frac{M}{a} P = 0$; d'où l'on tire la force accélératrice P du point M suivant la direction MP ,

MP, savoir $P = -\frac{Far}{M}$. C'est pourquoi si la courbe AMB étoit connue, on pourroit déterminer par sa nature la force accélératrice de chacun des élémens.

XIII. Considérons à présent le mouvement du seul point M, par lequel il s'approche de P, étant sollicité par la force accélératrice P, & l'abscisse AP $= x$ doit être censée invariable. Or comme à cause de $dx = 0$, il y a l'increment momentané de l'appliquée PM, $dy = qdt$ & $dq = udt$, dans le petit tems dt le point M s'approche de P par le petit espace $= -qdt$, dont le différentiel en posant l'element du tems dt , constant, sera $= -dqdt = -udt^2 = -ddy$. Mais, de l'accélération qui naît de la force P par les principes mecaniques on déduit cette équation $P = -\frac{2ddy}{dt^2} = -2u$.

si l'on expose, comme c'est la coutume l'élément du tems dt par l'élément de l'espace appliqué à la vitesse, & que la vitesse elle même soit représentée par la racine quarrée de la hauteur due à cette vitesse.

Ainsi, puisque nous avons trouvé $P = -\frac{Far}{M}$ aussi bien que $P = -2u$, il en résultera $2u = \frac{Far}{M}$ ou $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. Ces deux conditions, que nous avons rappelées au calcul, renferment toute la Question proposée; & par conséquent, si un tems quelconque t étant écoulé, on pose pour un point quelconque M de la corde l'abscisse AP $= x$, & l'appliquée PM $= y$, celle-ci s'exprimera par une fonction de x & t , telle qu'en posant $dy = pdx + qdt$, le caractère des fonctions p & q se tirera de ces formules

$$dp = rdx + sdt, \text{ \& } dq = sdx + \frac{Far}{2M} rdt.$$

La question mecanique proposée se réduit donc à ce problème analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t , telles que

des formules différentielles $r dx + s dt$, & $s dx + \frac{2M}{Fa} r dt$, deviennent intégrables. Car de semblables fonctions étant trouvées pour r & s , on pourra assigner les valeurs $p = f(r dx + s dt)$ & $q = f(s dx + \frac{Fa}{2M} r dt)$, d'où l'on inférera ensuite la valeur de l'appliquée même $y = \int (p dx + q dt)$.

XV. Ce Problème analytique considéré en soi est extrêmement indéterminé; ainsi, pour l'accommoder à quelque cas qui se présenteroit, il faut faire les remarques suivantes. Premièrement dans les intégrations, il faut régler les constantes de manière qu'en posant $x = 0$, quelle que soit la valeur qu'on attribue à t , on ait toujours $y = 0$. Ensuite, on doit en faire autant dans le cas de $x = a$. Troisièmement, ces précautions étant prises, d'entre les fonctions infinies r & s , qui satisfont aux conditions ci-dessus exprimées; on doit pour chaque cas proposé choisir celles, qui en posant $t = 0$, font que la valeur de l'appliquée y qui en résulte, fournit cette courbure arbitraire, que l'on avoit donnée à la corde au commencement du mouvement. Cela étant exécuté, il ne restera plus dans la solution aucune constante indéterminée, & le vrai mouvement de la corde pourra être représenté d'une manière absolue.

XVI. Afin donc que la figure initiale de la corde puisse être réglée arbitrairement, la solution doit avoir la plus grande étendue. C'est pourquoi, la recherche devant commencer par ces formules $dp = r dx + s dt$, & $dq = s dx + \frac{Fa}{2M} r dt$, on doit découvrir en général toutes les valeurs possibles pour r & s , qui rendent ces formules intégrables ensemble. Multiplions pour cet effet ces formules à part par les constantes m & n , & ajoutons les produits, de manière que soit

$$m dp + n dq = dx (mr + ns) + dt (ms + \frac{Fa}{2M} nr)$$

cette

cette formule doit être encore intégrable, quelles que soient les valeurs constantes attribuées aux lettres m & n . Qu'on fasse donc $m:n$

$$= \frac{F a}{2 M} n:m, \text{ ou } m:n = \frac{F a}{2 M} n:n, \text{ d'où vient } m = 1 \text{ \& } n = \pm \sqrt{\frac{2 M}{F a}}, \text{ \& l'on aura } dp \pm dq \sqrt{\frac{2 M}{F a}} = (dx \pm dt \sqrt{\frac{F a}{2 M}}) (r \pm s \sqrt{\frac{2 M}{F a}}).$$

XVII. Pour abréger, soit $\frac{F a}{2 M} = b$, \& l'on aura

$$dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b}) (r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}}), \text{ ou}$$

$$dp \sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt \sqrt{b}) (s \sqrt{b} \pm r) \text{ ou aussi}$$

$$dq \pm dp \sqrt{b} = (dx \pm dt \sqrt{b}) (s \pm r \sqrt{b}).$$

Comme donc cette formule $(dx \pm dt \sqrt{b}) (s \pm r \sqrt{b})$ doit être intégrable, il est nécessaire que $s \pm r \sqrt{b}$ soit une fonction de $x \pm t \sqrt{b}$. Posons, pour tenir compte de l'un \& de l'autre signe

$$x + t \sqrt{b} = v \quad x = \frac{v + u}{2}$$

\& il fera

$$x - t \sqrt{b} = u \quad t \sqrt{b} = \frac{v - u}{2}$$

\& nous aurons ces équations:

$$dq + dp \sqrt{b} = dv (s + r \sqrt{b}) \text{ \& } dq - dp \sqrt{b} = du (s - r \sqrt{b})$$

où il faut que $s + r \sqrt{b}$ soit une fonction de v , \& $s - r \sqrt{b}$ une fonction de u ; car autrement l'intégration ne réussiroit pas.

XVIII. Cette double intégration étant donc faite, $q + p \sqrt{b}$ deviendra = à une fonction de v , \& $q - p \sqrt{b}$ = à une fonction de u . Soit donc, pour donner une pleine étendue à la solution,

V fonction quelconque de $v = x + t\sqrt{b}$.

U fonction quelconque de $u = x - t\sqrt{b}$,

& l'on satisfera aux conditions rapportées, en posant

$$\begin{aligned} q + p\sqrt{b} &= V & q &= \frac{V + U}{2} \\ q - p\sqrt{b} &= U & p &= \frac{V - U}{2\sqrt{b}} \end{aligned}$$

d'où se fait

Comme donc $dy = p dx + q dt$, on aura en substituant à p & q , de même qu'à dx & dt les valeurs trouvées

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4\sqrt{b}},$$

qui après l'évolution fournit

$$dy = \frac{V dv - U du}{2\sqrt{b}} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2\sqrt{b}} (\int V dv - \int U du).$$

XIX. Or $\int V dv$ sera fonction de $v = x + t\sqrt{b}$, & $\int U du$ fon-

ction de $u = x - t\sqrt{b}$, étant $\frac{F}{2M}$; d'où, si l'on emploie les cara-

ctères f & Φ pour indiquer des fonctions quelconques des quantités, devant lesquelles on les met, nous aurons l'expression générale suivante pour l'appliquée y , qui représente la quantité pour un tems quelconque t , écoulé depuis le commencement, & pour une abscisse quelconque x

$$y = f: (x + t\sqrt{b}) + \Phi: (x - t\sqrt{b}).$$

Car pour retourner sur nos pas, & faire un essai sur la formule $dy = p dx + q dt$ on aura les valeurs suivantes p & q :

$$p = f': (x + t\sqrt{b}) + \Phi': (x - t\sqrt{b})$$

$$q = \sqrt{b} (f': (x + t\sqrt{b}) - \Phi': (x - t\sqrt{b})).$$

& au lieu des formules $dp = r dx + s dt$ & $dq = s dx + br dt$, on aura, comme la nature de la chose le demande,

$$r = f'': (x + t\sqrt{b}) + \Phi'': (x - t\sqrt{b})$$

$$s = \sqrt{b} (f'': (x + t\sqrt{b}) - \Phi'': (x - t\sqrt{b}))$$

pourvu

pourvu que nous marquions le différentiel de la fonction $f: z$ par $dzf': z$, & le différentiel de la fonction $f': z$ par $dzf'': z$.

XX. Jusqu'à présent les caractères f & ϕ , dans l'équation

$$y = f: (x + \sqrt{b}) + \phi: (x - \sqrt{b})$$

signifient des fonctions quelconques, qui diffèrent en raison de la composition, & leur relation se détermine davantage par les autres conditions. Car comme en posant $x = 0$, on doit toujours avoir $y = 0$, il doit être $f: (+\sqrt{b}) + \phi: (-\sqrt{b}) = 0$, & par conséquent $\phi: (-\sqrt{b}) = -f: (\sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en posant $x = a$, la valeur de y doit pareillement évanouir, on aura aussi $f: (a + \sqrt{b}) + \phi: (a - \sqrt{b}) = 0$; & ainsi la nature des fonctions f & ϕ doit être définie de manière qu'elle satisfasse à ces conditions.

$$\phi: -\sqrt{b} = -f: \sqrt{b}$$

$$\phi: (a - \sqrt{b}) = -f: (a + \sqrt{b})$$

XXI. Comme $f: z$ peut être représenté en général par l'application d'une certaine courbe, dont l'abscisse est z , soit AMB la courbe dont les appliquées PM fournissent les fonctions des abscisses AP qui sont désignées par le caractère f : en sorte que PM soit $= f: \sqrt{b}$; auquel $\phi: -\sqrt{b}$ devant être négativement égal, qu'on prenne $Ap = AP$, de sorte que $Ap = \sqrt{b}$; & en posant la courbe Amb au dessous de l'axe de la courbe semblable AMB , on aura $pm = -f: \sqrt{b} = \phi: -\sqrt{b}$. Donc la courbe Amb semblable à la courbe AMB exposera la nature de l'autre fonction ϕ . Alors la courbe AMB existant d'une manière semblable au delà de B , soit $AB = a$ continué au dessous de l'axe, afin que la portion BNa soit semblable & égale à la courbe BNA , & en prenant $BQ = Bq$, on aura $AQ = a + \sqrt{b}$, $QN = f: (a + \sqrt{b})$, & pareillement à cause de $Aq = a - \sqrt{b}$, il sera $qn = f: (a - \sqrt{b})$ d'où il paroît qu'une courbe de cette forme AMB , qui est continuée de part & d'autre à l'infini par des parties semblables & égales à elle même $Am b$, BNa , & qui soient situées alternativement en haut & en bas, est propre à représenter la nature de l'une & l'autre fonction f & ϕ .

Fig. 1.

XXII. Ayant

XXII. Ayant donc décrit une semblable courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière; ou mécanique, son appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons besoin pour la solution du Problème. En effet si l'on pose une abscisse quelconque $AP = z$, on aura l'appliquée $PM = f: z$. De là donc, en attribuant à l'abscisse z , les valeurs $x + t\sqrt{b}$ & $x - t\sqrt{b}$, on aura $y = f: (x + t\sqrt{b}) + f: (x - t\sqrt{b})$; en conséquence de quoi on pourra assigner pour un tems quelconque dans la corde vibrante l'appliquée y , qui convient pour une abscisse quelconque. Or posons $t = 0$, pour obtenir la courbe initiale de la corde, & l'on aura $AP = x$, & l'appliquée dans la corde vibrante $y = f: x = 2 PM$; ou, parce qu'il est permis de prendre les moitiés des fonctions supérieures, en sorte que

$$y = \frac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \frac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

la courbe même AMB représentera la figure donnée à la corde au commencement du mouvement.

XXIII. Réciproquement donc, s'il y a une courbe donnée, ou figure, que la corde ait reçue au commencement, on pourra en tirer la détermination de la figure de la corde pour un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Car, en décrivant au dessus de l'axe $AB = a$, qui soit égal à la longueur de la corde, la figure initiale de la corde AMB, qu'on la repete de part & d'autre en situation inverse, en sorte que $Amb = AMB$ & $BNa = BnA$, & que l'on conçoive la répétition continuelle de cette courbe de part & d'autre à l'infini suivant la même loi. Alors, si cette courbe est employée pour exprimer les fonctions trouvées, après un tems écoulé $= t$ l'appliquée qui répondra à l'abscisse x , dans la corde en vibration fera :

$$y = \frac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \frac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

d'où l'on pourra recueillir aisément la construction de la courbe, que la corde forme dans un tems quelconque.

XXIV. Mais afin que cette formule ne paroisse pas renfermer des quantités heterogenes, il faut remarquer que $t\sqrt{b}$ est représenté par une ligne droite, & est par conséquent homogene à x . Car, soit z la hauteur

hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems t , en donnant l'expression du tems de la maniere indiquée ci-dessus, on aura $t = 2\sqrt{z}$; & ainsi au lieu de t , on pourra écrire $2\sqrt{z}$, & réciproquement par la hauteur z on connoitra le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement. Donc $t\sqrt{b}$ fera $\frac{2\sqrt{b}z}{2\sqrt{b}z} = 2\sqrt{bz}$

$2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & par conséquent sera exprimé par une ligne

droite. Or posons, pour abrégér, $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, en sorte que la valeur de v puisse être assignée pour un tems quelconque, & après le tems écoulé, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, on aura

$$y = \frac{1}{2}f:(x+v) + \frac{1}{2}f:(x-v)$$

XXV. Si l'on a donc donné au commencement la figure AMB à la corde AB $= a$, & que sa répétition ait ensuite formé la ligne courbe anguiforme $n' b$ AMB $a N$, la figure que la corde doit avoir au bout du tems t , pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, sera ainsi définie. De cette hauteur z connue qu'on cherche

la valeur $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & qu'en proposant l'abscisse quelconque

AP $= x$, on prenne de part & d'autre PQ $= Pq = v$, en menant aux points Q & q les appliquées QN & qn , on aura à cause de QN $= f:(x+v)$ & de $qn = f:(x-v)$, l'appliquée qui répond à l'abscisse AP $= x$ de la corde, $y = \frac{1}{2}QN + \frac{1}{2}qn$; ou bien, qu'on

prenne Pm $= \frac{QN + qn}{2}$, m étant le lieu du point M, &

si l'on employe cette construction pour tous les points de l'axe AB, les points m donneront la figure présente de la corde Am B. De cette maniere la figure, que la corde prend dans les vibrations, sera facilement décrite pour un tems quelconque.

XXVI. Cherchons la figure de la corde, après qu'il sera écoulé un tems tel que v soit $= a$, ou $z = \frac{M a}{2 F}$, & cela donnera

$$y = \frac{1}{2} f: (x + a) + \frac{1}{2} f: (x - a)$$

Or par la nature de la courbe décrite $f: (x - a)$ fera $= -f: (a - x)$ & $f: (a + x) = -f: (a - x)$ d'où résultera

$$y = -f: (a - x)$$

ce qui fait voir que la corde sera pliée toute entière au dessous de l'axe, & prendra la figure $AM'B$ égale à la figure donnée AMB , mais posée en situation inverse; de sorte qu'en prenant l'abscisse $BP' = AP$, l'appliquée sera $P'M' = PM$. Et de là réciproquement, s'il s'écoule de nouveau un tems égal t , d'où résulte $v = a$, toute la corde retournera à la situation AMB , qui lui avoit été donnée au commencement; ce qui se déduit aussi de ce que s'étant écoulé depuis le commencement un tems, d'où se fait $v = 2a$, il en résulte,

$$y = \frac{1}{2} f: (x + 2a) + \frac{1}{2} f: (x - 2a)$$

Mais en prenant $PQ' = Pq' = 2a$, par la nature de la courbe $Q'N'$ fera $= PM = q'n'$, & par conséquent $y = PM$, comme au commencement du mouvement.

XXVII. Quelle que soit donc la figure donnée d'abord à la corde, elle la reprend à chacune des vibrations, autant que le permet la diminution causée par la résistance; ce qui fait voir bien clairement qu'il n'y a aucune vérité dans l'opinion rapportée ci-dessus, savoir que les vibrations de la corde, quelque irrégulières qu'elles aient été d'abord, rentrent aussi-tôt après dans l'uniformité, de manière que la figure dégénère en une trochôide prolongée. Cependant il n'est pas moins clair, que quelle que soit la figure de la corde en vibration, les vibrations ne laisseront pas d'être assez régulières; car comme, en posant $v = 2a$, la corde retourne à son premier état, elle doit être censée avoir fait pendant ce tems là deux vibrations; & par conséquent on définira de la valeur $v = a$ le tems d'une vibration, qui sera égal au tems pendant lequel un corps pesant tombe par la

la hauteur $\frac{M a}{2 F}$; ou, si l'on exprime la longueur de la corde $AB = a$ en milliemes de pieds de Rhin, le tems d'une vibration exprimé en secondes sera $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{M a}{2 F}}$, où la corde fera autant de vibrations

à chaque seconde, que cette expression $125 \sqrt{\frac{2 F}{M a}}$ contiendra d'unités, tout comme si la corde achevoit ses vibrations suivant la loi d'uniformité décrite par *Taylor*.

XXVIII. Comme la figure AMB donnée au commencement à la corde, fournit la premiere & plus grande excursion, de même une vibration étant achevée, la corde se trouvera dans l'autre excursion la plus grande $AM'B$, que nous avons fait voir être égale à la premiere inverse. Voyons donc à present, si dans le milieu du tems qu'emportent ces deux vibrations, la corde se tend d'une maniere parfaitement droite, & reprend la situation naturelle, ou non? Puisque du tems d'une vibration naît $v = a$, posons pour le moment du milieu $v = \frac{1}{2} a$, & l'on aura de la formule générale

$$y = \frac{1}{2} f: (x + \frac{1}{2} a) + \frac{1}{2} f: (x - \frac{1}{2} a)$$

dont la valeur evanouira, si $f: (\frac{1}{2} a - x)$ est $= f: (\frac{1}{2} a + x)$ c'est à dire, si la figure ADB donnée au commencement à la corde est telle qu'aux abscissés $\frac{1}{2} a + x$ & $\frac{1}{2} a - x$ répondent des appliquées égales; ce qui arrive si l'appliquée CD dressée au point du milieu C de la longueur AB est un diametre de la courbe ADB , & que la partie DB soit semblable & égale à la partie DA . Toutes les fois donc que la courbe initiale a cette propriété, tout autant de fois la corde s'étend en ligne droite au milieu de chaque vibration; & comme cela peut arriver en nombre innombrable de manieres, il est manifeste que cette condition elle-même ne requiert pas, que la corde prenne perpetuellement dans ses vibrations la figure d'une trochoïde prolongée.

XXIX. Or, bien qu'à considérer la chose en général, les tems des vibrations ne dépendent pas de la figure que prend la corde vibrante,

Fig. 3. mais qu'ils se déterminent par les seules quantités a , M & F , dont la première a dénote la longueur de la corde, M le poids de la corde, & F le poids égal à la force qui tend; cependant il y a des cas singuliers, dans lesquels les tems des vibrations peuvent être réduits à la moitié, au tiers, au quart, ou même à une partie aliquote quelconque de toute la longueur. Car, si toute la longueur de la corde étoit $Aa = a$, & qu'elle se courbât au commencement, de manière qu'elle fit deux parties AMB & Ba , qui fussent parfaitement semblables & égales entr'elles, elle fera alors ses vibrations, comme si elle n'avoit que la demie longueur AB , & par conséquent ces vibrations seront deux fois plus rapides. De même, si la figure initiale de la corde avoit trois parties semblables & égales $bABa$, comme elles sont représentées dans la figure, la corde alors fera ses vibrations, comme si la longueur étoit trois fois moindre, & chaque vibration deviendra trois fois plus courte; par où l'on comprend assez, comment ces mêmes vibrations peuvent devenir quatre fois, cinq fois &c. plus courtes.

XXX. Ayant ainsi donné la solution générale, comprenons y encore quelques cas, auxquels la courbe anguiforme Fig. 3. est une courbe continuë, dont les parties soient liées en vertu de la loi de continuité, de manière que sa nature puisse être comprise par une équation. Et d'abord il est constant, que ces courbes, puisqu'elles sont coupées par l'axe en une infinité de points, seront transcendentes. En posant la longueur de la corde $AB = a$, & une abscisse quelconque $AB = u$, soit $1: \pi$, comme le diamètre du cercle à la circonférence, & il est manifeste que l'équation suivante, exprimée par les sinus, fournit une courbe requise;

$$PM = a \sin \frac{\pi u}{a} + \epsilon \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Car si, au lieu de u , on pose ou a , ou $2a$, ou $3a$, ou $4a$ &c. l'appliquée PM évanouit, & en posant u négatif, l'appliquée elle même se change en son négatif. Si donc la courbe AMB étoit la figure primitive de la corde, au bout du tems t , pendant lequel le corps pe-

sant



fant descend par la hauteur $= z$, en posant $v = \sqrt{\frac{Fz^2}{M}}$, la
scisse x dans la figure de la corde répondra l'appliquée y , de sorte
qu'on aura :

$$y = +\frac{1}{2}a \sin \frac{\pi}{a}(x+v) + \frac{1}{2}b \sin \frac{2\pi}{a}(x+v) + \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x+v) \&c.$$

$$+ \frac{1}{2}a \sin \frac{\pi}{a}(x-v) + \frac{1}{2}b \sin \frac{2\pi}{a}(x-v) + \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x-v) \&c.$$

XXXI. Or comme $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ est $= 2 \sin a \cos b$,
cette équation se transformera en cette forme :

$$y = a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + b \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi v}{a} \&c.$$

& la figure primitive de la corde sera exprimée par cette équation,

$$y = a \sin \frac{\pi x}{a} + b \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Laquelle revient la même, toutes les fois que v devient ou $2a$, ou $4a$,
ou $6a$ &c. Mais si v est ou a , ou $3a$, ou $5a$ &c. la figure de la cor-
de sera

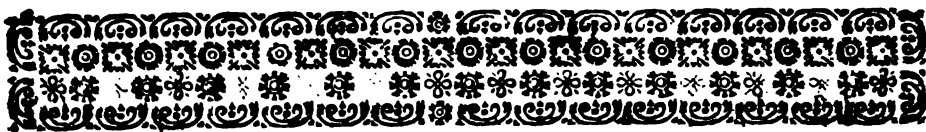
$$y = -a \sin \frac{\pi x}{a} + b \sin \frac{2\pi x}{a} - \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

où il faut remarquer que si β est $= 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, &c. il en ré-
sulte le cas qu'on croit communément être le seul qui ait lieu dans la

vibration des cordes, savoir $y = a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a}$, dans lequel la

courbure de la corde est perpétuellement la ligne des sinus, ou une
trochoïde prolongée à l'infini. Mais si le seul terme β , ou γ , ou
 δ , &c. s'y trouve, cela forme des cas où le tems de la vibration est
moindre, ou du double, ou du triple, ou du quadruple &c.





S U R L' A C C O R D
DES DEUX DERNIERES ECLIPSES DU SOLEIL
ET DE LA LUNE AVEC MES TABLES POUR TROU-
VER LES VRAIS MOMENS DES PLENI-LU-
NES ET NOVI-LUNES,

P A R M. E U L E R.

L

* Voy. les
Mémoires de
1747. p. 250.
& suiv.



On calcul, que j'ai exposé dans un Mémoire * pré-
cedent, pour l'Eclipse du Soleil, que nous avons
vuë ici le 25 Juillet de cette année 1748, est si bien
d'accord avec les observations du commencement
& de la fin de cette Eclipse, qu'à peine on s'en sauroit promettre un
plus grand. Suivant mes tables j'avois établi le commencement de
cette Eclipse à 10^h, 17', 45'', & la fin à 1^h, 24', 0'': or, quoique le com-
mencement de cette Eclipse ne fut pas appercû, on étoit pourtant as-
sez sûr de le conclure à 10^h, 18' par la phase qui parût à 10^h, 30', & la
fin de cette Eclipse a été remarquée à 1^h, 24', 30''. Nous ne nous som-
mes pas trompés non plus dans l'attente de l'anneau, que j'avois an-
noncé: mais sa durée, que j'avois mise à 5', 10'', étoit beaucoup plus
courte, savoir de 1', 20'', ce qui ne paroît pas trop favoriser mes tables;
quoique les autres tables qui passent pour les meilleures, ne montras-
sent cette Eclipse, que partielle, & que leurs erreurs par rapport au
commencement & à la fin montassent à quelques minutes entieres.
Mais, pour ôter ce scrupule par rapport à la durée de l'anneau, je dois
remar-

remarquer que dans mon calcul j'avois supposé l'elevation du Pole de Berlin de $52^{\circ}, 36'$: Or les dernières observations, que Mr. Kies vient de faire avec l'excellent Quart de cercle, que Mr. de Maupertuis a donné à l'Académie ne donnent cette elevation du Pole que de $52^{\circ}, 31', 30''$, de sorte que j'avois placé Berlin trop vers le Nord de $4', 30''$. On n'a qu'à jeter les yeux sur la carte de cette Eclipsé, qui a été publiée à Nurnberg, pour s'assurer, que si Berlin étoit situé de $4 \frac{1}{2}'$ plus au nord, la durée de l'anneau auroit été beaucoup plus considerable & qu'elle auroit été assez d'accord avec mon calcul.

II. Pour l'Eclipsé de Lune, qui parut entre le 8 & le 9 Dec. mois d'Août, si l'on regarde l'article, qui se trouve à la fin de l'Almanac Astronomique, on remarquera, que les momens de cette Eclipsé qui sont allegués sous le titre de mes tables, ne sont pas trop d'accord avec l'observation. Car le commencement y étoit marqué à $11^h, 0', 14''$ & la fin à $1^h, 14', 4''$, on a trouvé par l'observation le commencement à $11^h, 5'$ & la fin à $1^h, 18'$: J'avoüe que cette différence anéantiroit tout à fait la bonne opinion de mes tables, que l'accord de l'Eclipsé du Soleil auroit pu inspirer : & cela me paroît d'autant plus surprenant, que j'avois rectifié mes tables sur un grand nombre d'Eclipses lunaires. J'ai cru donc avant que de porter un jugement si peu favorable de mes tables, devoir refaire mes calculs, pour voir s'il ne s'y étoit pas glissée quelque faute, ayant fait alors ces calculs à la hâte. En voicy donc le détail de tous mes calculs.

III. Je commence donc par chercher le tems de l'opposition moyenne, qui arrive vers le 8 Août de l'Année 1748. dont le calcul sera suivant mes tables imprimées dans l'Almanac latin pour l'an 1749. comme il suit :

	☉ L. moy: ☉	An. moy: ☉	An. moy: ☽	L. moy: ☽
A 1741, 11, 20, 44', 15"	6 9, 12, 1', 38"	6, 30, 25', 46"	9, 27, 15', 46"	3, 40, 9', 52"
Ano 7, 13, 3, 52, 28	0 0, 12, 17, 11	0, 12, 9, 51	2, 26, 3, 39	4, 16, 3, 2
Juill. 25, 17, 8, 21	0 6, 23, 44, 49	6, 23, 44, 14	6, 0, 43, 3	6, 10, 56, 47
Juill. 40, 17, 45, 4	6 4, 18, 3, 38	1, 9, 19, 51	6, 24, 2, 28	4, 26, 59, 49
ou Août 8, 17, 45, 4				10, 7, 10, 3

Car

Car le 4^{ome} Juillet convient avec le 9^{me} Août; mais parceque cette année est bissextile, il en faut retrancher un jour, dont le mois de Février a été allongé. Donc, selon le mouvement moyen, l'opposition arrive à Paris A. 1748 Août 8j, 17^b, 45', 4" tems moyen: & l'équation du tems étant 5', 0" à soutraire, le tems de cette opposition moyenne sera à Paris A. 1748 Août 8j, 17^b, 40', 4", & pour Berlin il y faut ajouter la différence de longitude, qui est 44', 36", par conséquent cette opposition moyenne a du arriver à Berlin

A. 1748 Août 8j, 18^b, 24', 40" tems vrai.

IV. Ayant pour ce tems les anomalies moyennes du Soleil & de la Lune, on en déterminera à l'aide des mêmes tables les anomalies excentriques, en y appliquant les équations qui conviennent, & on trouvera

L'anomalie excentrique du Soleil 11, 80, 43', 44"

L'anomalie excentrique de la Lune 6, 23, 25, 27

Et de là on formera aisément les argumens des tables d'équations & les equations mêmes.

Table	Argument	Eq: additives	Eq: soustractives
I	6, 250, 23', 27	- - - - -	3 ^b , 44", 18"
II	1, 8, 43, 44	- - - - -	2, 35, 59
III	8, 4, 7, 11	0 ^b , 8', 15"	
VI	5, 16, 39, 43	0, 2, 31	
V	2, 29, 30, 33	- - - - -	0, 1, 1
VI	0, 12, 3, 10	31	
		+ 0, 11, 17	- 6 21, 18
			+ 0, 11, 17

Equation totale à soutraire 6, 10, 1

Il faut donc soutraire 6^b, 10', 1" du tems de l'opposition moyenne pour avoir le tems de l'opposition vraie dans l'orbite.

Opposition moyenne à Berlin Ann. 1748 Août 8j, 18^b, 24', 40"
 otez 6, 10, 1

Opposition dans l'orbite à Berlin Ann. 1748 Août 8, 12, 14, 39
 selon le tems vrai.

V. Main-

V. Maintenant je cherche pour ce tems les vrais lieux du Soleil, de la Lune, leurs anomalies excentriques avec le lieu moyen du noeud ascendant.

Tems & moyenne	Long. moy: ☉	An. moy: ☉	An. moy: ☾	Long. moy: ☾
ôtez	4, 18, 3, 38	1, 9, 19, 51	6, 24, 2, 28	10, 7, 10, 3
66, 10', 1"	— 15, 12	— 15, 12	— 3, 21, 26	+ 49
Tems & de l'orbite	4, 17, 48, 26	1, 9, 4, 39	6, 20, 41, 2	10, 7, 10, 52
Equat:	— 1, 11, 37	— 35, 56	— 1, 10, 18	
	4, 16, 36, 49	1, 8, 28, 43	6, 21, 51, 20	
	Long. vraie ☉	An. exc. ☉	An. exc. ☾	

Donc la longitude vraie du Soleil étant 4, 16, 36, 49
 La longitude de la Lune dans son orbite est 10, 16, 36, 49
 puisque nous savons que dans ce moment le lieu de la Lune dans son orbite differe de 6. signes de celui du Soleil.

VI. A' présent il s'agit de determiner le vrai lieu du noeud ascendant ☾ avec l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'ecliptique, ce qui se fera par le moyen des tables de la Lune, que j'ai publiées dans le recueil de mes pieces.

Tables pour le ☾ & l'Incl.	Argument	Long. moy: ☾	Inclin.
I	6, 21, 51, 20	Eq. + 38	
II	1, 8, 28, 43	Eq. + 4, 30	
☉	4, 16, 36, 49	10, 7, 16, 0	
☾	10, 7, 16, 0		
III	6, 9, 20, 49	Eq. + 0, 29, 49	50, 16', 39"
		10, 7, 45, 49	
IV	6, 0, 0, 0	Eq. 0, 0, 0	Eq. — 42
V	0, 9, 20, 49	Eq. + 2, 14	Eq. + 36
		10, 7, 48, 3	5, 16, 33
		Long. vraie du ☾	Inclinaison vraie.

Donc la longitude vraie du noeud ☾ est 10, 7, 48, 3"
 & l'inclinaison de l'orbite lunaire 5, 16, 33.

VII. Pour avoir tous les élémens, sur lesquels le calcul de l'Eclipse se fonde, il faut encore chercher les diametres apparens, les parallaxes horizontales & les mouvemens horaires du Soleil & de la Lune, ce qui se trouvera aisément par les tables, qu'on a jointes à l'Almanac Astronomique pour l'année 1749. On pourra aussi se servir des formules suivantes, où v marque l'anomalie excentrique de la Lune, & u celle du Soleil. De là on aura :

Le diametre apparent du Soleil $\equiv 1933'' - 32'', 4 \cos u$
 la parallaxe horizontale du $\odot \equiv 12''$
 le mouvement horaire du $\odot \equiv 147'', 87 - 4'', 95 \cos u$

Pour la Lune dans les oppositions :

Diam. app. horiz. de la Lune $\equiv 1892'' - 122'' \cos v + 4'' \cos 2v$
 Parallaxe horiz. de la Lune $\equiv 3430 - 222 \cos v + 8 \cos 2v$
 Mouv. horaire de la Lune $\equiv 2023'', 1 - 258,3 \cos v + 11,7 \cos 2v$
 $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - 1,8 \cos u + 1,4 \cos(v-u)$

Pour les conjonctions on n'a qu'à retrancher $2''$ pour le diametre apparent, & $3''$ pour la parallaxe & le mouvement horaire.

VIII. Par le moyen de ces formules, puisqu'il y a

$u = 1, 8, 28, 43$ & $v = 6, 21, 51, 20$

nous trouverons :

Le Diametre apparent du Soleil	\equiv	1908''	\equiv	31', 48"
La parall. horizont. du Soleil	\equiv	12''		
Le mouvement horaire du Soleil	\equiv	144	\equiv	2, 24
Le Diametre horiz. appar. de la D	\equiv	2008	\equiv	33, 28
La parallaxe horiz. de la Lune	\equiv	3642	\equiv	60, 42
Le mouvem. horaire de la Lune	\equiv	2269	\equiv	37, 49

Or le mouvement horaire du noeud est de

8''

De plus la somme des parallaxes étant

60', 54''

si l'on en retranche le demi-diametre du Soleil

35', 54''

on aura le demi-diametre de l'ombre

$\equiv 45', 0''$

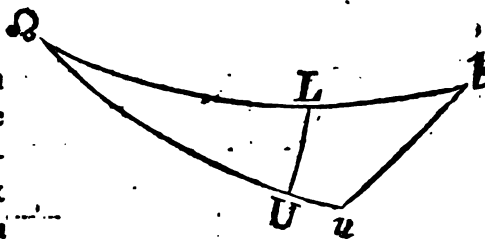
Mais l'atmosphere de la terre augmentant l'ombre autant qu'on peut conclure par les observations, il semble qu'on y doit ajouter $40'$, de sorte que le demi-diametre rectifié de l'ombre fera $\equiv 45', 40''$.

XI. Soit

IX. Soit maintenant dans la figure cy - jointe ΩU l'Ecliptique, ΩL l'orbite de la Lune, & Ω le noeud ascendant. De plus, au moment de l'opposition dans l'orbite, soit U le centre de l'ombre & L celui de la Lune, & pour rendre le probleme plus général, soit

$$\Omega U = \Omega L = a$$

lequel arc se trouve si l'on  te la longitude du noeud Ω du lieu de la Lune; & soit ω l'angle de l'inclinaison Ω des deux orbites: & nous aurons par les règles de la trigonometrie sphérique:



$$\cos UL = \cos \omega \sin a^2 + \cos a^2 = \cos \omega \sin a^2 + 1 = \sin a^2$$

Or $1 - \cos \omega$ étant $= 2 \sin \frac{1}{2} \omega^2$, nous aurons

$$2 \sin a^2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 = 2 \sin \frac{1}{2} UL^2$$

$$\text{\& partant } \sin \frac{1}{2} UL = \sin a \sin \frac{1}{2} \omega.$$

X. Qu'on cherche à présent la distance des centre u , & l , de l'ombre & de la Lune après x heures depuis le moment de l'opposition dans l'orbite. Soit pour cet effet m' le mouvement horaire du Soleil ou de l'ombre depuis le noeud, & n le mouvement horaire de la Lune depuis le noeud qu'on aura si l'on ajoute $8''$ au mouvement horaire tant du Soleil que de la Lune trouvé par les tables données oy-dessus: & nous aurons $\Omega u = a + m x$ & $\Omega l = a + n x$. Nommant donc la distance des centres $ul = z$, nous aurons:

$\cos z = \cos \omega \sin(a + m x) \sin(a + n x) + \cos(a + m x) \cos(a + n x)$
ou puisque $\sin b \sin c = \frac{1}{2} \cos(b - c) - \frac{1}{2} \cos(b + c)$, & $\cos b \cos c = \frac{1}{2} \cos(b - c) + \frac{1}{2} \cos(b + c)$, cette équation se changera en cette cy:

$$\cos z = \frac{1}{2} \cos \omega \cos(n - m)x - \frac{1}{2} \cos \omega \cos(2a + (n + m)x) \\ + \frac{1}{2} \cos(n - m)x + \frac{1}{2} \cos(2a + (n + m)x)$$

$$\text{ou bien } \cos z = \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos(n - m)x + \sin \frac{1}{2} \omega^2 \cos(2a + (n + m)x$$

$$\text{ou } 1 - 2 \sin \frac{1}{2} z^2 = \cos(n - m)x - \sin \frac{1}{2} \omega^2 \cos(n - m)x^2 + \sin \frac{1}{2} \omega^2 \cos(2a + (n + m)x$$

Or $\cos(2a + (n+m)x) = \cos 2a \cos(n+m)x - \sin 2a \sin(n+m)x$

d'où nous obtiendrons :

$$1 - \sin \frac{1}{2} z^2 = \cos(n-m)x - \sin \frac{1}{2} a^2 \cos(n-m)x + \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 \cos(n+m)x - \sin 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 \sin(n+m)x$$

Mais les angles $(n-m)x$ & $(n+m)x$ étant très petits il y aura $\cos(n-m)x = 1 - \frac{1}{2}(n-m)^2 x^2$, $\cos(n+m)x =$

$1 - \frac{1}{2}(n+m)^2 x^2$ & $\sin(n-m)x = (n-m)x$, ce qui donne

$$4 \sin \frac{1}{2} z^2 = (n-m)^2 x^2 + 2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 - \sin \frac{1}{2} \omega^2 (n-m)^2 x^2 + 2 \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 + (n+m)^2 x^2 \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 + 4(n+m)x \sin a \cos a \sin \frac{1}{2} \omega^2$$

$$\text{ou } 4 \sin \frac{1}{2} z^2 = 4 \sin a^2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 + (n-m)^2 x^2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 + (n+m)^2 x^2 \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 + 4(n+m)x \sin a \cos a \sin \frac{1}{2} \omega^2$$

$$\text{ou } 4 \sin \frac{1}{2} z^2 = (\sin a + (n+m)x \cos a)^2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 + (n-m)^2 x^2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 - (n+m)^2 x^2 \sin a^2 \sin \frac{1}{2} \omega^2$$

XI. La distance des centres $u/l = z$ sera la plus petite si l'on pose le différentiel de la valeur de $a \sin \frac{1}{2} z^2 = 0$, ce qui donne

$$(n-m)^2 x \cos \frac{1}{2} \omega^2 + (n+m)^2 x \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 + 2(n+m) \sin a \cos a \sin \frac{1}{2} \omega^2 = 0, \text{ d'où l'on tire}$$

$$x = \frac{-(n+m) \sin 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2}{(n-m)^2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 + (n+m)^2 \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2}$$

& cette valeur substituée donne :

$$\sin \frac{1}{2} z = \sin a \sin \frac{1}{2} \omega \sqrt{\frac{(n-m)^2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 - (n+m)^2 \sin a^2 \sin \frac{1}{2} \omega^2}{(n-m)^2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 + (n+m)^2 \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2}}$$

Puisque les termes qui sont multipliés par $\sin \frac{1}{2} \omega^2$ sont extrêmement petits par rapport aux autres, les centres de l'ombre & de la Lune s'approcheront le plus qu'il est possible, x heures après l'opposition dans l'orbite, étant

$$x = \frac{-(n+m) \sin 2a \tan \frac{1}{2} \omega^2}{(n-m)^2} \left(1 - \frac{(n+m)^2 \cos 2a \tan \frac{1}{2} \omega^2}{(n-m)^2} \right)$$

& la distance même des centres $u/l = z$ fera.

$$\sin \frac{1}{2} z = \sin a \sin \frac{1}{2} \omega \left(1 - \frac{(n+m)^2 \cos a^2 \tan \frac{1}{2} \omega^2}{2(n-m)^2} \right)$$

XII. Mais

XII. Mais renverſons maintenant le cas, & ſuppoſons que la diſtance des centres a $l = z$ ſoit donnée, & qu'on doive chercher le tems, où les centres ſe trouvent à cette diſtance. Qu'on cherche

premierement un angle ϕ , de ſorte que $\cos \phi = \frac{\sin a \sin \frac{1}{2} \omega}{\sin \frac{1}{2} z}$

& remettant dans l'équation la valeur $\sin \frac{1}{2} z = \frac{\sin a \sin \frac{1}{2} \omega}{\cos \phi}$

on aura

$$4 \sin a^2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 \tan \phi^2 = (n-m)^2 x x \cos \frac{1}{2} \omega^2 + (n+m)^2 x x \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 + 2(n+m)x \sin 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2$$

où les deux derniers termes étant fort petits, on aura à peu

près $x = \frac{2 \sin a \tan \frac{1}{2} \omega \tan \phi}{n-m}$. ſuppoſons donc

$$x = \frac{2 \sin a \tan \frac{1}{2} \omega \tan \phi}{n-m} - y, \text{ \& nous aurons.}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -4(n-m)y \sin a \sin \frac{1}{2} \omega \cos \frac{1}{2} \omega \tan \phi + \frac{4(n+m)^2}{(n-m)^2} \sin a^2 \cos 2a \sin \frac{1}{2} \omega^2 \tan^2 \phi \\ & + \frac{4(n+m)}{n-m} \sin a \sin 2a \tan \frac{1}{2} \omega \sin \frac{1}{2} \omega^2 \tan \phi \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$y = \frac{n+m}{(n-m)^2} \sin 2a \tan \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{(n+m)^2}{(n-m)^3} \sin a \cos 2a \tan \frac{1}{2} \omega^3 \tan \phi$$

Par conſéquent nous aurons enfin:

$$x = \frac{\sin a \tan \frac{1}{2} \omega}{n-m} \left(2 \tan \phi - \frac{2(n+m)}{n-m} \cos a \tan \frac{1}{2} \omega - \frac{(n+m)^2}{(n-m)^2} \cos 2a \tan \frac{1}{2} \omega^2 \tan \phi \right)$$

XIII. Cette formule par laquelle nous venons d'exprimer la valeur de x , ſert à trouver tant le commencement & la fin d'une Eclipe, que l'immerſion & l'emerſion ſi l'Eclipe eſt totale. Car la tangente de l'angle ϕ ſe prend auſſi bien négativement qu'affirmativement, de ſorte que cette formule renferme toujours une double valeur. Or pour trouver les moments du commencement & de la

fin d'une Eclipsé on n'a qu'à mettre z égale à la somme des demi-diamètres de l'ombre & de la lune ; & si l'on met z égale à la différence de ces demi-diamètres, on trouvera les momens de l'immersion & l'emersion. On verra d'abord si l'un ou l'autre de ces cas est possible ; ce qui arrive si $\sin \frac{1}{2} z \geq \sin a \sin \frac{1}{2} \omega$. Car s'il étoit $\sin \frac{1}{2} z < \sin a \sin \frac{1}{2} \omega$, ce seroit une marque de l'impossibilité, à moins que la différence ne fût si petite, qu'elle pourroit être détruite par les petits termes négligés dans le calcul.

XIV. Faisons maintenant l'application de ces formules à l'Eclipsé de la Lune en question, dont le tems de l'opposition dans l'orbite a été trouvé à Berlin, tems vrai A. 1748 Août 8, 12^h, 14^h 39["] qui nous sert d'époque : & les valeurs des lettres qui entrent dans le calcul seront :

Lieu de la Lune dans son orbite	10°, 16', 36", 49"
Lieu du noeud ascendant Ω	10, 7, 48, 3.
L'arc $\Omega L = \Omega U =$	0, 8, 48, 46
Donc nous aurons $a =$	8°, 48', 46"
& l'inclinaison ou l'angle $\Omega = \omega =$	5°, 16', 33
& $\frac{1}{2} \omega =$	2, 38, 16 $\frac{1}{2}$
De là nous aurons $l \sin a =$	9, 1852764
$l \sin \frac{1}{2} \omega =$	8, 6629848
& partant $l \sin \frac{1}{2} UL =$	7, 8482612
Donc $\frac{1}{2} UL =$	24', 14 $\frac{1}{2}$ "
& la distance des centres $UL =$	48', 29
au moment de l'opposition dans l'orbite.	

XV. Le mouvement horaire du Soleil étant $= 144''$ & le mouvement horaire de la lune 2269, nous aurons $m = 152$ & $n = 2277$, & partant $n - m = 2125$, & $n + m = 2429$. De là nous trouverons le moment de la plus grande proximité des centres de l'ombre & de la lune par la formule $x = - \frac{(n+m) \sin 2a \tan \frac{1}{2} \omega^2}{(n-m)^2}$.

négligeant l'autre terme comme extrêmement petit. Le calcul sera $l(n+m)$



$$\begin{aligned}
 l(n+m) &= 3, 3854275 \\
 l(n-m) &= 3, 3273589 \\
 l \frac{(n+m)}{n-m} &= 0, 0580686 \\
 l \sin 2a &= 9, 4807506 \\
 l \tan \frac{1}{2} \omega^2 &= 7, 3268903 \\
 l - (n-m)x &= 6, 8657102 \\
 \text{foutr.} & 4, 6855749 \\
 \text{red. en second.} & 2, 1801353 \\
 l(n-m) &= 3, 3273589 \\
 l - x &= 8, 8527764 \\
 x &= 0, 07125 = -4^1, 275 = -4^1, 16''
 \end{aligned}$$

Donc le tems de la plus grande proximité des centres est à Berlin, tems vrai A. 1748 Août 8j, 12^h, 10', 23''

XVI. Pour la plus petite distance des centres, qui répondra à ce moment, si elle est nommée $= z$, nous en avons déjà la valeur

fort proche $= 48', 29''$; mais il en faut encore retrancher $\frac{(n+m)^2}{(n-m)^2}$

sin a sin $\frac{1}{2} \omega$ cos a^2 tang $\frac{1}{2} \omega^2$
donc le calcul est :

$$\begin{aligned}
 l \left(\frac{n+m}{n-m} \right)^2 &= 0, 1161372 \\
 l \sin a \sin \frac{1}{2} \omega &= 7, 8482612 \\
 l \cos a^2 &= 9, 9896846 \\
 l \tan \frac{1}{2} \omega^2 &= 7, 3268908 \\
 & 5, 6809738 \\
 \text{foutr.} & 4, 6855749 \\
 & 0, 5953989
 \end{aligned}$$

à ce log. répond. 4'' à peu près

Donc la plus petite distance des centres est 48', 25'' laquelle étant ôtée de la somme des demi-diamètres 45', 40'' + 16', 44'' $= 62', 24''$ laissera 13', 59'' pour la grandeur de l'Eclipse : qui sera reduite en
doirs,

doigts, dont 6 égalent le demi-diametre de la Lune, on fera cette regle de trois :

$$16', 44'' (1004) : 6 \doteq 839 : 5, 014$$

La grandeur de cette Eclipse a donc été de $5 \frac{14}{1000}$ doigts ce qui doit être arrivé à $12b, 10', 23''$.

XVII. Pour trouver les momens du commencement & de la fin de cette Eclipse, il faut supposer $z \doteq$ à la somme des demi-diametres, ou $z \doteq 62', 24''$ & de là chercher l'angle ϕ que $\cos \phi = \frac{\sin a \sin \frac{1}{2} \omega}{\sin \frac{1}{2} z}$

Or étant $\frac{1}{2} z \doteq 31', 12''$ nous aurons.

$$l \sin a \sin \frac{1}{2} \omega \doteq 7, 8482612$$

$$l \sin \frac{1}{2} z \doteq 7, 9578747$$

$$l \cos \phi \doteq 9, 8903865$$

$$\text{Donc. } \phi \doteq 39^\circ, 1', 8''$$

$$\& l \tan \phi \doteq 9, 9084037$$

Comme la valeur de x est composée de trois membres, cherchons en chacun à part, par le calcul qui suit.

$$l \sin a \doteq 9, 1852764$$

$$l \tan \frac{1}{2} \omega \doteq 8, 6634454$$

$$7, 8487218$$

$$l (n - m) \doteq 3, 3273589$$

$$4, 5213628$$

$$\text{Soutr.} \quad 4, 6855749$$

$$l \frac{\sin a \tan \frac{1}{2} \omega}{n - m} \doteq 9, 8357878$$

$$l \tan \phi \doteq 9, 9084037$$

$$l 2 \doteq 0, 3010300$$

$$l \text{ Part. I.} \doteq 0, 0452215$$

$$\begin{aligned}
 \text{Part. I.} &= 1^h, 1097 \\
 l \frac{\text{fi } a \text{ tang } \frac{1}{2} \omega}{n - m} &= 9, 8357474 \\
 l \frac{(n + m)}{n - m} &= 0, 0580686 \\
 l 2 &= 0, 3010300 \\
 &= 0, 1948864 \\
 l \text{ cof } a &= 9, 9948423 \\
 l \text{ tang } \frac{1}{2} \omega &= 8, 6634454 \\
 l \text{ Part. II.} &= 8, 8531741 \\
 \text{Part. II.} &= 0, 0713 \\
 l \frac{\text{fi } a \text{ tang } \frac{1}{2} \omega}{n - m} &= 9, 8357878 \\
 l \left(\frac{n + m}{n - m} \right)^2 &= 0, 1161372 \\
 l \text{ cof } 2 a &= 9, 9799536 \\
 l \text{ tang } \frac{1}{2} \omega^2 &= 7, 3268908 \\
 l \text{ tang } \phi &= 9, 9084037 \\
 l \text{ Part. III.} &= 7, 1651731 \\
 \text{Part. III.} &= 0, 0015
 \end{aligned}$$

XVIII. Ajoutant ces parties ensemble selon les signes, & donnant à tang ϕ une valeur ambiguë, nous trouverons les deux valeurs suivantes pour x .

$$I. x = 1, 1097 - 0, 0713 - 0, 0015 = 1, 0369$$

$$II. x = -1, 1097 - 0, 0713 + 0, 0015 = -1, 1795$$

Donc, pour avoir le commencement de l'Eclipse, il faut du tems de l'opposition dans l'orbite soustraire

$$1, 1795^h = 1^h, 10', 770'' = 1^h, 10', 46''$$

& pour avoir la fin de l'Eclipse, il faut ajouter à cette même époque

$$\begin{array}{rcl}
 1, 0369^h & = & 1^h, 2', 214'' = 1^h, 2', 13'' \\
 \text{Tems de l'opposition, Aout} & 8^h, 12^h, 14', 39'' \\
 & - & 1, 10, 46 \\
 & + & 1, 2, 13 \\
 \hline
 \end{array}$$

Commencement de l'Eclipsé à 11, 3, 53

Fin de l'Eclipsé à 13, 16, 52

XIX. Recueillons tout ce que nous venons de trouver ensemble, & nous verrons, que selon mes tables les moments de l'Eclipsé ont dû être à Berlin, tems vrai A. 1748. le 8^{me} Aout

Le commencement à 11^h, 3', 53''

La plus grande obscurité à 12, 10, 23

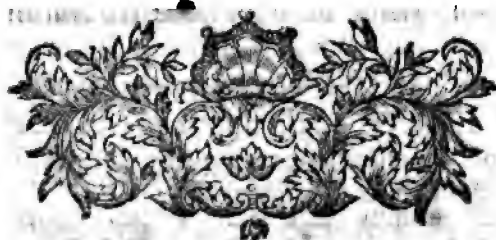
L'opposition dans l'orbite à 12, 14, 39

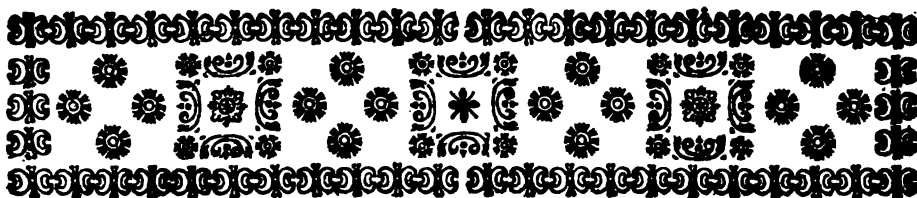
La fin de l'Eclipsé à 13, 16, 52

La grandeur de l'Eclipsé $5 \frac{14}{1000}$ Doigts.

& la durée de 2^h, 12', 49''

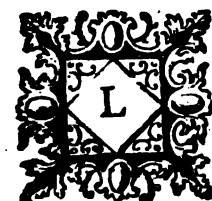
A présent on voit que l'accord de ce calcul avec l'observation est si grand, qu'à peine sauroit on s'attendre à une plus grande conformité; vu qu'on n'est pas encore trop certain de l'augmentation de l'ombre, causée par l'Atmosphère de la terre, & ensuite les observations de ces moments mêmes ne sont pas susceptibles d'une telle précision, qu'on n'en pourroit encore douter d'une minute, puisqu'il est extrêmement difficile de distinguer l'observation de l'ombre même, de celle de la penombre.





O B S E R V A T I O N
DE L'ECLIPSE ANNULAIRE DU SOLEIL
 LE 25. JUILLET 1748. SELON LE NOUVEAU STILE
 A BERLIN,

PAR MR. K I E S.



Le jour de la fameuse Eclipsé du Soleil approchant, je fis tous les préparatifs nécessaires pour la bien observer. Pour cette fin j'examinai soigneusement quel-que tems avant le mouvement de ma pendule pour savoir au juste, si elle répondoit exactement au mouvement moyen du Soleil, & après m'en être bien assuré, je déterminai le midi du 24. Juillet par des hauteurs correspondantes du Soleil avant & après midi, ayant en même tems égard à la variation du tems qui provient du changement de la déclinaison du Soleil, pendant le tems écoulé entre les observations. Le 25. Juillet jour de l'Eclipsé, je pris de nouveau plusieurs hauteurs du bord supérieur du Soleil avant midi, mais je ne fus pas en état l'après-midi de prendre les correspondantes, m'ayant trop affoibli les yeux par cette observation, & par celle de l'Eclipsé même; je m'en tins donc à la conclusion du midi au jour précédent.

Pour l'observation je me suis servi d'une lunette Newtonienne de trois pieds, & comme mon but n'étoit que de déterminer les

points les plus nécessaires, & les plus utiles pour l'Astronomie, je me suis borné aux momens suivans.

Le commencement de l'Eclipse n'a pas été observé à cause des nuages qui nous déroboient l'image du Soleil

L'anneau se ferme à 11^h, 52', 51" tems vrai avant midi

— se rompt à 11, 54, 13

Durée de l'anneau 1, 22

La fin de l'Eclipse est arrivée après midi

à 1^h, 25', 9" tems vrai.

(*) Le diamètre du Soleil mesuré avec le micrometre.

étoit de 31', 42"

celui de la Lune de 29, 54 au milieu de l'Eclipse.

Je passe présentement à quelques Observations physiques. Premièrement, on a très bien remarqué, en laissant tomber l'image du Soleil sur un papier blanc dans la chambre obscure, que le diamètre du Soleil s'est enflé à peu près de sa centième partie au tems de la plus grande obscuracion, & même quelques minutes avant & après ce tems : ce qui donne un argument évident pour l'existence de l'Atmosphere de la Lune, dans laquelle les rayons du Soleil sont rompus : & il est très important que cette découverte se verifie par d'autres observations qu'on fera dans la suite, il s'agit présentement de trouver un moyen de déterminer la quantité de cette Atmosphere lunaire. Entre diverses methodes qui se présentent d'abord à l'esprit, la premiere qui s'offre est d'observer le lieu de la Lune, & de mesurer son diamètre en même tems : comme on fait d'ailleurs, que la partie illuminée de la Lune est toujours proportionnelle au sinus versé de son élongation du Soleil, qu'on mesure la partie éclairée de la Lune aux environs de ses quartiers, la difference entre le calcul & l'observation doit faire connoître la quantité de la réfraction des rayons du Soleil dans l'Atmosphere de la lune.

Ge

(*) Je dois avertir que la vis du micrometre dont je me suis servi pour mesurer les diametres du Soleil & de la Lune, n'étoit pas assez fine pour répondre de quelques secondes, d'autant moins que ce micrometre étoit appliqué à la lunette d'un quart de cercle, dont la lunette est trop petite.

Ce feroit le moyen le plus sur, si les phases illuminées de la Lune étoient bien terminées; c'est pourquoi je conseillerois plutôt de se servir de la maniere qui suit. Qu'on prenne un instrument pareil à celui de Mr. *Hadley*, par lequel on peut mesurer des arcs compris entre deux astres & par le moyen des miroirs, qui y sont appliqués, on joindra les Etoiles de sorte qu'elles paroissent se baiser ensemble, l'une de ces deux doit être celle qui va être éclipsée par la Lune, & l'instrument monté sur une machine *parallactique*. Qu'on mette un cercle de cuivre au foyer de la lunette, qui ait plusieurs fils paralleles, qui se coupent à angles droits, dont la distance entre eux soit connue p. e. de dix en dix secondes; on observera donc, avant que l'Etoile entre sur le bord de la Lune, sous quel fil elle paroît, & à l'instant que le bord de la Lune paroît la toucher, on verra les deux Etoiles qui avant l'attouchement ne paroissent qu'une seule, & la distance des fils qui couvrent les Etoiles, fera connoître la quantité de la réfraction de l'Atmosphere de la la Lune. Comme on peut réiterer fort souvent cette observation, & qu'on peut choisir pour la seconde Etoile celle qu'on voudra, pourvu qu'elle soit à peu près à la même hauteur que celle qui va être éclipsée, on parviendra enfin à s'assurer de la vraie quantité de l'Atmosphere lunaire. Après cette petite digression, je retourne à l'observation de l'Eclipse amulaire. Le disque de la Lune étant tout à fait entré sur celui du Soleil, l'anneau parut si lumineux qu'il eblouit la vue, en le regardant sans verre coloré, ou enfumé. On a remarqué qu'un verre ardent a brulé ce qu'on lui présentoit, jusqu'à ce que la grandeur de l'Eclipse fut de 11 doigts; l'Eclipse ayant passé ce terme, les verres ardents ne firent plus d'effet sur les choses les plus combustibles. Quant à la constitution de l'air, le thermometre de *Fahrenheit* descendoit de six degrez. Il faisoit un air frais dans le tems de la plus grande phase, & le vent étoit aussi plus fort qu'avant, ou après la plus grande obscuration. On croyoit être plongé tout d'un coup dans le crépuscule, à l'instant que l'anneau se forma; cependant il faisoit encore assez de jour pour lire & distinguer des caracteres assez menus. On voyoit très bien la Planete de Venus, & celle de Mars, à la vue simple. Les oiseaux donnoient

des marques qu'ils s'appercevoient de la nuit, & annonçoient le jour à mesure qu'il commençoit à faire plus clair. Je ne dois pas passer sous silence que le bord de la Lune vers le Soleil étoit d'un rouge d'ecarlate fort vif, & finissoit vers l'anneau en couleur d'orange & un jaune tirant sur le pâle. Le bord du Soleil au contraire étoit d'une couleur violette, finissant vers la Lune en couleur verte & celadon. Un phénomène fort remarquable, qui offrit un beau spectacle à la vue, c'est que pendant le tems que l'Eclipse étoit annulaire, l'ombre des feuilles d'arbres, ou de quelque autre corps que ce fut, étoit bordée d'un bel anneau qui avoit toutes les couleurs d'un arc-en-ciel. Ce beau spectacle se perdit; dès que l'anneau du Soleil fut rompu.

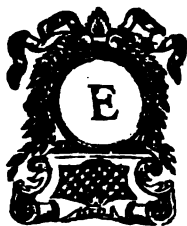
J'ajouterai ici une observation de la même Eclipse annulaire du Soleil faite par Mr. *Polac*, Professeur de Mathématiques à Francfort sur l'Oder, où la latitude déterminée par lui est de $52^{\circ}, 26'$ à Francfort sur l'Oder

le commencement de l'Eclipse arrivoit à	10h, 24', 50''	tems vrai
l'anneau se ferme	à 11, 57, 12	
se rompt	à 12, 1, 0	
durée de l'anneau	4, 12	



SUR L'ATMOSPHERE DE LA LUNE
PROUVEE PAR LA DERNIERE ECLIPSE ANNULAIRE
DU SOLEIL.
PAR M. EULER.

Traduit du Latin.



I.

N observant les momens de l'Eclipse du Soleil que nous eûmes ici le 25 Juillet 1748. & en rendant compte de mes observations*, je n'avois eu pour but que d'arriver à une détermination plus exacte du véritable mouvement de la Lune & de sa parallaxe. Mais il n'a pas laissé de se présenter dans le cours de l'Observation de cette Eclipse quelques autres Phénomènes remarquables, qui ne dépendoient, ni du mouvement de la Lune, ni de sa parallaxe, mais qui sembloient donner à connoître la réalité de la réfraction des rayons qui rasent les bords de la Lune, & décider cette question agitée depuis long tems parmi les Astronomes; Si la Lune est environnée d'une Atmosphere, ou non? C'est ce qui m'engage à examiner ici plus exactement les phénomènes de cette espece, que j'ai observés pendant cette Eclipse, & à en rechercher les causes.

* Voy *Mé-
moir.* de 1747.
p. 250 & suiv.

II. Pour observer cette Eclipse avec plus de succès, & soumettre à la mesure tout ce qu'elle offriroit de remarquable, j'avois préparé dans ma maison une chambre obscure, qui regardoit le Midi, & ayant

ayant dirigé vers le Soleil, par un trou pratiqué à la fenêtre, un tube Astronomique de 9 pieds, je reçus l'image de cet astre sur un papier blanc: J'affermis ce papier perpendiculairement à l'axe de la Lunette à une distance, telle que l'image du Soleil remplit exactement un cercle qui y étoit tracé, & je tirai ce tube jusqu'à ce que l'image fut représentée de la manière la plus distincte sur le papier, & qu'on put discerner clairement toutes les taches du Soleil, dont plusieurs étoient visibles sur son disque. La Machine étoit construite de telle sorte, que tandis que le tube suivoit continuellement le mouvement du Soleil, le papier par un mouvement semblable, conservoit toujours la même distance à l'égard du tube, de sorte que l'image du Soleil demeurât constamment dans le cercle tracé sur le papier.

III. La Machine étant ainsi montée, & l'image du Soleil s'y montrant tout de suite aux yeux, j'attendis l'arrivée de l'Eclipse, dont de petits nuages qui couvroient fréquemment le Soleil ne permirent pas d'observer le commencement. Il restoit même peu d'espérance d'observer les phases suivantes de l'Eclipse, le Ciel se couvrant de plus en plus de nuages. Cependant contre notre attente on put fort bien observer les principales phases, & sur tout l'anneau pendant toute sa durée. Comme les momens en ont été déterminés avec beaucoup de précision par M. Kies, * & qu'il en a fait son rapport à l'Académie, je ne les répéterai pas ici, me bornant uniquement aux choses qui se rapportent au but de ce Mémoire.

* Voy. le Mémoire précédent.

IV. La Lune étant déjà entrée dans le disque du Soleil au delà de la moitié, de sorte que la figure du Soleil paroïssoit déjà semblable à la Lune vers ses quadratures, & que l'angle qui fermoit ses cornes, devenoit fort aigu, je remarquai premièrement que le disque du Soleil ne demeurât plus compris dans le cercle tracé sur notre papier, mais que les pointes des cornes en sortoient, quoique le bord du Soleil le plus éloigné de ces pointes demeurât cependant toujours dans les limites exactes du cercle. Ce Phénomène se présentoit tel qu'on le voit Fig. I. où AEDEA est le cercle tracé sur le papier, & GAGBG la figure du Soleil éclipse, dont les pointes G, G, s'étendoient de part & d'autre au delà du cercle, en sorte que les petites

tes portions $EF G$ débordent, tandis que le reste du bord EAE étoit encore dans une exacte congruence.

V. Ces pointes G, G , continuoient à déborder de plus en plus hors du cercle, à mesure que les angles $G \& G$ des pointes devenoient plus aigus, jusqu'à ce qu'enfin ces pointes se réunirent, & le Soleil se montra sous la forme annulaire, où son disque forma sur le papier un cercle beaucoup plus grand, que celui dans lequel il avoit été d'abord exactement renfermé. Vers le milieu de la durée de cet anneau, on voyoit sa figure peinte sur le papier, telle qu'elle est représentée Fig. 2. où $AZBN$ est le disque du Soleil, dont le point du sommet est en Z , & le point opposé en N , par lequel est menée la droite horizontale AB , dont l'extrémité A regarde l'Orient, & l'autre extrémité B l'Occident : $azbn$ est le disque de la Lune & la droite EF qui passe par les centres $C \& c$ du Soleil & de la Lune, paroît être distante de la verticale ZN d'un angle d'environ 40° , car je n'ai pas pris la mesure exacte de cet angle, étant plus attentif à d'autres phénomènes. La plus grande largeur de l'anneau étoit Ff , & la moindre Ee , qui étoit estimée égale à peu près à la quatrième partie de Ff .

VI. Par le calcul Astronomique j'ai trouvé pour ce tems le demi-diamètre apparent du Soleil $= 952''$ & le demi-diamètre de la Lune $= 898''$, lesquelles mesures, (avant que le disque du Soleil eût souffert la dilatation qui lui arriva vers le tems, où l'anneau commença à se former,) s'accordent assez exactement avec l'observation, en sorte qu'ici la Théorie n'a aucun besoin d'être corrigée. Je conclus outre cela de la durée de l'anneau, que la distance moindre des centres du Soleil & de la Lune devoit avoir été de $53''$ environ ; d'où, si l'on suppose que le disque du Soleil n'ait souffert aucun accroissement dans la région Ff , où étoit la plus grande largeur de l'anneau, puisque nous avons vu que cet accroissement est seulement arrivé dans les endroits, où les bords du Soleil & de la Lune se touchoient réciproquement de plus près, CF étoit $= 952''$, $cf = 898''$ & $Cc = 53$, & par conséquent $Cf = 845$, & à cause de cela la plus grande largeur de l'anneau $Ff = 107''$, ce qui s'accorde assez exactement avec la figure de l'anneau que nous avons tracée.

VII. Il paroît de là, si le disque du Soleil ne s'étoit pas elargi vers la moindre largeur de l'anneau en Ee , quelle auroit dû être cette largeur Ee . Car si on pose $CE = 952''$, à cause de $ce = 898''$ & $Ce = 951''$, la moindre largeur de l'anneau seroit $= 1''$; & cependant elle m'a manifestement paru égale à environ la quatrième partie de la plus grande largeur Ff . La largeur Ee étoit donc à peu près $= 26''$ quoiqu'elle n'eût cependant pas du avoir plus d'une seconde, si le disque de Soleil n'avoit souffert aucune dilatation. A Francfort sur l'Oder M. *Polack* a observé le même phénomène, & la distance des centres du Soleil & de la Lune y étoit encore moindre qu'ici. Car l'anneau y ayant duré 4', j'en conclus que la moindre distance des centres a été d'environ $35''$, la plus grande largeur de l'anneau ayant été $89''$, & la moindre $19''$. Mais la moindre largeur étoit estimée comme sousdouble de la plus grande, & par conséquent de $44''$, en sorte qu'à Francfort de même qu'ici, le disque du Soleil étoit dilaté de $25''$, vers les endroits où la largeur de l'anneau étoit la moindre.

VIII. De là naît donc cette Question: *Quelle a été la cause de la dilatation du disque du Soleil, dans les endroits où le bord de la Lune le touchoit presque intérieurement?* Pour la quantité de cette dilatation, que j'ai estimée $25''$, je ne la crois pas si certaine, qu'il ne puisse s'y être glissée une erreur de plusieurs secondes: car, premièrement la largeur de l'anneau n'a pu être si exactement mesurée; & ensuite les couleurs dont le bord du Soleil & celui de la Lune, étoient constamment revêtus, le premier de violet, & l'autre de rouge, empêchoient de discerner les extrémités de ces bords. Malgré tout cela il ne sauroit demeurer aucun doute, que la moindre largeur de l'anneau n'ait surpassé ici $10''$, & il est à propos d'examiner quelle peut avoir été la cause de sa dilatation.

IX. La Question revient donc à ceci, c'est que nous expliquions, pourquoi l'extrémité du bord du Soleil A , qui étant vu par le rayon, AT , qui frise la Lune au point M devoit paroître contigue de la Lune, n'est pourtant pas vu en A , mais en a , le spectateur étant supposé en T ; de sorte que le lieu apparent de ce point diffère de son vrai lieu de l'angle ATa , que nous avons trouvé de $25''$, quoique nous l'esti-

mions

mions un peu plus petit? C'est en rendant raison de cela, qu'on fera comprendre, comment il peut arriver, que lorsque l'anneau ne devoit plus avoir de largeur, ou presque plus, cette largeur reçoit cependant un accroissement d'autant de secondes, qu'en contient l'angle $A T e$. Car si le bord du Soleil s'éloigne de cette manière de celui de la Lune, dont il est tout à fait près, il est clair que c'est la même cause, en vertu de laquelle les cornes du Soleil s'étendent avant & après l'anneau, & qu'il faut que la largeur de l'anneau même souffre une dilatation, dans l'endroit où elle est la moindre.

X. Avant que d'entreprendre l'explication de ce phénomène, il convient d'écarter d'abord une opinion, qui au premier coup d'oeil n'est pas dénuée de probabilité. Ceux qui ont appris par la description des autres Eclipses annulaires du Soleil, que les deux largeurs de l'anneau, la plus grande & la plus petite, font ensemble une somme, plus grande que la différence entre les diamètres apparens du Soleil & de la Lune; ceux, dis-je, auxquels cette observation est connue, ont soupçonné pour l'ordinaire que, dans l'Eclipse annulaire de Soleil, le diamètre de la Lune paroît un peu moindre, qu'il ne feroit, si on le voyoit hors du Soleil. Mais de la manière, dont nous avons procédé à l'observation, il étoit parfaitement clair que la Lune n'avoit point souffert de diminution, mais que c'étoit le Soleil qui avoit reçu quelque accroissement. Car ceux qui pendant l'Eclipse même ont mesuré le diamètre de la Lune, l'ont trouvé parfaitement conforme au calcul.

XI. Pour revenir donc à cet aggrandissement du disque du Soleil, observé pendant l'Eclipse annulaire, on s'apperçoit d'abord, & par une légère attention à ce phénomène, que la cause doit en être cherchée dans la réfraction des rayons qui rasent le corps de la Lune. En effet, on comprend aisément, que si la Lune étoit environnée de quelque Atmosphère semblable à la nôtre, il devroit à cause de la réfraction des rayons qui la traversent obliquement, en résulter pleinement le même phénomène, qui consiste dans la déflexion des rayons. Non seulement donc il ne paroît rester aucun doute, qu'on doive attribuer à la Lune une certaine Atmosphère, mais on peut aussi déter-

miner la densité même de cette Atmosphere par la quantité de la réfraction.

Fig. 4.

XII. Soit donc le corps de la Lune EMF ceint d'une Atmosphere déliée PQR, que nous supposerons être de la même densité dans toute sa hauteur, quoique sans doute elle devienne, comme celle de la Terre, toujours plus rare, à mesure qu'elle s'éloigne de la surface, jusqu'à ce qu'enfin elle se confond insensiblement avec l'éther, qui remplit tout l'espace celeste. Car comme nous savons par d'autres phenomenes, que l'Atmosphere de la Lune est très subtile, en comparaison de celle dont la Terre est environnée, nous pourrions négliger sans erreur la diverse rareté qui peut y avoir lieu, suivant les diverses distances de la surface de la Lune. Cela posé, chaque rayon de lumiere qui entre dans l'Atmosphere de la Lune, souffrira une certaine réfraction, après laquelle il traversera l'Atmosphere en ligne droite, & lorsqu'il en sortira de nouveau pour rentrer dans l'éther, il éprouvera une nouvelle réfraction semblable à la premiere.

XIII. Considerons à présent le rayon de lumiere SP, partant du point S, soit que ce soit une Etoile, ou une particule appartenante au Soleil, lequel rayon tombe dans l'Atmosphere de la Lune en P, de maniere qu'après sa réfraction il rase la surface de la Lune en M. Le spectateur donc placé au point M de la Lune, n'apperçoit pas à cause de la réfraction le point S dans son vrai lieu, mais en σ , & ce point lui sera représenté dans le Ciel par le rayon MP prolongé après la réfraction. Or comme cette droite MP, parce qu'elle touche la surface de la Lune, représente l'horizon Lunaire, le spectateur placé en M appercevra un point lumineux dans l'horizon, lorsque ce point est encore effectivement caché sous l'horizon à l'angle SP σ ; cet angle SP σ sera donc égal à la réfraction horizontale, que les habitans de la Lune doivent sentir. Appellons donc cet angle SP σ , ou la réfraction horizontale vüe dans la Lune $= \alpha$, jusqu'à ce que nous puissions définir sa valeur avec plus de précision.

XIV. De plus, que ce rayon PM traverse toute l'Atmosphere de la Lune, & qu'il souffre une nouvelle réfraction en Q, où il entre
dans

dans l'éther, d'où suivant la ligne droite QT il parvienne jusqu'à la Terre, & frappe l'oeil de l'observateur en T . Cet observateur jugera donc que le point lumineux, d'où ce rayon partoit, est dans la direction prolongée TQ , & par conséquent situé en s . Mais, si la Lune n'avoit pas été placée entre deux, l'observateur auroit apperçu ce même point dans son vrai lieu S . Que si la distance de ce point S est extrêmement grande, au égard à la distance de la Lune à la Terre, sans cet effet de la Lune, l'observateur T devoit l'appercevoir dans une direction parallèle à la droite PS , laquelle à cause de l'angle PQs égal à l'angle $SPs = \alpha$, sera inclinée à la direction TQ de l'angle double $= 2\alpha$.

XV. Si donc la Lune n'avoit point d'Atmosphère, le point S seroit entièrement invisible pour l'observateur placé en T , & demeureroit caché derriere la Lune à une distance de son bord $= \alpha$. C'est donc l'Atmosphère de la Lune qui rendra ce point S visible, & le montrera à l'observateur T , comme s'il étoit en s ; & comme le bord de la Lune M , à cause du rayon MQT , se rapporte au même point du Ciel s , l'observateur placé en T appercevra un point lumineux S , contigu au bord de la Lune M ; en sorte que la réfraction de l'Atmosphère Lunaire transportera dans le Ciel le point S de son vrai lieu S par l'espace $Ss = 2\alpha$. Donc la vue d'une Étoile, ou d'un autre point lumineux quelconque dans le Ciel, ne nous est dérobée par la Lune, que quand ce point s'est déjà caché derriere elle au delà de l'espace $= 2\alpha$. Tant que cet espace est moindre, le point demeure visible hors du bord de la Lune.

XVI. Mais considérons aussi le cas, où le rayon SP pénétrant par l'Atmosphère de la Lune, ne rase plus son bord, mais passe à une distance donnée MN . Ce rayon souffrira donc une moindre réfraction, tant en P qu'en Q , puisqu'on doit concevoir l'Atmosphère plus rare, à mesure qu'elle s'éloigne de la Lune; néanmoins on pourra également dans cette région plus rare considérer comme une ligne droite la route que le rayon PQ suit en traversant l'Atmosphère. Car un spectateur étant placé à la hauteur MN au dessus de la surface de la Lune, appercevra sans doute une moindre réfraction horizon-

Fig. 5.

tales des Etoiles, & c'est à cette refraction que sera égale l'angle $SP\sigma$, par lequel l'astre S paroitra élevé; & parce que le rayon PQ , qui parvient jusqu'à la Terre T , souffre une pareille refraction en Q , l'observateur placé sur la Terre en T verra le point lumineux S situé en s , en sorte que l'intervalle Ss sera égal dans le Ciel au double angle $SP\sigma$.

XVII. Soit la distance MN de la surface de la Lune telle, que l'observateur placé sur la Terre en T la voye sous l'angle x , & comme toute la hauteur MK de l'Atmosphère de la Lune est fort petite, & la refraction même très petite en Q , le lieu apparent s de l'Etoile S lui paroitra distant du même intervalle $= x$ du bord M de la Lune. Mais le vrai lieu de cette Etoile qu'il appercevroit, si la Lune n'avoit point d'Atmosphère, sera plus proche du centre de la Lune de l'intervalle sS , qui se mesure par le double angle $SP\sigma$. Si donc cet angle $SP\sigma$, où la refraction horizontale, qui répond à la hauteur, $MN = x$ au dessus de la surface de la Lune, est posée $= \zeta$, & qu'on voye l'Etoile éloignée du bord de la Lune de l'intervalle $= x$, il faut, pour en inferer le vrai lieu de l'Etoile, approcher le lieu apparent vers le centre de la Lune par l'intervalle $sS = 2\zeta$. D'où, si pour chaque distance x du bord de la Lune on étoit assuré de la refraction horizontale ζ qui y répond, il seroit aisé de déterminer le vrai lieu de chaque Etoile par son lieu apparent.

XVIII. La dilatation de l'anneau Solaire observée à Berlin, donne lieu de conclurre, que comme l'anneau, lorsqu'il étoit le plus étroit, ne devoit avoir qu'une seconde, cette largeur qui étoit prête à s'évanouir a reçu un accroissement de $25''$, environ. Par conséquent si le bord du Soleil, ou quelque Etoile, ont paru à $25''$ de distance du bord de la Lune, la vraie distance doit être estimée tout à fait nulle; à moins que peut être, à cause des raisons déjà indiquées, au lieu de $25''$ il ne faille choisir un moindre nombre, comme 20 ou 15. Alors nous savons par les Observations très abondantes, dont on se sert communément pour combattre l'Atmosphère de la Lune, que dès que la distance d'une Etoile au bord de la Lune surpasse seulement

une

une minute, le changement que la réfraction Lunaire apporte à son lieu, devient tout à fait imperceptible.

XX. Comme il paroît extrêmement difficile de déterminer par la théorie de la réfraction, l'effet de cette réfraction pour chaque distance du bord de la Lune, parce que la diminution de la densité de l'Atmosphère nous est inconnue, il ne paroît y avoir de meilleur moyen à employer que celui de l'estimation, en cherchant une formule, qui satisfasse le mieux aux phénomènes. Soit donc la distance apparente d'une Etoile quelconque à l'égard du bord de la Lune $= x''$, & l'effet de la réfraction qui répond à cette distance $= z''$, en sorte qu'on obtienne par ce moyen le vrai lieu de l'Etoile, en approchant davantage du centre de la Lune le lieu apparent de z'' . Il faudra donc définir cette correction z par la distance x , de manière qu'en posant $x = 20$, il en résulte aussi $z = 20$; mais qu'au cas que x soit $= 60$, alors la valeur de z devienne si petite qu'on ne puisse presque l'apercevoir, comme si elle étoit de $5''$.

XX. Pour cet effet je prendrai une formule plus étendue, & j'établirai $z = \frac{A}{1 + B x^n}$, parce que je vois qu'une telle formule est extrêmement commode, lors que la distance x devient considérable, pour faire que la valeur z soit la plus petite possible, pourvu que l'exposant n ne soit que médiocrement grand. Que si l'on prend $n = 2$, & qu'on satisfasse aux deux conditions précédentes, on trou-

vera cette formule, $z = \frac{32}{1 + 0,0015 x^2}$, ou $z = \frac{32}{1 + \frac{1}{666} x^2}$;

mais si, au lieu de $5''$ que nous attribuons à la distance $x = 60''$, nous

posons $4''$, cela donnera $z = \frac{40}{1 + \frac{1}{400} x^2}$. Nous nous servi-

rons donc un peu de cette formule, comme de la plus simple, jusqu'à ce que nous puissions en employer une plus certaine; car, quand même il y auroit de l'erreur, les conclusions qui en seront tirées, ne s'écarteront

s'écarteront pourtant pas de la vérité, d'une manière qui soit sensible.

XXI. C'est donc sur cette formule que j'ai construit la Table suivante, qui pour chaque distance apparente, où un Astre se trouve au bord de la Lune, fournit la correction suivant laquelle cette distance doit être diminuée, pour découvrir la véritable. La distance apparente du bord de la Lune est marquée par x , & la correction, ou l'effet de la refraction par z .

x	z	x	z	x	z	x	z	x	z	x	z
0''	40''	10''	32''	20''	20''	30''	12''	40''	8''	90''	2''
1	40	11	31	21	19	31	12	45	7	100	2
2	40	12	29	22	18	32	11	50	6	110	1
3	39	13	28	23	17	33	11	55	5	120	1
4	38	14	27	24	16	34	10	60	4	130	1
5	37	15	26	25	15	35	10	65	4	140	1
6	36	16	24	26	15	36	10	70	3	150	1
7	35	17	23	27	14	37	9	75	3	160	1
8	34	18	22	28	13	38	9	80	2	170	$\frac{1}{2}$
9	33	19	21	29	13	39	8	85	2	180	$\frac{1}{4}$
10	32	20	20	30	12	40	8	90	2		

XXII. En suivant donc cette Table, on satisfait non seulement au phénomène de la dernière Eclipsé de Soleil, en sorte que le bord du Soleil est effectivement contigu au bord de la Lune, lorsqu'il paroît en être distant de 20'', mais encore on reconnoît par là que l'effet de la réfraction Lunaire a été imperceptible, avant que la proximité du bord de la Lune ait été au dessous d'une minute. En effet nous avons vu qu'à la distance de 180'', ou 3', l'effet n'alloit pas même à une seconde; & pouvoit par conséquent être compté pour rien; ce qui s'accorde parfaitement avec les Observations. Or comme cette Table indique, que si la distance apparente x évanouît tout à fait, l'effet de la refraction est 40'', c'est à dire, que le point lumineux est

est effectivement caché à cet intervalle derrière le disque de la Lune: si ce nombre étoit exactement juste, il s'ensuivroit que la réfraction horizontale pour les habitans de la Lune est de 20". On comprend donc en même tems, que quand même cette Table renfermeroit quelque erreur, cependant la réfraction horizontale ne s'écarteroit pas beaucoup du vrai.

XXIII. Aussi-tot donc que le bord du Soleil est caché moins de 40", derrière la Lune, il doit nous être visible; d'où il résulte, que si nous voulons définir une Eclipse annulaire du Soleil par le calcul, le commencement de l'anneau arrivera, avant que la distance des centres devienne égale à l'excès du demi-diametre du Soleil sur le demi-diametre de la Lune: & de la même maniere, l'anneau disparaîtra un peu après que la distance des centres est devenue égale à la différence des demi-diametres. C'est à dire, que si l'on prend la parallaxe horizontale dans la Lune de 20", l'anneau devroit paroître aussi-tot que la distance des centres surpasseroit de 40" la différence des demi-diametres; & par conséquent l'Eclipse seroit annulaire, quand même la distance des centres ne deviendrait jamais moindre, que la différence des demi-diametres, pourvu que cette distance ne surpassât pas cette différence de plus de 40". L'Atmosphère de la Lune fait donc qu'une Eclipse, qui sans elle ne seroit pas annulaire, paroît cependant telle; & que l'anneau dure plus longtems, qu'il ne devroit durer suivant le calcul, en négligeant l'effet de l'Atmosphère de la Lune.

XXIV. L'anneau ne sauroit pourtant paroître durer aussi longtems, que cette réfraction de 40" le demanderoit; car, de même que l'eclat du Soleil empêche de voir les Etoiles dans le Ciel, il est fort vraisemblable que l'anneau ne sauroit être apperçu du côté où il est trop étroit. En effet, tant que la largeur de l'anneau est extrêmement petite, & ne s'accroît pas au delà de quelques secondes, elle sera invisible, & l'anneau ne se montrera, qu'après avoir acquis une largeur considérable. J'ai aussi observé dans la dernière Eclipse que l'anneau avoit paru tout à coup avec une largeur remarquable, & qu'il ne s'étoit point formé peu à peu & par degrés; ce qui prouve manifestement, qu'à cause de la lumière du reste du Soleil, cet an-

neau n'a pu devenir visible, qu'après avoir aquis une largeur suffisante pour faire impression sur notre vûe.

XXV. Il convient aussi de remarquer ici, que ceux qui ont regardé directement le Soleil par un tube Astronomique, ont vu plus longtems l'anneau, que ceux qui ont considéré l'Image du Soleil représentée sur le papier. Les premiers l'ont appercû pendant l'espace de 82'', au lieu qu'il s'est à peine montré aux autres pendant une minute entiere. La raison de cette difference vient sans doute de ce que ceux qui regardoient le Soleil, recevoient une plus forte impression de ses rayons, & pouvoient par conséquent remarquer l'anneau, lorsque sa largeur étoit encore fort petite, au lieu que l'Image du Soleil se peignant beaucoup plus foiblement sur le papier, il n'est pas étonnant que l'anneau ait commencé à y paroître plus tard, & ait fini plutot; puisqu'ayant encore une largeur assez considerable, l'impression qu'en recevoit le papier étoit pourtant trop foible pour être appercüe.

XXVI. C'est aussi pour cela que tant avant qu'après l'anneau, lors que le Soleil paroïssoit en croissant, les pointes de ses cornes ne s'exprimoient pas parfaitement sur le papier, mais elles paroïssoient obtuses, & comme coupées vers les extremités; phénomène, dont la cause est manifeste par tout ce que nous avons dit. En effet les extremités des pointes G & G (Fig. I.) étoient trop étroites, pour que les rayons qui en partoient, produisissent leur image sur le papier, ou dans l'oeil. Car, dès là que la largeur de cette pointe ne surpassoit pas le diametre d'une Etoile, qui auroit été invisible dans cet endroit, elle ne pouvoit arriver à l'oeil de l'observateur; & dans l'endroit où l'on voyoit le bout des cornes, il y avoit déjà une largeur assez considerable. Ce phénomène est donc semblable à celui que nous avons rapporté ci-dessus, par rapport à la largeur que l'anneau doit avoir, avant que d'affecter le sens de la vûe.

XXVII. Pour cette cause donc, il ne faut pas placer le commencement de l'anneau à l'instant, où la distance des centres du Soleil & de la Lune excède de 40'' la difference des demi-diametres, si tant est que nous estimions juste la réfraction horizontale dans la Lune
cela

en la faisant de 20''; mais le commencement de l'anneau doit être placé où sa largeur devient assez grande, pour surpasser le diamètre des Etoiles invisibles dans cette région. Quant à moi, la largeur de l'anneau, au moment qu'il a paru, ne m'a pas semblé moindre que de 20''; d'où l'on peut inferer que l'anneau ne devient visible, que quand sa largeur s'est accrûe au delà de 20'', & qu' alors il commence à se montrer tout à coup avec cette largeur. On ne sauroit pourtant définir ce terme avec certitude, puisqu' à proportion de la bonté du tube par lequel on regarde le Soleil, on apperçoit l'anneau se fermer plutôt, ou plus tard; & lorsqu'on reçoit l'image du Soleil sur le papier, cette différence s'étend encore plus loin.

XXVIII. Pour définir par le calcul les Eclipses annulaires de Soleil, soit

Fig. 1

le demi-diamètre apparent du Soleil $= a$

le demi-diamètre apparent de la Lune $= b$

& la différence des demi-diamètres $a - b = d$.

Soit de plus la droite AB la route apparente du centre de la Lune à l'égard du centre du Soleil, qui soit considéré comme immobile en S. Alors la perpendiculaire SL tombant sur AB fournira la moindre distance des centres, qui soit $SL = c$, & cette distance SL sera fort petite, si l'Eclipse est annulaire. Que l'Eclipse commence, lorsque le centre de la Lune parviendra en A, & que la fin tombe en B; la droite SA aussi bien que SB sera donc égale à la somme des demi-diamètres $a + b$; & parceque SL est si petite, la droite même AB, ou la route apparente, que le centre de la Lune décrit depuis le commencement jusqu'à la fin, pourra être censée égale à la somme SA + SB, en sorte que AB soit $= 2a + 2b$.

XXIX. Soit de plus t le tems de toute l'Eclipse, & le centre de la Lune peut être supposé parcourir l'espace $AB = 2a + 2b$ d'une manière uniforme pendant le tems t . Ces choses étant posées, l'anneau commencera à paroître, lorsque le centre de la Lune sera parvenu en M, en sorte que SM soit égal à la différence des demi-diamètres $a - b = d$, augmentée d'abord de 40'', & ensuite diminuée de la quantité que doit avoir la largeur de l'anneau, avant que de devenir visible. Si donc nous supposons que l'anneau ne puisse être apperçu,

à moins que sa largeur ne surpasse $20''$, le commencement de l'anneau tombera sur M, en sorte que $SM = d + 40'' - 20'' = d + 20''$; & de la même manière, en prenant $SN = d + 20''$, la fin de l'anneau s'accordera avec le lieu du centre de la Lune N. Pourvu donc que $d + 20''$ soit plus grand que $SL = c$, l'Eclipse sera annulaire, c'est à dire, pourvu que la moindre distance des centres SL soit moindre que $d + 20''$.

XXX. On trouvera donc la durée de l'anneau, en cherchant la quatrième proportionnelle aux distances AB, MN & de tems t , Or ML sera $= \sqrt{(d + 20'')^2 - u}$, & par conséquent MN $= 2(\sqrt{(d + 20'')^2 - cc})$, d'où si l'on nomme le tems, pendant lequel l'anneau est visible, $= \theta$, on aura

$$2a + 2b : 2\sqrt{(d + 20'')^2 - cc} = t : \theta$$

& par conf. $(d + 20'')^2 tt - cc tt = (a + b)^2 \theta \theta$.

De là, si la durée de l'anneau θ est connue, aussi bien que la durée de l'Eclipse entière t , & les demi-diamètres apparens du Soleil & de la Lune a & b , d'où l'on a $d = a - b$, on conclura réciproquement de l'observation de l'Eclipse annulaire la moindre distance des centres du Soleil & de la Lune $SL = c$. Car on aura

$$c = \sqrt{(d + 20'')^2 - (a + b)^2 \frac{\theta \theta}{t t}}$$

XXXI. A présent, si nous voulons appliquer cette formule à la dernière Eclipse annulaire de Soleil, nous avons

le demi-diamètre apparent du Soleil $a = 952''$

le demi-diamètre apparent de la Lune $b = 898$

& par conf. $a - b = d = 54''$, & $d + 20'' = 74''$.

Ensuite le tems de l'Eclipse entière, recueilli des observations, est $34, 6'$, & le tems de la durée de l'anneau $1', 22''$; d'où résultera $t = 11160''$ & $\theta = 82''$, & à cause de $a + b = 1850$, on trouvera la moindre di-

stance des centres SL $= c = \sqrt{74^2 - \frac{1850^2 \cdot 82^2}{11160^2}} = \sqrt{5291} = 72''$,

$44'''$. La moindre distance des centres auroit donc été $72 \frac{1}{2}$ secondes, que par le calcul j'avois néanmoins trouvée seulement de $51''$.

XXXII.

XXXII. Or j'ai fait voir dans ma Dissertation precedente*, où ^{* Voyez. Mem. de 1747. p. 250. & f.} j'ai ramené cette Eclipsé au calcul, que la parallaxe de la Lune, telle qu'on la suppose ordinairement dans les Tables, doit être considérablement diminuée, afin que la moindre distance des centres aille à 51'', & il faudroit qu'elle le fut encore beaucoup davantage pour que cette augmentation de la moindre distance des centres parvint jusqu'à 72''. Or, comme les élémens de cette Eclipsé ne paroissent pas différer si considérablement du vrai, il est plus vraisemblable que la différence des demi-diamètres d ne doit pas être augmentée de 20'', mais d'un moindre nombre; ce qui arriveroit, si la réfraction horizontale dans la Lune n'étoit pas mise à 20'', mais seulement à 15''; car alors, au lieu de $d + 20$, il faudroit écrire $d + 10$, ou 64'', d'où résulteroit $c = 62 \frac{1}{2}$ '', en sorte que la distance des centres trouvée par le calcul de 51'' devroit seulement être augmentée de $11 \frac{1}{2}$; or il est assez probable que les élémens de cette Eclipsé demandent cette petite correction.

XXXIII. Ces argumens établissent donc d'une maniere indubitable, que la Lune a aussi une Atmosphere, quoiqu'elle soit peut-être encore plus déliée, que ne l'estiment nos observations. Car le disque du Soleil ayant reçu un accroissement remarquable vers le milieu de l'Eclipsé, quoiqu'on n'ait pas pu le mesurer avec exactitude, ce phénomène ne peut être attribué à aucune autre cause qu'à l'Atmosphere de la Lune. Je ne demande pourtant pas, qu'on fasse trop de fonds sur les déterminations que j'ai données pour la réfraction des rayons qui passent par l'Atmosphere de la Lune; & il est même fort vraisemblable par les observations comparées à la Theorie, que la réfraction horizontale de la Lune, que j'avois mise à 20'', va à peine au delà de 10''; d'où le diametre du Soleil peut recevoir un accroissement de 20''. Mais il est encore moins possible d'établir quelque chose de certain sur la diminution de cette réfraction, d'une maniere qui convienne aux rayons qui passent plus loin de la Lune; quoique cette diminution paroisse si grande, que la réfraction devient tout à fait imperceptible, pour les rayons qui traversent l'Atmosphere de la Lune à quelques minutes de distance de son bord.

XXXIV. S'il nous arrivoit d'observer encore une fois une semblable Eclipsé annulaire de Soleil, il faudroit soumettre à une mesure exacte tous les phénomènes que nous fourniroit l'accroissement du disque du Soleil, afin de définir par là non seulement la réfraction des rayons qui rasent le bord de la Lune, mais encore la Loi que suit la réfraction, à l'égard des rayons qui passent plus loin de la Lune. Mais comme il n'est presque pas permis de nous attendre encore à une pareille Eclipsé, il faudra recourir à d'autres phénomènes, qui s'offrent plus souvent à nos regards. De ce genre ceux qui nous paroissent les plus propres au but dont il s'agit, ce sont les occultations des Etoiles fixes par la Lune; car, comme on peut appercevoir une Etoile fixe jusqu'à ce qu'elle devienne contiguë à la Lune, il faudra qu'on remarque dans son lieu quelque changement, qui proviendra de la réfraction Lunaire, pourvu que les instrumens se trouvent assez exacts pour indiquer ces petits détails.

XXXV. Qu'on fasse donc choix d'une Etoile fixe, si voisine de celle qui souffrira l'occultation de la Lune, qu'on puisse les voir toutes deux à la fois par le tube; & que peu de tems avant que l'occultation arrive, on mesure par le moyen d'un excellent Micrometre la distance de ces Etoiles, qui paroît pouvoir se trouver à une seconde près, pourvu que la longueur du tube ne soit pas moindre de dix pieds, & que la distance des Etoiles n'excede pas 15'. De cette maniere, parce que les rayons qui partent de l'Etoile qui va entrer dans l'occultation, ne souffrent encore aucune réfraction, on trouvera la vraie distance de ces Etoiles assez exactement exprimée en secondes. Alors qu'on attende l'occultation, & qu'au moment même où elle arrive, on mesure de nouveau la distance de ces Etoiles, en remarquant la différence entre cette distance actuelle, & celle qui avoit été trouvée auparavant; & de la comparaison de ces distances on conclura aisément la réfraction horizontale de la Lune, pourvu que le diamètre apparent de la Lune ait été connu, aussi bien que la situation à l'égard des deux Etoiles au moment de l'occultation; & si l'on ne peut déterminer ces choses en même tems par l'observation, il n'y a qu'à les tirer de la Théorie du mouvement de la Lune.

XXXVI.

XXXVI. En effet, soit la distance vraie des Etoiles $\equiv m''$, que le Micrometre aura indiquée longtems avant l'occultation, & qu'au moment même de l'occultation, l'Etoile qui va la souffrir, paroisse au bord de la Lune au point S; que l'autre Etoile soit en A, & alors supposons que la distance AS de ces Etoiles soit trouvée moindre, en sorte que AS soit $\equiv m'' - \mu''$. De plus, comme par la Theorie le demi-diametre apparent de la Lune est assez exactement donné, & qu'on peut connoître l'angle ASL, ou par la Theorie, ou par la durée de l'occultation, ou de quelque autre maniere; soit cet angle ASL $\equiv \phi$, & parce qu'à cause de la réfraction le lieu de l'Etoile s'éloigne du centre de la Lune, que le vrai lieu de l'Etoile soit dans ce moment en s, on aura $As \equiv m''$, & si $As \equiv As$ on retranche $ST \equiv \mu''$, d'où à cause de l'angle $Sst \equiv 180^\circ - \phi$, on conclurra

assez exactement l'effet de la réfraction $Ss = \frac{\mu''}{\cos(180^\circ - \phi)}$
 $\equiv - \frac{\mu''}{\cos \phi}$, à la moitié duquel la réfraction horizontale de la Lune doit être censée égale.

XXXVII. On fera bien de choisir, pour parvenir à cette fin, les occultations dans lesquelles l'Etoile fixe S entre sous le bord obscur de la Lune, ce qui arrive vers le premier quartier. Car si l'Etoile arrive au bord éclairé de la Lune, sa lumière est déjà obscurcie avant l'occultation par l'éclat de la Lune, de maniere qu'elle disparoit avant le moment de l'occultation, à moins qu'elle ne soit de la premiere grandeur. En effet, quoique dans ce cas le bord de la Lune ne paroisse pas, cependant le moment même de l'occultation indique cet instant, où l'Etoile étoit contiguë au bord de la Lune. Cependant il ne sera pas inutile d'examiner aussi quelquefois l'arrivée des Etoiles au bord éclairé de la Lune, pour connoître par là, s'il y a quelque difference entre la réfraction auprès du bord éclairé, & la réfraction auprès du bord obscur? Car l'Atmosphère de la Lune étant continuellement exposée aux rayons du Soleil du côté de la région éclairée, on a lieu de soupçonner qu'elle est tellement atténuée dans ce tems-là, que

que la réfraction en devient beaucoup moindre. Et c'est peut-être là la cause, qui a empêché de remarquer jusqu'ici cet effet de la réfraction dans les occultations.

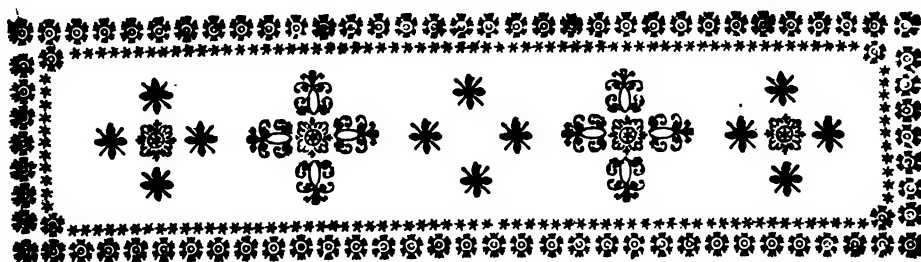
XXXVIII. Ensuite une des choses auxquelles il faut apporter le plus de soin, c'est, avant que l'Etoile se cache, de rechercher perpétuellement, & à chaque moment, avec une extrême diligence, la distance de l'autre Etoile fixe, parce que nous avons prouvé que cette distance doit diminuer peu à peu, avant son arrivée au bord de la Lune. Car, par cette suite d'observations, & en appelant la Theorie au secours, on pourra conclurre pour chaque Observation la distance apparente de l'Etoile au bord de la Lune, & l'on pourra déterminer la réfraction qui lui convient, d'une manière semblable à celle qui j'ai recommandée ci-devant pour le moment même de l'occultation. Et après que plusieurs Observations de cette nature auront été faites avec exactitude, on pourra s'en servir pour corriger la Table donnée au §. XXI. ou plutôt pour en dresser sans peine une nouvelle, à l'aide de laquelle tous les phénomènes, qui naissent de l'Atmosphère de la Lune, pourront dans la suite être assignés avec beaucoup d'exactitude.

XXXIX. On n'a donc pas le moindre sujet de s'étonner que cette célèbre Question, agitée déjà depuis longtems parmi les Astronomes; *Si la Lune a une Atmosphère, ou non?* n'ait pas encore été décidée. Car, quoique les occultations des Etoiles fixes par la Lune arrivent très fréquemment, cependant l'effet de la réfraction est si petit dans les Etoiles fixes elles-mêmes, qui souffrent l'occultation, qu'on ne peut l'apercevoir en aucune manière, à moins que leurs distances n'aient déjà été très soigneusement examinées par d'autres, & qu'on ne les mesure de nouveau avec toute l'exactitude possible, vers le tems même de l'occultation. Or il n'y a peut-être eu encore aucun Astronome, auquel il soit venu dans l'esprit de suivre cette voye pour faire des recherches sur l'Atmosphère de la Lune; ou s'il y en a eu qui soient par hazard tombés sur cette methode, ils ont été forcés d'abandonner leur travail, faute d'instrumens assez exacts. Je ne sai, si ceux qui voudroient présentement prendre cette peine, ne feroient

seroient pas bien de préférer le Micrometre de feu Mr. *Kirch*, pourvu que les vis se terminent interieurement en pointe, à tous ceux qu'on fait à present avec tant de soin & à grands fraix. Car pourvu que les pointes des vis soyent une fois appliquées aux deux Etoiles, on s'appercvra facilement, si la distance des Etoiles diminue, & la diminution même se définira avec tout aussi peu de peine par la révolution des vis.

XL. Les principes d'une saine Physique mettent eux mêmes l'Atmosphere de la Lune hors de doute ; mais ce que les Observations nous ont decouvert, n'en est pas moins admirable, c'est que cette Atmosphere de la Lune soit d'une si grande ténuité, que son effet est presque imperceptible. Car la réfraction horizontale sur la Terre étant de plus d'un demi degré, si la Lune avoit une pareille Atmosphere, les Astres, en approchant du bord de la Lune, seroient transportés de leur place de plus d'un degré. Mais cet effet surpassant à peine 10", il faut que l'air de la Lune soit presque 200 fois plus rare que le notre : d'où l'on peut conclurre, ou qu'il ne monte point de tout de vapeurs de la surface de la Lune, ou que la matiere de la Lune est si solide & si sèche, qu'elle n'est presque sujette à aucune évaporation. Aussi par l'usage des longs tubes les Astronomes ont déjà appris, que ces taches obscures dans la Lune, qui sont prises vulgairement pour des eaux & des lacs, doivent plutot être des lieux arides, des cavernes, ou des forets, que des contrées humides.

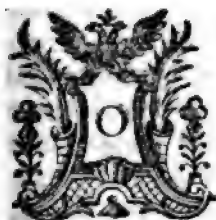




SUR LE FROTTEMENT

DES CORPS SOLIDES,

PAR M. EULER.



I.

N a remarqué, que dans la pluspart des machines le frottement est si considérable, qu'une bonne partie des forces, qui sont requises pour mettre la machine en mouvement, n'est employée qu'à surmonter cette résistance: de sorte que s'il étoit possible de délivrer les machines du frottement, une beaucoup plus petite quantité de forces seroit suffisante à produire le même effet. Tous les Méceniciens conviennent aussi, qu'un des principaux articles, desquels dépend la dernière perfection des machines, consiste dans la diminution du frottement, & c'est dans cette vue, qu'ils ont tâché depuis longtems de rechercher la nature & la quantité du frottement, pour en découvrir les moyens de le diminuer, ou de le faire évanouir tout à fait, s'il étoit possible.

II. Le frottement se manifeste toutes les fois, qu'un corps doit glisser sur la surface d'un autre corps; car quelque polies, que soient les surfaces des corps qui glissent les uns sur les autres, le mouvement y rencontre toujours quelque résistance, qui le détruit bientôt entièrement, à moins qu'il ne soit renouvelé par l'action réitérée de nouvelles

velles forces. Cependant il n'y a aucun doute, que le frottement ne devienne d'autant plus petit, plus les surfaces des corps, qui glissent les uns sur les autres, seront polies & unies, afin qu'il ne se trouve plus de petites inégalités, qui puissent arreter le mouvement. C'est par cette raison, que les traîneaux glissent assez aisément sur la glace; & que dans les machines on éprouve une diminution considérable du frottement, en enduisant de la graisse les surfaces, qui se frottent mutuellement; puisque la graisse sert à rendre ces surfaces plus égales & plus unies.

III. Cependant les matieres, dont on se sert dans la construction des Machines, comme les bois, & les metaux, ne sont pas susceptibles d'un tel degré de polissure, que le frottement ne soit pas encore très considérable: & l'expérience a fait voir, que la résistance, dont toutes ces matieres s'opposent au mouvement, est presque la même, & égale à une partie fort considérable de leur poids entier. Mr. *Amonson* soutint, que le frottement étoit toujours égal au tiers du poids d'un corps, qui se mouvoit sur une surface horizontale, ou généralement au tiers de la force, dont le corps étoit pressé contre la surface, sur laquelle il glissoit. D'autres ont trouvé la quantité du frottement un peu différente, & Mr. *Bisfinger* ne donne au frottement que la quatrième partie de la pression. Comme cela dépend du degré de polissure, qu'ont les surfaces des corps, il n'est pas surprenant, que les expériences ne donnent pas toujours la même quantité de frottement.

IV. Mais une circonstance bien remarquable, dont tous ceux qui ont examiné le frottement par les expériences, sont d'accord; c'est que la quantité du frottement dépend uniquement du poids, ou de la force, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il est entraîné; & que ni la figure du corps, ni la grandeur de sa base, n'entrent en aucune maniere dans la détermination du frottement. Car si le frottement étoit causé par l'arrachement des petits filets, ou par l'enfoncement des petites prominences, qui se trouvent sur les surfaces, qui glissent l'une sur l'autre, on devroit penser, que plus les surfaces, qui se touchent seroient larges, le frottement en devroit devenir plus

grand. Peut-être même, que cette circonstance contribuë quelque chose, en des matieres fileuses, & d'autres d'une semblable nature; mais dans les bois & metaux, dont on a fait principalement les experiences, on doit convenir que la largeur de la base ne sert, ni à augmenter, ni à diminuer le frottement.

Fig. 1.

V. Donc si un corps ABCD est pressé contre la surface MN par une force quelconque GP, qui soit $\equiv P$, soit que ce soit le poids du corps ABCD, si la surface MN est horizontale, ou qu'il y ait encore une autre force, dont le corps soit poussé à la surface; dans ce cas il faut une certaine force EF, avant qu'on soit en état de remuer ce corps, & de le tirer suivant la direction BN. On sait, que s'il n'y avoit point de frottement, la moindre force EF seroit capable de mettre ce corps en mouvement. Mais si le frottement est égal à un tiers de la force P, ou que nous le posions $\equiv \frac{m}{n} P$, pour ne nous pas borner à une hypothese, qui pourroit être trop particuliere; alors tant que la force EF sera plus petite que $\frac{m}{n} P$, le corps demeurera en repos, de même que s'il n'étoit sollicité d'aucune force. Or dès qu'on emploiera une force EF plus grande que $\frac{m}{n} P$, le corps sera actuellement entraîné selon la direction BN; mais le mouvement ne sera produit, que par l'excès de la force EF sur le frottement $\frac{m}{n} P$.

VI. Le frottement doit donc être regardé comme une force $\equiv \frac{m}{n} P$, dont le corps est tiré en arriere selon la direction AM, qui est toujours contraire à celle du mouvement du corps, & passe par l'attouchement AB. Or elle est bien differente des autres forces réelles, qui peuvent agir sur le corps; car elle ne produit aucun effet, que lorsque le corps se trouve actuellement en mouvement, & ce n'est qu'alors, qu'elle fait le même effet, que si le corps ABCD étoit effectivement

diversément sollicité en arrière selon la direction A M. Tant que le corps est en repos, & qu'il n'est tiré que par des forces moindres que le frottement, tout son effet ne consiste qu'en détruisant celui que ces forces devroient produire elles mêmes. Ainsi nommant la force $EF = F$, le corps n'en recevra aucun mouvement, à moins que F ne surpasse la valeur du frottement $\frac{m}{n} P$; mais dès que $F > \frac{m}{n} P$ le corps recevra une acceleration, qui convient à l'excès $F - \frac{m}{n} P$;

& il ne s'ensuit pas, que si $F < \frac{m}{n} P$, l'acceleration devienne negative.

VII. Cela paroitra d'abord fort étrange, & contraire à la loi de continuité, de sorte que la nature semble faire ici un saut, ce qui n'arrive jamais dans l'action des autres forces. Cependant on peut se représenter l'action du frottement, d'une maniere, qui levera tous les doutes, & qui sera conforme à l'action des autres forces: car je ferai voir, qu'on pourra produire par la seule action de la gravité un effet tout à fait semblable à celui du frottement, par lequel on pourroit même découvrir la nature du frottement, quand même elle ne seroit pas encore connue par l'experience. Cette consideration servira aussi à faire voir, en quoi consiste la veritable cause du frottement, & d'où vient cette résistance, qu'il oppose au mouvement. Car quoique peut-être la veritable cause du frottement ne convienne pas précisément avec celle que je vai représenter, la parfaite ressemblance qu'on y remarquera, ne laissera aucun doute sur la possibilité des effets, qui paroissent si étranges.

VIII. Sur la ligne horizontale MN soient aG , bG , deux plans également inclinés, qui forment en G l'angle aGb , dans lequel soit enfoncé le corps ABCD avec sa base pointuë AGB, dont l'angle AGB soit précisément égal à aGb . Dans cette situation le corps ABCD sera non seulement en équilibre, mais aussi une petite force EF, qui lui est appliquée horizontalement ne sera pas capable de le mettre

mettre en mouvement, quoique les faces, dont ce corps touche les plans inclinés soient parfaitement polies, & qu'aucun frottement n'y ait lieu. Car pour que la force QF puisse mouvoir le corps $ABCD$, il faut qu'elle le fasse monter sur le plan incliné Gb , & partant elle doit être plus grande que la partie du poids du corps, laquelle le sollicite dans la direction contraire GQ . Ainsi ce corps $ABCD$ se trouve dans un état fort semblable à celui du frottement, puisque la force EF n'est pas capable de le mouvoir, tandis qu'elle est moindre que le degré requis pour vaincre la pente du plan incliné.

IX. La ressemblance paroitra encore davantage, si nous déterminons la quantité de la force EF , qui est requise pour mettre le corps en mouvement. Soit pour cet effet l'angle $MGa = NGb = \alpha$, le poids du corps $ABCD = P$, dont il est sollicité en bas selon la direction verticale GP ; & la force $EF = F$, qui tire le corps suivant la direction horizontale EF . Puisque le corps ne peut être mis en mouvement, que selon la direction Gb , je décompose la force $EF = F$ suivant la direction EH parallèle à Gb , & FH qui y est normale: l'angle FEH étant $= NGb = \alpha$, la force EH sera $= F \cos \alpha$, & ce n'est que celle-cy qui est employée à mettre le corps en mouvement. Or dès que le mouvement va commencer, le poids du corps, ou la force $GP = P$ s'y oppose par sa partie GQ , qui résulte de la résolution suivant les directions GQ & PQ , dont celle-cy est perpendiculaire à GQ . Donc l'angle GPQ étant $= \alpha$, la force GQ sera $= P \sin \alpha$: d'où l'on voit que le corps ne pourra être mis en mouvement, que la force $F \cos \alpha$ ne soit pas plus grande que $P \sin \alpha$.

X. Donc tant qu'il sera $F \cos \alpha < P \sin \alpha$, le corps $ABCD$ restera en repos, & ne recevra aucun mouvement de l'action de la force $EF = F$. Or si $F \cos \alpha = P \sin \alpha$ ou $F = P \tan \alpha$, le corps sera, pour ainsi dire, en équilibre, ou tout prêt à se mouvoir, dès que la force F devient tant soit peu plus grande que $P \tan \alpha$: & quand cela arrive que $F > P \tan \alpha$, l'accélération du corps suivant la direction Gb sera produite par l'excès de la force $EH = F \cos \alpha$ sur $P \sin \alpha$, c'est à dire par $F \cos \alpha - P \sin \alpha$. Par conséquent la résistance,

ce, qu'il faut vaincre dans ce cas, avant que le corps puisse être remué, sera $\equiv P \sin \alpha$, laquelle étant égale à une partie du poids du corps, & ne dépendant nullement de la largeur de la base AGB , dont ce corps touche la surface aGb , il en paroît une assez parfaite ressemblance entre ce cas, & celui du frottement; & pour rendre ces cas égaux, on n'a qu'à faire $\sin \alpha \equiv \frac{1}{3}$, dans l'hypothèse d'*Amontons* ou les angles MGa , & $NGb \equiv 19^\circ, 29'$: or dans l'hypothèse de *Mr. Bisfinger* ces angles seront $\equiv 14^\circ, 28'$, à cause de $\sin \alpha \equiv \frac{1}{3}$.

XI. Il en sera de même, si la base AB du corps $ABCD$ est formée de plusieurs angles obtus $AcdcdcdB$, tous semblables à celui AGB , que nous venons de considérer, & que la surface MN soit taillée d'une manière semblable, en sorte que les inégalités de la base & de la surface soient parfaitement d'accord. Car dans ce cas, si chacun des angles, que constituent les plans inclinés cd avec la ligne horizontale MN , est $\equiv \alpha$, le corps $ABCD$, dont le poids est $\equiv P$, ne sera remué par la force horizontale $EF \equiv F$, qu'il n'y soit $F \cos \alpha > P \sin \alpha$, ou $F > P \tan \alpha$: & tant que la force F fera moindre que $P \tan \alpha$, le corps restera en repos. On voit bien, que la même chose arrivera, quelque grand que soit le nombre des prominences d, d , &c. & il n'est pas même nécessaire, que toutes les inclinaisons soient égales entr'elles, pourvu qu'il ne s'y trouve de plus grandes que l'angle α ; car quand même il y auroit quelques angles moindres, ceux-cy ne faciliteroient point le mouvement.

XII. Si c'étoit le cas du frottement, comme il paroît fort probable, on comprendroit aisément les phénomènes du frottement, que j'ai rapportés cy-dessus, & qui regardent la difficulté de mettre un corps en mouvement. Car cette difficulté ne consisteroit qu'en ce que, pour mouvoir le corps, il faudroit qu'il montât effectivement sur un plan incliné. De là on voit que dès que le corps a commencé de se mouvoir, comme ces plans inclinés dc, dc &c. sont extrêmement petits, ce corps montera & descendra alternativement; & partant puisque les descentes se font d'elles mêmes, pendant que le corps se meut, la difficulté du frottement ne se fait sentir que par intervalles, c'est à dire, dans les moments où le corps est obligé de monter. D'où il paroît

Fig. 3.

paroît, qu'on peut tirer cette conséquence ; que pendant que le corps est actuellement en mouvement, l'effet du frottement ne sera que la moitié de celui qu'on éprouve, avant qu'on puisse mettre en mouvement le corps.

XIII. Donc afin que la force $EF = F$ puisse imprimer au corps ABCD un mouvement, elle doit être plus grande que $P \tan \alpha$, mais dès que le corps se meut, la résistance du frottement sera diminuée à demi. Par conséquent pour calculer l'accélération du corps, on ne doit diminuer la force sollicitante, que de $\frac{1}{2} P \sin \alpha$, de sorte que l'accélération sera proportionnelle à $F \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha$, ou peut-être à $F - \frac{1}{2} P \tan \alpha$, puisque dans les descentes alternatives, l'accélération est augmentée par la gravité. Ceux qui ont examiné le frottement par les expériences, se sont bornés uniquement à en découvrir la quantité avant que les corps fussent mis en mouvement. Il seroit donc fort à souhaiter, qu'on fit aussi des expériences, d'où l'on puisse conclure la quantité du frottement pendant que les corps sont en mouvement : & je ne doute presque pas, qu'on ne la trouveroit considérablement moindre : puisqu'on sait, que pour mettre en mouvement une machine, il faut que les premiers efforts soient plus grands, que ceux qu'on emploie dans la suite pour continuer le mouvement.

Fig. 4.

XIV. On se sert ordinairement du plan incliné pour connoître la quantité du frottement. Ayant mis le corps P sur le plan AB, on élève successivement ce plan depuis sa situation horizontale AC, jusqu'à ce que le corps P vient sur le point de descendre : alors on mesure l'angle B de l'inclinaison du plan AB, ou les cotés du triangle rectangle ABC, d'où l'on tirera la valeur de la partie de la pesanteur

qui agit selon la direction AB, qui sera $= P \sin B = \frac{AC}{AB} P$, & ce sera à cette force que le frottement du corps P sur le plan AB est égal. Or comme le frottement est proportionnel à la pression, dont le corps P est apprimé au plan, cette pression étant $= P \cos B = \frac{BC}{AC} P$: on apprendra par cette expérience que le frottement est à la pression, comme
sin

$\sin B$ à $\cos B$, ou comme AC à BC : cette raison du frottement à la pression sera donc comme la tangente de l'angle B au sinus total. Ce sera donc la force du frottement, qu'on doit vaincre, avant que le corps P puisse être mis en mouvement.

XV. Mais pour connoître si le frottement, que le corps éprouve pendant qu'il se meut actuellement, est le même ou non : on pourra déterminer la quantité du frottement pour le cas du mouvement, par le moyen du même plan incliné. On n'aura qu'à élever le plan AB un peu plus que dans le cas précédent, afin que le corps glisse actuellement sur ce plan en bas. Soit l'angle de l'inclinaison $B = \alpha$; & la pression du corps P sur le plan sera $= P \cos \alpha$, & la force dont il est sollicité suivant la direction AB sera $= P \sin \alpha$. Supposons que dans le mouvement le frottement soit à la pression comme μ à 1. & le frottement pour le cas que nous considérons sera $= \mu P \cos \alpha$; qui étant retranché de la force accélératrice $P \sin \alpha$, le corps sera encore tiré selon la direction de son mouvement par la force $= P \sin \alpha - \mu P \cos \alpha = P (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

XVI. Que le corps P ait commencé son mouvement depuis le repos en P , & qu'il soit parvenu après un tems $= t$ en M . Soit l'espace parcouru $AM = s$, & la vitesse en M égale à celle, qu'un corps acquiert par la chute de la hauteur $= v$, & les principes de Mécanique nous fournissent cette équation $P dv = P (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) ds$ ou en prenant l'intégrale $v = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t$, de là l'élément

du tems sera $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t}$, dont l'in-

tégrale est $t = \frac{2 \sqrt{s}}{\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$. Cette expression, si l'on ex-

prime l'espace parcouru s en millièmes parties du pieds de Rhin, donnera le tems t exprimé en minutes secondes, lorsqu'on divise cette expression par 250 ; de sorte que si le tems t est exprimé en secondes, & l'espace s en millièmes parties du pied de Rhin, on aura cette équation

$$t = \frac{\sqrt{s}}{125 \sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

XVII. Supposons maintenant qu'on ait mesuré exactement le tems, que le corps P amis à descendre sur le plan incliné AB, dont l'angle de l'elevation sur l'horizon, ou l'angle B soit $= \alpha$. Soit la longueur du plan AB $= m$ parties milliemes du pied de Rhin : & le tems de la descente par ce plan $= n$ minutes secondes : & nous aurons cette équation :

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125 \sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

ou $15625 n n (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = m$, d'où nous tirerons la valeur de la lettre μ :

$$\mu = \tan \alpha - \frac{m}{15625 n n \cos \alpha}$$

Donc moyennant une seule experience on fera en état de determiner la raison du frottement à la pression, qui a été supposée comme μ à 1 pour le cas du mouvement du corps P.

XVIII. De cette formule il est d'abord clair, que si l'angle α est égal à celui - cy, où le corps P demeure encore en repos, alors la valeur du frottement sera précisément la même, qu'on aura trouvée pour le repos. Car puisque le corps dans ce cas ne reçoit aucun mouvement, il pourra être regardé, comme s'il falloit un tems infini, pour achever sa descente. Dans ce cas donc le tems n deviendra infini, & la formule donnera $\mu = \tan \alpha$, ou bien le frottement sera à la pression comme la tangente de l'angle B au sinus total, tout comme nous avons trouvé. Mais dès qu'on elevera le plan BA un peu davantage, le corps descendra actuellement, & si l'on observe le tems, qu'il emploie pour parcourir l'espace AB, notre formule fera voir la valeur de μ , qui conviendra au mouvement, & qui sera, à ce qu'il paroît vraisemblable, plus petite que dans le cas précédent du repos. On s'assurera encore mieux sur cette matiere, si on donne au plan AB successivement plusieurs diverses inclinaisons, pour voir si chacune donnera la même valeur pour μ : car en cas qu'on en obtiendrait des valeurs differentes, on en devroit conclure, que le frottement ne seroit

roit pas le même pour tous les degrés de vitesse, ce qui ne paroît pas pourtant probable.

XIX. En cas que la force du frottement fut plus petite dans le mouvement, que dans le repos, il en résulteroit un phénomène bien étrange, qui mériteroit toute l'attention possible. Pour l'exposer distinctement, soit α l'angle B du plan incliné, où le poids P se soutient encore à peine en repos : de sorte que pour peu qu'on augmente cet angle, le poids descendroit actuellement sur ce plan incliné. Donc

pour l'état du repos la valeur du frottement sera $\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; or supposant, que dès que le corps se meut actuellement, le frottement devint plus petit, soit pour l'état du mouvement la valeur du frottement $\mu = v \sin \alpha : \cos \alpha$, où v marque une fraction plus petite que l'unité. A présent qu'on augmente l'angle B, afin que ce cas du mouvement ait lieu, & soit maintenant l'angle B $= \varphi$: de sorte qu'on n'a qu'à écrire

dans la formule trouvée cy-dessus φ pour α & $\frac{v \sin \alpha}{\cos \alpha}$ pour μ , pour

trouver le tems n'' , dans lequel le corps P descendra par le plan incliné AB, dont la longueur est de m millièmes parties du pied de Rhin, le

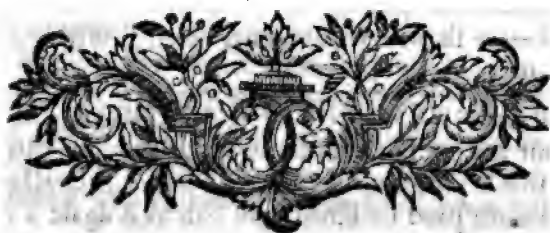
tems sera donc : $n = \frac{\sqrt{m}}{125 \sqrt{(\sin \varphi - v \sin \alpha \cos \varphi : \cos \alpha)}}$. Sup-

posons à cette heure que l'angle B $= \varphi$ ne surpasse qu'infinitement peu l'angle de repos α , & on devoit croire suivant la loi de continuité que le mouvement du corps seroit infinitement lent. Mais nous verrons avec surprise, que ce mouvement s'achève subitement dans un tems fini, & même assez court. Car soit $\varphi = \alpha + \omega$, où ω marque une quantité infinitement petite, & il sera $\sin \varphi = \sin \alpha + \omega \cos \alpha$, & $\cos \varphi = \cos \alpha - \omega \sin \alpha$. Ces valeurs étant substituées, on aura

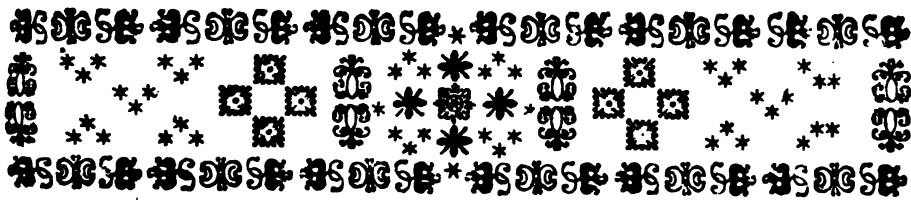
$$n = \frac{\sqrt{m}}{125 \sqrt{(\sin \alpha + \omega \cos \alpha - v \sin \alpha + v \omega \sin \alpha \tan \alpha)}} = \frac{1}{125} \sqrt{\frac{m}{(1-v) \sin \alpha}}$$

XX. Pour mieux faire sentir le phénomène, que cette formule renferme, soit la longueur du plan incliné AB exactement = 15625 millièmes parties du pied de Rhin, ou soit AB égale à la hauteur, par

laquelle un corps tombe dans une seconde : & le tems de la descente du corps P par ce plan incliné AB sera de $n = \frac{1}{\sqrt{(1-v)}} \sin \alpha$ secondes; soit de plus comme Mr. *Bilfinger* a trouvé par ses expériences $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, & ce tems seroit $n = \frac{2}{\sqrt{(1-v)}}$: & si le frottement devenoit dans le mouvement deux fois moindre, où qu'il fût $v = \frac{1}{2}$; ce tems seroit $n = 2\sqrt{2}$ ou presque de 3". Il ne seroit pas donc possible de donner à ce plan AB une telle inclinaison, que le tems de la descente surpassât 3". Car tandis que l'angle B est $= \alpha$, ou moindre, le corps P ne descend point du tout; & dès qu'on eleve tant soit peu le plan au delà, la descente devient subitement si rapide que le corps n'emploiera qu'à peu près 3 secondes, à parcourir le plan incliné AB de plus de 15 pieds. Or il est clair, si l'on eleve le plan davantage, que le tems de la descente deviendra encore plus petit. L'expérience semble plutôt être favorable à ce paradoxe que contraire; car on remarquera aisément, qu'il n'est pas possible de donner à un plan incliné une telle inclinaison, que la descente se fit aussi lentement, qu'on voudra : car, ou le corps ne descendra point du tout, ou il descendra assez vite. Mais pour mieux réussir dans ces expériences, il faut bien prendre garde, que le plan dont on se sert soit partout également poli, afin que le frottement soit partout le même, car il n'y a aucun doute, que si le frottement étoit plus grand dans un endroit du plan, que dans un autre, on ne sauroit tirer de l'expérience aucune conséquence bien assurée.



SUR



SUR LA DIMINUTION DE LA RESISTENCE DU FROTTEMENT, PAR M. EULER.



I.

L'Experience nous ayant fait voir que la force du frottement est toujours égale à une certaine partie de la pression, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il se meut, de sorte que le frottement ne dépend ni de la grandeur de la base, dont le corps touche la surface, ni du degré de vitesse, il n'est pas difficile de déterminer l'effet du frottement dans toutes sortes de Machines par le moyen du calcul : vu que le frottement doit être regardé comme une force constante, qui est toujours directement contraire à la direction du mouvement, & qui agit dans une direction, qui passe par le plan de l'attouchement des corps qui se meuvent l'un sur l'autre. Je me bornerai dans cette piece à rechercher l'effet du frottement dans les Machines, dont le mouvement est rotatoire, ou qui se fait autour d'un ou plusieurs axes, & je ferai voir, combien la résistance du frottement peut être diminuée par la diminution des axes, & leur mouvement sur des roulettes : moyens, dont on s'est servi depuis quelque tems avec bien du succès pour perfectionner les machines de cette espece. Il semblera d'abord étrange, que la résistance du frottement, étant toujours égale à une partie déterminée de la pression, puisse être diminuée sans diminuer la pression, mais on en reconnoitra bientôt la possibilité, lorsqu'on aura égard à la nature du mouvement rota-

toire, par lequel le *momentum* de la force du frottement, duquel dépend la résistance, peut- être diminué autant qu'on voudra.

Fig. 1.

II. Je commencerai par considérer la rouë AIK, par laquelle passe le cylindre BLM, qui lui tient lieu d'axe, lequel est soutenu dans la cavité immobile EBF, de sorte que cette rouë ne sauroit tourner autour de son centre C, sans que l'axe BLM ne se frotte sur la surface EBF. La force de ce frottement sera donc égale à une certaine partie de la pression, dont la machine s'appuie sur la surface EBF, & cette pression sera égale au poids de la rouë avec son axe, parce que tout ce poids est soutenu par l'appuy EFGH, que la figure ne représente que d'un coté; mais quoiqu'il se trouve de l'autre coté un semblable appuy, où le frottement est le même, il sera permis de considérer ensemble ces deux frottements comme joints dans le point B. Soit donc le poids de la rouë avec son axe $= P$, qui étant égal à la pression totale sur l'appuy en B, si nous supposons le frottement à la pression comme μ à 1, le frottement en B sera $= \mu P$, ou la machine ne pourra être mise en mouvement, sans qu'on surmonte une force appliquée en B $= \mu P$, & dont la direction sera suivant la tangente BQ contraire au mouvement du point P, qu'on veut produire. Soit AP la force, qui soit $= F$, appliquée à l'extrémité de la rouë A suivant la tangente AP, que je suppose horizontale, afin que par l'action de cette force la pression de la rouë sur l'appuy EF ne soit, ni augmentée, ni diminuée; & il est clair pour que la machine puisse être mise en mouvement, que le *moment* de la force F. AC doit surpasser le *moment* du frottement $\mu P. BC$ où il faut qu'il soit $F.AC > \mu P. BC$, ou $F > \mu P. \frac{BC}{AC}$.

III. De là il est clair, que tant que la force AP $= F$ sera plus petite que $\mu P. \frac{BC}{AC}$, elle ne sera pas capable de remuer la machine,

& s'il y a $F = \mu P. \frac{BC}{AC}$, la force du frottement sera tout à fait contrebalancée par la force F, de sorte que pour peu qu'on l'augmente, la ma-

la machine soit mise en mouvement. Donc, pour vaincre le frottement dans ce cas proposé, il faut une force $F = \mu P \cdot \frac{BC}{AC}$, qui soit appliquée à la rouë A I K dans une direction horizontale A P, & en même tems perpendiculaire au rayon C A. Si la valeur du coefficient μ est $\frac{1}{4}$, comme on peut supposer probablement, on trouvera cette force requise pour vaincre le frottement par cette analogie ; Comme le rayon A C de la rouë est au rayon de l'axe C B, ainsi sera la quatrième partie du poids de la rouë, à la force cherchée. Donc quoique le frottement soit toujours égal à une partie déterminée de la pression, il est pourtant possible, qu'il puisse être vaincu par une force aussi petite qu'on voudra : car on voit que plus on diminue l'épaisseur de l'axe, ou son rayon B C, plus petite deviendra aussi la force requise pour vaincre le frottement. Par là on comprendra aisément combien il est important dans toutes sortes de machines de rendre les axes, autour desquels se fait le mouvement, aussi minces qu'il sera possible. Car dès qu'on pourroit réduire l'épaisseur des axes à la moitié, on gagneroit déjà la moitié de force, dont on avoit besoin auparavant pour vaincre le frottement. Il est bien vrai que cette diminution n'est pas dans notre pouvoir, & qu'il faut régler l'épaisseur des axes sur la charge, qu'ils doivent porter ; mais il semble pourtant qu'on pourroit encore considérablement gagner de ce côté-cy, dans la pluspart des machines, où le frottement se réduit dans le mouvement des axes.

IV. Mais il faut bien remarquer, que la force A P, quoique je l'aye supposée horizontale, altère néanmoins la quantité du frottement, en changeant la pression de l'axe sur le soutien ou l'appuy E B F. Car par l'action de la force A P le point d'appuy sera transporté de B vers E & la pression deviendra égale à la force qui résulte de la composition du poids de la rouë & de la force A P, quoique ce changement ne soit pas pour la pluspart considérable. Cependant pour mieux développer la manière, dont la force mouvante entre à changer le frottement, je considérerai le cas où la force M P = F agit sous une obliqui-

Fig. 2.



obliquité quelconque. Pour cet effet soit ACB la ligne verticale, qui passe par le centre C de la rouë & de son axe, qui est soutenu par l'appuy immobile EF qui reçoit parfaitement une portion de l'axe. Soit CM le rayon auquel est appliquée la force $MP = F$ à angle droit CMP ; & que P exprime le poids de la rouë avec l'axe. Pour trouver la force, qui résulte de la composition de ces deux forces F & P ensemble, je les considère l'une & l'autre appliquées en C comme au centre du mouvement, & ayant tiré CK perpendiculaire à CM soit $CB : CK = P : F$ & la diagonale CL du parallélogramme $CBLK$ exprimera la force, dont la rouë sera sollicitée & apprimée contre le soutien au point N . Qu'on nomme l'angle $ACM = \phi$, & on trouvera la force $CL = \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$; & pour l'obliquité de cette force ou l'angle BCN , on fera: comme CL est au sinus de l'angle CBL ou au cosinus de ϕ , ainsi BL ou CK au sinus de l'angle BCN , d'où l'on tirera $\sin BCN = \frac{BL \cos \phi}{CL}$

$$= \frac{F \cos \phi}{\sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}}, \text{ \& ensuite la tangente de l'angle } BCN \text{ sera } = \frac{F \cos \phi}{P + F \sin \phi}.$$

V. Ces formules donneront lieu à plusieurs reflexions: je commencerai par la recherche, de quelle grandeur doit être la force $MP = F$, afin qu'elle puisse contrebalancer le frottement. Puisque le *moment* de cette force est $= F. CM = F. CA$ & celui du frottement $= \mu. CB. \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$, parce que le frottement même au point N est à la pression qui vient d'être trouvée $= \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$, comme μ à 1, la machine ne sauroit être mise en mouvement, à moins qu'il ne soit $F. CA > \mu CB \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$. Donc le frottement sera contrebalancé, si ces deux *moments* seront égaux entr'eux. Soit $CA = a$, & $CB = b$, & prenant les quarrés nous aurons $aa FF = \mu\mu bb PP + \mu\mu bb FF + 2\mu\mu bb PF \sin \phi$, d'où nous tirerons:

$$F =$$

$$F = \frac{\mu b P (\mu b \sin \phi \pm \sqrt{aa - \mu \mu b b \cos \phi^2})}{aa - \mu \mu b b}$$

Ici l'ambiguïté du signe radical ne peut avoir lieu, qu'entant que la valeur de F devient affirmative: car, puisque nous avons supposé que le mouvement se fait dans le sens NB, & que la direction de la force du frottement est NQ, cette supposition ne peut avoir lieu, que lorsque la valeur de F est affirmative. Au reste on voit bien, que cette ambiguïté résulte du signe radical dans l'équation primitive; $aF \pm \mu b \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$, qui malgré sa nature ne reçoit dans notre cas, que le signe +. Car le mouvement de la machine, dès qu'elle en aura, sera accéléré par le moment $aF - \mu b \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$, où l'on comprend aisément, que le dernier membre ne peut jamais devenir affirmatif, puisque le frottement ne sauroit jamais augmenter l'effet de la force sollicitante, mais il lui est plutôt toujours contraire. Par conséquent, toutes les fois qu'on aura quelque doute sur l'ambiguïté de la valeur de F, on n'aura qu'à l'introduire dans la formule $aF - \mu b \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \phi)}$ pour voir si elle devient égale à zero.

VI. Pour rendre cette formule plus simple soit $\frac{a}{\mu b} = \frac{AC}{\mu BC} = n$, de sorte que dans l'hypothèse $\mu = \frac{1}{2}$ on ait $n = \frac{4AC}{BC}$, & alors la force MP $\equiv F$ requise pour vaincre le frottement sera $F \equiv \frac{\sin \phi \pm \sqrt{(nn - \cos \phi^2)}}{nn - 1} P$, valeur qui résulte de l'équation: $nF \pm \sqrt{(P^2 + F^2 + 2PF \sin \phi)} = 0$, d'où nous aurons pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \frac{\cos \phi}{n}$. Le cas le plus ordinaire est quand le rayon de la roue AC est plus grand que le rayon de l'axe PC, & dans ce cas la valeur de la lettre n, étant plus grande que 4. & à plus forte raison celle de nn plus grande que 16, il y aura à peu près $\sqrt{(nn - \cos^2 \phi)}$

Mémoires de l'Académie Tom. IV. S cos

$\cos \varphi^2) = n - \frac{\cos \varphi^2}{2n}$, d'où l'on voit que dans ce cas ce n'est que

le signe + qui puisse avoir lieu: donc nous aurons $F =$

$$\frac{n + \sin \varphi - \frac{1}{2n} \cos \varphi^2}{nn - 1} P. \text{ De là il suit } \text{si l'angle } ACM = \varphi$$

devient 0° ou 180° , on aura la force requise pour vaincre la résistance

$$\text{du frottement } F = \frac{n - \frac{1}{2n}}{nn - 1} P \text{ ou } F = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} \right) P, \text{ \& pour le}$$

point d'appuy N, $\sin BCN = \frac{1}{n}$ de sorte que cet angle sera très

petit. 2^{de} Si l'angle $ACM = \varphi = 90^\circ$, nous aurons la force $F =$

$$\frac{n + 1}{nn - 1} P = \frac{1}{n - 1} P = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3} \right) P, \text{ \& dans ce cas la}$$

force requise à vaincre le frottement sera la plus grande, puisque toute la force est employée à augmenter la pression, \& dans ce cas le point d'appuy sera au point B. 3^{de} Si l'angle $ACM = \varphi = -90^\circ$, ou que

$$\text{la force tire de l'autre coté en haut, on aura } F = \frac{n - 1}{nn - 1} P = \frac{1}{n + 1}$$

$$P = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3} \right) P, \text{ \& dans ce cas la force requise à}$$

vaincre le frottement sera la plus petite. De là on voit qu'on gagnera toujours, si l'on applique les forces pour tourner les rouës, en sorte qu'elles soient dirigées en haut comme mp , \& cet avantage sera d'autant plus grand, plus l'axe de la rotie sera epais.

VII. Le cas que nous venons de considérer aura lieu, quand même le rayon de l'axe BC deviendra égal à l'axe de la rotie AC, ou qu'il

Fig. 3.

le surpasse, pourvu que la valeur de $n = \frac{4 AC}{B C}$, ou pluto de son

quarré

quarré, soit encore considérablement plus grande que l'unité. Mais si nous supposons que le rayon de l'axe B C surpasse tant l'axe de la roüe C A, que la valeur de $n = \frac{4 A C}{B C}$ n'excede l'unité que fort peu,

les phenomenes qui en résultent, doivent être développés séparément. Car quoique ce cas ne trouve presque jamais lieu dans les machines, il merite pourtant toute l'attention, à cause des propriétés assez étranges, qui serviront à mieux connoître les effets du frottement. Soit donc le rayon de l'axe C B, qui doit tourner dans la cavité de l'appuy E F, presque 4 fois plus grand que le rayon de la roüe C M, auquel est appliquée la force M P = F, de sorte que la valeur de $n n - 1$ soit très petite; ou supposant $n = 1 + \alpha$, que α soit une fraction très petite, & nous aurons pour vaincre le frottement $F = \frac{\sin \phi + \sqrt{(\sin \phi^2 + 2 \alpha + \alpha \alpha)}}{2 \alpha + \alpha \alpha} P$, où il n'y a encore que le

signe + qui puisse avoir lieu, & pour le point d'appui N, nous aurons $\sin B C N = \frac{\cos \phi}{1 + \alpha}$.

1^{re} Soit l'angle A C M = $\phi = 0$ ou 180° , & nous aurons $F = \frac{P}{\sqrt{(2 \alpha + \alpha \alpha)}}$, & partant la force requise pour vaincre la résistance du frottement, doit être extrêmement grande, & l'angle B C N deviendra presque droit, de sorte que dans ce cas la cavité du soutien E F doit embrasser presque la moitié de l'axe.

2^{de} Si l'angle A C M = $\phi = 90^\circ$, nous aurons $F = \frac{2 + \alpha}{2 \alpha + \alpha \alpha}$

$P = \frac{P}{\alpha}$ & partant dans ce cas la force requise à vaincre le frottement, doit être encore plus grande.

3^{de} Si l'angle A C M = $\phi = -90^\circ$, il y aura $F = \frac{\alpha}{2 \alpha + \alpha \alpha}$

$P = \frac{P}{2 + \alpha}$, & dans ce cas il ne faudra pour vaincre le frottement qu'une force qui vaudra environ la moitié du poids de la machine P , & dans ces deux derniers cas le point d'appuy sera au point B.

VIII. De là il est clair, que si $\alpha = 0$, ou que le rayon de la roüe CA soit exactement au rayon de l'axe CB, comme la force du frottement est à la pression, ou que dans l'hypothese $\mu = \frac{1}{2}$ il soit $CB = 4 CA$: la force requise pour vaincre la résistance du frottement deviendra infiniment grande, toutes les fois que la force MP est horizontale, ou dirigée en bas, comme la figure représente. Et partant dans ces cas il ne sera pas même possible de remuer la machine, quelque force qu'on y emploie. Mais si l'on applique la force mp de l'autre coté, de sorte qu'elle soit dirigée en haut, puisqu'elle diminuera la pression de l'axe contre l'appuy, une force finie deviendra suffisante à surmonter la résistance du frottement. Pour cet effet nommant l'angle negatif $ACm = \phi$, nous aurons la force $mp = F = \frac{V(\sin \phi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha) - \sin \phi}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, dont la valeur supposant $\alpha =$

0, sera $F = \frac{P}{2 \sin \phi}$: ou la force requise $mp = F$ sera à la moitié du poids de la machine ($\frac{1}{2} P$), comme le sinus total est au sinus de l'angle ACm . Par conséquent la plus petite force capable de vaincre la résistance du frottement dans ce cas, sera égale à la moitié du poids de la machine, & cette force doit être tellement appliquée à la roüe, qu'elle tire directement en haut. En voicy donc un cas qui nous fait voir l'important avantage, qu'on peut tirer de l'application de la même force à la roüe, quoiqu'elle agisse toujours perpendiculairement au rayon de la roüe: circonstance qui ne seroit d'aucune conséquence, s'il n'y avoit point de frottement. Il est encore bien remarquable que dans ce cas il peut arriver, que même une force infinie n'est pas capable de vaincre la résistance du frottement.

IX. A plus forte raison on comprendra aisément, que si le rayon de l'axe CB sera encore plus grand par rapport au rayon de la roüe CA,

CA, cette machine ne pourra être mise en mouvement par aucune force, dont la direction est, ou horizontale, ou qui tend en bas. Ce cas aura lieu si $n < 1$. soit donc $n = 1 - \alpha$, & α une fraction plus petite que 1; & que ϕ marque l'angle ACm pris de l'autre côté de la rouë, de sorte que la force $mp = F$ soit dirigée en haut. Alors pour vaincre la résistance du frottement il faudra une force

$$F = \frac{V(\sin^2 \phi - 2\alpha + \alpha\alpha) - \sin \phi}{-2\alpha + \alpha\alpha} P = \frac{\sin \phi \pm V(\sin^2 \phi - 2\alpha + \alpha\alpha)}{2\alpha - \alpha\alpha} P.$$

Donc afin que cette force ne devienne pas imaginaire, il faut qu'il soit $\sin \phi > V(2\alpha - \alpha\alpha)$, ou $\sin \phi > (1 - nn)$, car tant que $\sin \phi$ sera moindre que $V(2\alpha - \alpha\alpha)$, il ne sera pas possible de vaincre la résistance. Soit donc pour développer ce cas $\sin \phi = V(2\alpha - \alpha\alpha)$ &

$$F = \frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)} \text{ \& l'acceleration étant proportionnelle à } (1 - \alpha)$$

$$F - V(PP + FF - 2PF \sin \phi) \text{ deviendra } = \frac{(1 - \alpha)P - P V(1 - 2\alpha + \alpha\alpha)}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$$

$= 0$; ce sera donc le premier cas qu'il sera possible de vaincre la résistance. Mais il faut bien remarquer, que dans ce cas le mouvement de la machine n'est pas encore possible, car quoiqu'on augmente la

force F au delà de $\frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$, la valeur de la formule $nF - V$

$(PP + FF - 2PF \sin \phi)$ redevient negative, La raison en est, que dans ce cas la valeur de cette formule devient un *maximum*, & ce *maximum* même est $= 0$, d'où l'on voit que dans tous les autres cas,

où F est ou plus grande, ou plus petite que $\frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)} = \frac{P}{V(1 - nn)}$,

la valeur qui exprime l'acceleration, doit être moindre que 0, & par-là negative. Cela arrive si $\sin \phi < V(1 - nn)$, & $\cos \phi = n$: or si l'angle ϕ est plus petit, la valeur de $nF - V(PP + FF - 2PF \sin \phi)$ demeure toujours negative, quelque grande que soit la force F .

X. Or si $\sin \phi > V(1 - nn)$, la plus grande valeur de la formule $nF - V(PP + FF - 2PF \sin \phi)$ sera affirmative, ce qui est une

une marque, que dans ces cas la machine peut être mise en mouvement, si la force F est prise d'une grandeur convenable: car si cette force est trop petite, ou trop grande, le mouvement deviendra également impossible. Il y aura donc des limites, entre lesquels la force F doit être comprise, afin qu'elle soit capable de mouvoir la machine, & ces limites sont représentés par la double valeur de F , que nous venons de trouver, savoir remettant $1 - nn$ au lieu de $2\alpha - \alpha n$

$$F = \frac{\sin \phi \pm \sqrt{(\sin \phi^2 - 1 + nn)}}{1 - nn} P.$$

& entre ces deux limites se trouve la valeur de la force F , qui produit la plus grande accélération. Pour trouver cette valeur, supposons

$$\frac{F}{P} = z, \text{ \& l'accélération sera représentée par cette formule } nz - \sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)}, \text{ \& posant son différentiel } = 0, \text{ nous aurons, } z - \frac{\sin \phi}{\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)}}, \text{ \& partant } \sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)} = \frac{z - \sin \phi}{n}; \text{ donc l'accélération la plus grande sera } = \frac{(nn - 1)z \sin \phi}{n}.$$

Or l'équation précédente nous fournira $z = \sin \phi \pm \frac{n \cos \phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ où par rapport à l'ambiguïté du signe \pm il faut remarquer, que puisque $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)} = \frac{z - \sin \phi}{n}$, la valeur de $z - \sin \phi$ doit toujours être affirmative, parce que le frottement qui est exprimé par la formule irrationnelle $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \phi)}$ ne sauroit jamais devenir négatif. Donc il est clair que dans l'expression $z = \sin \phi \pm \frac{n \cos \phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ le seul signe $+$ peut avoir lieu, & que le terme $\frac{n \cos \phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ doit toujours être pris affirmatif, quoique même le $\cos \phi$ devienne négatif: ou l'angle ACm plus grand qu'un droit.

XL. Ayant

XI. Ayant donc trouvé pour le cas de la plus grande accélération $a = \sin \phi + \frac{n \cos \phi}{\sqrt{1 - nn}} = \frac{F}{P}$, la plus grande accélération même sera comme $n \sin \phi - \cos \phi \cdot \sqrt{1 - nn}$; d'où l'on voit que cette plus grande valeur est négative, tant que $\sin \phi < \sqrt{1 - nn}$, & elle évanouit précisément, si $\sin \phi = \sqrt{1 - nn}$: mais si $\sin \phi > \sqrt{1 - nn}$, alors la plus grande valeur de l'accélération sera affirmative; & elle deviendra encore la plus grande, si l'angle $ACm = \phi$ sera droit; car alors le mouvement de la machine sera le plus vite, si l'on prend $F = P$, auquel cas la pression même, & partant le frottement, évanouit. Or dans ce cas où $\phi = 90^\circ$, il y aura deux forces, qui contrebalanceront le frottement qui seront

$$F = \frac{1 + n}{1 - n} P = \frac{P}{1 - n} \quad \& \quad F = \frac{1 - n}{1 + n} P = \frac{P}{1 + n}$$

d'où il est évident, que si la force F est, ou plus petite que $\frac{P}{1 + n}$, ou plus grande que $\frac{P}{1 - n}$, la machine ne recevra aucun mouvement; & il ne sera possible d'imprimer aucun mouvement à la machine, à moins que la force F ne soit comprise entre ces limites $\frac{P}{1 + n}$ & $\frac{P}{1 - n}$. On sera peut être d'abord surpris,

comme il puisse arriver qu'une plus grande force ne soit pas capable de remuer la machine, pendant qu'une force plus petite, quoiqu'également appliquée, y est capable. Mais comme dans le cas $F = P$ la pression à l'appuy est tout à fait détruite, il est clair que lorsque $F > P$ la pression devenant négative, sera transportée en haut, & pour cet effet il faut que l'axe de la machine entre dans un anneau, auquel l'axe sera appliqué dans le sommet b , car sans cet anneau, qui sert à retenir la machine, elle seroit enlevée en haut par la force $F > P$.

XII. Ces cas, que je viens de développer, font voir très évidemment, combien les forces, qui agissent sur la machine, contribuent à augmenter, ou à diminuer la résistance du frottement; & partant

Fig. 4

tant, pour déterminer le frottement de chaque machine, il ne suffit pas d'avoir égard à la machine même, mais il faut aussi bien considérer toutes les forces qui y sont appliquées. Jusqu'ici je n'ai considéré qu'une seule force dont la machine étoit sollicitée: mais s'il y en a plusieurs qui agissent ensemble, parmi lesquelles on doit comprendre la charge qui doit être levée, ou mise en mouvement, la détermination du frottement n'en devient pas plus difficile. Soient appliquées à la machine qui tourne autour du centre C, sur le soutien EF, des forces quelconques PR, QS sous quelque obliquité aux rayons CP & CQ que ce soit: & pour en déterminer l'effet sur le frottement, on n'a qu'à considérer ces forces, comme si elles étoient appliquées immédiatement au centre C, afin de connoître la pression sur le soutien EF au point d'appuy. Qu'on décompose donc chaque force en deux, dont l'une soit horizontale, l'autre verticale, & la force PR se résoudra en Pp, Pr & la force QS en Qq, Qs: aux verticales on joigne le poids de la machine, & que CK représente la somme de toutes les forces verticales, & CI celle des forces horizontales. Ensuite la diagonale CI du parallélogramme rectangle CLLK, représentera la force totale, dont la machine sera pressée contre le soutien EF; & on trouvera le point d'appuy N, où cette force est appliquée. Donc si l'on nomme la somme de toutes les forces verticales avec le poids de la machine $CK = P$, la somme des forces horizontales $CI = Q$, la pression contre le soutien au point N sera $= \sqrt{(PP + QQ)}$ & partant le frottement $= \mu \sqrt{(PP + QQ)}$. De plus, pour connoître le point d'appuy N, la tangente de l'angle BCN sera $= \frac{Q}{P}$.

XIII. Après avoir déterminé en sorte le frottement, qui résulte, tant du poids de la machine, que des forces qui y agissent, on recherchera de la manière suivante, si ces forces sont capables de mettre la machine en mouvement. On accélérera les momens de toutes les forces, qui agissent sur la machine, en multipliant chacune par sa distance à l'axe C, autour duquel le mouvement se fait, & ayant égard si toutes ces forces agissent dans le même sens ou non, on réduira dans

Tous ces momens dans une somme, en ajoutant ceux qui agissent dans le même sens, & en ôtant ceux qui sont contraires. Soit S ce moment total, qui tend à tourner la machine dans le sens BN , & puisque le frottement, que nous venons de trouver $= \mu \sqrt{(PP + QQ)}$ est toujours contraire à la force mouvante, comme il est appliqué au point d'appuy N , son moment sera $= \mu \cdot CN \cdot \sqrt{(PP + QQ)}$. Par conséquent on n'aura qu'à regarder le moment S , qui résulte des forces, & ce moment $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{(PP + QQ)}$ du frottement: car tandis que S sera plus petit que $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{(PP + QQ)}$, ou même égal, la machine demeurera en repos; & le moment S ne sera capable de produire aucun mouvement, à moins qu'il ne soit S plus grand que $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{(PP + QQ)}$. Dans ce cas l'accélération de la machine sera produite par l'excès du moment S sur le moment du frottement $\mu \cdot CN \cdot \sqrt{(PP + QQ)}$, & cet excès $S - \mu \cdot CN \cdot \sqrt{(PP + QQ)}$ étant divisé par le moment de l'inertie de toute la machine, donnera l'accélération du mouvement rotatoire. Cela s'entend, lorsque la machine commence à être mise en mouvement: car aussitôt que la machine, & par conséquent aussi les forces, qui agissent sur elle, sont déjà en mouvement; puisque alors la pression sur le soutien en est changée, le frottement ne sera plus le même, & dans ce cas la recherche du mouvement actuel demandera des règles particulières, qui seront le sujet d'une dissertation particulière sur cette matière.

XIV. Je me borne donc ici uniquement à rechercher la force, dont on aura besoin pour vaincre le frottement; puisque cette connoissance sera déjà suffisante pour juger de l'effet de la plupart des machines, dont on se sert ordinairement. Et pour faire voir combien la résistance du frottement peut être diminuée, si l'axe de la machine est soutenu de deux poulies, je m'en vais examiner le cas, où l'axe BCb d'une machine quelconque repose entre deux poulies BD , & $b d$, en sorte que l'axe de la machine ne sauroit tourner, sans que ces poulies ne tournassent également, & qu'il n'arrivât aucun frottement dans les endroits B & b , où les poulies sont touchées de l'axe. Or je suppose que chacune de ces poulies ait son pignon DEF & def , soutenu chacun par son appuy immobile GH & gb , sur lequel cha-

Fig. 1.

que poulie tourne, & que tout le frottement soit transporté par ce moyen aux endroits, où les pignons des poulies s'appuyent sur leurs soutiens. Pour déterminer ce frottement soit premièrement, le poids de chaque poulie & P le poids de la machine même, qui doit être tournée autour de son axe CB: & que AI représente la force = F appliquée perpendiculairement au rayon AC, qui soit capable de vaincre le frottement; laquelle devroit aussi entrer dans la détermination du frottement. Or puisqu'il est facile de prévoir, que cette force sera très petite, à cause de la grande diminution du frottement, il sera permis de négliger cette force dans la recherche de la quantité du frottement. Soit donc CP la ligne verticale, qui représente le poids de la machine P, & supposant que les lignes CD & Cd soient également inclinées sur l'horizon, je nommerai les angles BCP = b CP = ϕ , & la force CP = P étant décomposée selon les directions CB & Cb, donnera pour chacune de

ces forces selon CB & Cb la force = $\frac{P}{2 \cos \phi}$. Par conséquent chaque poulie sera pressée de ce poids P de la machine contre son appui dans la direction DE ou de par une force = $\frac{P}{2 \cos \phi}$, qui à ce qu'on voit sera d'autant plus grande, plus grand sera l'angle BCb.

XV. Or chaque poulie étant outre cela sollicitée par son propre poids p , dans la direction DF & df; puisque les angles EDF & edf sont = ϕ , la force totale, dont chaque poulie est pressée contre son

appui, sera = $\sqrt{(pp + \frac{PP}{4 \cos^2 \phi} + Pp)}$, & partant le frottement, qu'il faut vaincre pour mettre chaque poulie en mouvement, sera =

$\mu \sqrt{(pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos^2 \phi})}$, la lettre μ marquant la partie de la pression, à laquelle le frottement est égal, & dont la valeur est à peu près = $\frac{1}{4}$. Maintenant il est clair que pour vaincre le frottement de

la poulie DEF, il faut appliquer au point B une force = $\frac{\mu D F}{B D} \sqrt{(pp$

$\sqrt{(pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \varphi^2})}$, & une pareille force sera requise au point *b* pour vaincre le frottement de l'autre poulie *def*, puisque je suppose ces deux poulies parfaitement égales entr'elles. Donc si la force $AI = F$ est capable de vaincre ces frottemens, il faut que son moment par rapport au centre de mouvement *C* soit égal aux moments de ces deux forces, que nous venons de trouver, & partant nous aurons $F \cdot CA = \frac{2 \mu DF \cdot BC}{BD} \sqrt{(pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \varphi^2})}$.

ou $F = \mu \frac{BC}{AC} \frac{DF}{BD} \sqrt{(4pp + 4Pp + \frac{PP}{\cos \varphi^2})}$. De là il est donc clair que, pour vaincre la résistance du frottement d'une telle machine, la force requise *F* sera d'autant plus petite, premièrement plus le rayon de l'axe de la machine *CB* sera petit ; & ensuite plus l'axe des poulies sera petit par rapport à leur diamètre ; & enfin plus l'angle *BCb* sera petit. Donc, puisqu'il est dans notre pouvoir d'augmenter le rapport du rayon des poulies *BD* au rayon de leur axe *DE* très considérablement, on comprendra aisément, qu'on sera en état de rendre par ce moyen la résistance du frottement presque insensible. Pour cet effet on gagnera aussi considérablement, si l'on approche ces deux poulies ensemble autant qu'il sera possible.

XVI. Si l'on pouvoit faire les axes qui soutiennent la machines, aussi minces qu'on voudroit, la diminution du frottement n'auroit aucune difficulté : mais puisque la grosseur des axes doit être proportionnée à la charge qu'ils portent, les axes des poulies *DF* & *df* seront déterminés par le poids de la machine. Car si nous supposons que le principal axe de la machine *CB* est déjà aussi mince, que la charge le permet, puisque les forces des axes de différente épaisseur sont à peu près comme les quarrés de leurs rayons, cette règle nous

fournira cette proportion $CB^2 : DF^2 = P : \sqrt{(pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \varphi^2})}$.

Or nous pourrons sans une erreur considérable négliger le poids des poulies *p* par rapport au poids de la machine même *P*, puisqu'une

très petite épaisseur peut suffire pour les poulies : & partant nous aurons $CB : DF = \sqrt{2} \cos \varphi : 1$. & négligeant aussi dans la formule trouvée p à l'égard de P , pour vaincre la résistance du frottement, nous

$$\text{aurons : } F. CA = \frac{\mu P}{\cos \varphi} \cdot \frac{DF \cdot BC}{BD} = \frac{\mu P \cdot BC^2}{BD \cdot \cos \varphi \sqrt{2} \cos \varphi}$$

d'où il est clair que, plus on augmente la grandeur des poulies $B D$, plus aussi sera diminuée la résistance du frottement. Or les poulies ne peuvent être élargies que jusqu'à ce qu'elles viennent se toucher; ou bien le rayon BD ne peut être plus grand que $CD \sin \varphi$: soit

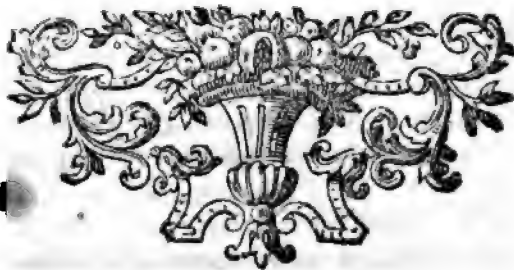
$$\text{donc } BD = CD \sin \varphi; \text{ ce qui donne } BD = \frac{BC \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} : \text{ \& nous aurons :}$$

$$F. CA = \frac{\mu P \cdot BC \cdot (1 - \sin \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi \sqrt{2} \cos \varphi} = \frac{\mu P \cdot BC \sqrt{1 - \sin \varphi}}{\sin \varphi \sqrt{2} \cos \varphi (1 + \sin \varphi)}$$

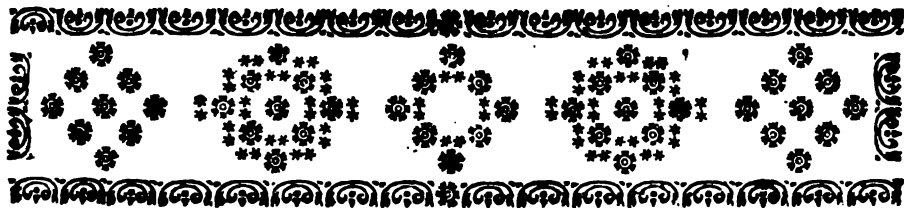
$$\text{or } \frac{\sqrt{1 - \sin \varphi}}{\sqrt{2} \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \sin \varphi}}{\sqrt{2(1 - \sin^2 \varphi)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{4(1 + \sin \varphi)}} \text{ par consé-}$$

$$\text{quent } F. CA = \frac{\mu P \cdot BC \sqrt{1 - \sin \varphi}}{\sin \varphi \sqrt{4(1 + \sin \varphi)}^3}, \text{ d'où l'on voit que plus on}$$

augmente l'angle BCb , & que les poulies touchent la ligne verticale CP , plus aussi la résistance du frottement sera diminuée, sans que les axes, tant de la machine que des poulies, deviennent trop foibles.



RE.



R E C H E R C H E S
SUR LES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS
QUI SE TROUVENT DANS LES ACTIONS
DES FORCES,
PAR M. EULER.



I.

Est une vérité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui sont produites par les forces de la nature, renferment constamment un *maximum*, ou un *minimum*. C'est à dire, les forces étant données, l'effet qu'elles produisent, sera toujours tel, qu'une certaine quantité y devient un *maximum*, ou un *minimum*, de sorte que cette prérogative n'auroit plus lieu, si l'effet avoit été tout autre. Cette considération nous conduit à reconnoître un principe général de la nature, sur lequel toutes ses actions se règlent ; & qui nous fait voir, que la nature se propose toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenses. On sera tout à fait convaincu de la vérité de ce principe général, par les excellentes réflexions, que Monsieur de *Maupertuis*, notre illustre Président, a publiées sur ce sujet, tant dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, que dans nos Mémoires pour l'Année 1746, où il a démontré que dans le choc des Corps le mouvement se distribue de manière que la quantité d'action, que suppose un changement arrivé, est la

plus petite qu'il soit possible. De plus il a fait voir, que dans le repos les Corps, qui se tiennent en équilibre, doivent être tellement situés, que s'il leur arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action seroit la moindre.

II. C'est donc ce principe de *la moindre quantité d'action*, auquel Mr. de *Maupertuis* réduit tous les *maxima*, ou *minima*, que la Nature observe dans toutes ses productions: & la quantité d'action pourra toujours être représentée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendrait, s'il étoit arrivé tout autre effet. Ce principe aura donc également lieu dans la Mécanique & dans la Statique, c. à d. dans le mouvement, aussi bien que dans tous les états d'équilibre, où les corps se peuvent trouver. Pour le mouvement, Mr. de *Maupertuis* vient de faire voir que ce principe de *la moindre quantité d'action* s'observe à la rigueur dans le choc des corps, tant élastiques que non élastiques: & moi, j'ai découvert une semblable loi dans le mouvement des corps, qui sont attirés vers un, ou plusieurs centres de forces, par des forces quelconques; ayant remarqué que le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette propriété, que nommant *u* sa vitesse dans un endroit quelconque, & *ds* l'élément de l'espace, cette formule *∫ u ds* sera toujours un *minimum*. Ce sera donc dans ce cas cette formule *∫ u ds*, qui exprime ce que Mr. de *Maupertuis* nomme la quantité d'action. Ces deux cas du mouvement, dans lesquels nous voyons, que ce principe a lieu, sont d'une si grande étendue, qu'on y peut presque réduire tous les mouvemens, qui arrivent au monde; & partant on n'aura plus la moindre raison de douter, que dans tous les mouvemens, par quelques forces qu'ils soient produits, il n'y ait toujours une certaine formule, dont la valeur soit la plus petite, & par laquelle sera représentée la quantité d'action.

III. L'usage de ce principe est déjà depuis long tems reconnu dans la Statique, ou Dynamique, où il s'agit de l'équilibre des corps sollicités par des forces quelconques, & c'est par son moyen, qu'on a donné des solutions de plusieurs problemes de cette nature. Il a été
aîse

aisé de prévoir, qu'une chaîne suspendue de ses deux bouts doit prendre une telle figure, afin que son centre de gravité soit le plus bas: ou que la distance de ce centre au centre de la terre, ou bien à un plan horizontal, soit un *minimum*. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaîne $= ds$, & sa distance à un plan horizontal fixe pris à volonté $= x$, ce sera la valeur de cette formule $\int x ds$, qui sera un *minimum* pour la courbe de la chaîne: & partant ce sera la même formule $\int x ds$, qui représente la quantité d'action, qui doit être la plus petite. De même un ligue rempli d'un fluide prendra la figure, dont la capacité est la plus grande, afin que le fluide puisse descendre le plus bas qu'il est possible: & Mr. de Maupertuis a fait voir l'usage de ce grand principe en plusieurs autres figures, que ces corps sollicités par des forces quelconques sont obligés de recevoir; où il a déterminé la formule, qui représente en chaque cas la quantité d'action, qui y doit être un *minimum*. Mr. Daniel Bernoulli a aussi remarqué, que la courbe d'une lame élastique renferme un tel *minimum*; car nommant un élément quelconque de cette courbe $= ds$, & le rayon de sa développée dans cet endroit $= r$, il a observé que

la valeur de cette formule $\int \frac{ds}{r}$ devient un *minimum* dans la courbe

élastique; & c'est de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité sur la methode de *Maximis & Minimis*, pour faire voir, que ce principe fournit la même courbe, qu'on a trouvée par la methode directe, dont on se sert ordinairement.

IV. Par là on voit qu'il doit y avoir une double methode de résoudre les problemes de Mécanique; l'une est la methode directe, qui est fondée sur les loix de l'équilibre, ou du mouvement; mais l'autre est celle dont je viens de parler, où sachant la formule, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*, la solution se fait par le moyen de la methode de *Maximis & minimis*. La premiere fournit la solution en déterminant l'effet par les causes efficientes; or l'autre a en vuë les causes finales, & en déduit l'effet: l'une & l'autre doit conduire à la même solution, & c'est cette harmonie, qui nous convainc

de

de la vérité de la solution, quoique chaque methode doive être fondée sur des principes indubitables. Mais il est souvent très difficile de découvrir la formule, qui doit être un *maximum*, ou *minimum*, & par laquelle la quantité d'action est représentée. C'est une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathématique, qu'à la Métaphysique puisqu'il s'agit de connoître le but, que la nature se propose dans ses opérations : & ce seroit porter cette science à son plus haut degré de perfection, si l'on étoit en état d'assigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y est la plus petite, & qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoissance. Mais je crois que nous sommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, & qu'il sera presque impossible d'y arriver. à moins que nous ne découvrions pour un grand nombre de cas differens les formules, qui y deviennent, ou des *maxima*, ou *minima*. Or sachant les solutions, que la methode directe nous fournit, il ne sera pas difficile de deviner des formules, qui étant supposées des *maxima*, ou *minima*, conduisent aux mêmes solutions. Par ce moyen nous connoissons *a posteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, & alors il ne sera plus si difficile d'en démontrer la vérité par les principes connus de la Métaphysique.

V. C'est dans cette vue, que je me propose de développer quelques problèmes de Statique, qui roulent sur la courbe, qu'un fil parfaitement flexible doit former, étant sollicité par des forces quelconques. Je chercherai premièrement la solution de ces problèmes par la methode directe, c. à. d. par les loix connues de l'équilibre ; ensuite je tâcherai de découvrir les formules, qui dans ces courbes trouvées obtiennent, ou la plus grande, ou la plus petite valeur, & lesquelles par conséquent pourront être regardées comme les expressions de la quantité d'action, dont la valeur sera plus petite pour la courbe, qu'on aura trouvée par l'autre methode, qu'elle seroit, si le fil avoit pris tout autre courbure. J'ai choisi cette espece de problèmes, puisqu'on sait déjà, que dans le cas où le fil n'est sollicité que par la gravité, c'est la distance du centre de gravité du fil au centre de la terre, qui est un *minimum*. Or je rendrai ce problème plus général,

général, en supposant que toutes les particules du fil soient sollicitées par des forces quelconques, qui soient dirigées, ou vers un point fixe, ou vers plusieurs, étant proportionnelles à des fonctions quelconques de ces distances: de plus on pourra supposer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des voiles, & d'autres semblables, où la direction des forces est toujours perpendiculaire à la courbe même: & dans ces cas j'ai remarqué qu'il est beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y est un *maximum*, ou *minimum*; & partant cette considération contribuera d'autant plus à la connoissance des choses, que la nature dans ses opérations tâche de ménager le plus qu'il est possible.

PROBLEME GÉNÉRAL.

VL Le fil parfaitement flexible AYM étant sollicité dans chacun de ses élémens par des forces quelconques, trouver la courbe AYM, à laquelle ce fil sera réduit.

Fig. 1.

SOLUTION.

Rapportons la courbe AYM, qu'il faut chercher à l'axe CP, & nommons une abscisse quelconque $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & la longueur du fil, qui y répond $AYM = s$, de sorte que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, puisque l'appliquée PM est supposée perpendiculaire à l'abscisse CP. Maintenant de quelque force que l'élément $Mm = ds$ soit sollicité, elle pourra être réduite à deux forces, dont l'une tirera selon la direction MQ parallèle à l'abscisse CP, l'autre selon la direction de l'appliquée MP. Soit donc la force $MQ = Qds$, & la force $MP = Pds$, puisque chacune n'agissant, que sur l'élément du fil $Mm = ds$ sera infiniment petite. Afin que le fil demeure en équilibre, puisqu'il est parfaitement flexible, il faut que les momens de toutes les forces, dont la partie antérieure du fil AYM est sollicitée, par rapport au point M, se détruisent mutuellement. Pour cet effet considérons une portion quelconque du fil AY, que nous regarderons comme variable, pendant que le point M demeure fixe, &

partant les quantités x & y constantes; supposition qui ne durera, que jusqu'à ce que nous aurons trouvé la somme de tous les momens des forces par rapport au point M. Soit donc notre nouvelle abscisse variable $CX = \phi$, l'appliquée $XY = \psi$, & la courbe $AY = \omega$, de sorte que $d\omega = \sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2)}$; & soit des forces, dont l'élément $Yy = d\omega$ est sollicité, celle qui agit selon YZ parallèle à $CX = qd\omega$, & l'autre qui agit selon $YX = pd\omega$. Or le moment de celle-là YZ par rapport au point M sera $= qd\omega (PM - YX) = (y - \psi) qd\omega$, qui tendra à tourner le fil autour du point M, en sorte que l'angle AMQ soit diminué: & le moment de l'autre force $YX = pd\omega$ sera $= pd\omega (CP - CX) = (x - \phi) pd\omega$, dont l'effet sera contraire au précédent, & tendra à augmenter l'angle AMQ . Par conséquent le moment de ces deux forces prises ensemble sera $= (y - \psi) qd\omega - (x - \phi) pd\omega$, qui sera employé à tourner le fil autour de M dans le sens AQ . Donc le moment de toutes les forces qui agissent sur la portion du fil AY , sera l'intégrale de cette expression, & puisque x & y sont considérés comme constantes, ce moment qui résulte de la portion AY sera $= y \int q d\omega - \int \psi q d\omega - x \int p d\omega + \int \phi p d\omega$. Approchons maintenant le point Y jusqu'au point M pour avoir le moment, qui résulte de toutes les forces dont le fil AYM est sollicité, & alors les quantités ϕ , ψ , q , p & $d\omega$ deviendront égales à x , y , Q , P & ds de sorte que la somme de tous les momens des forces qui agissent sur le fil AYM , pour le tourner autour de M dans le sens AQ sera $= y \int Q ds - \int y Q ds - x \int P ds + \int x P ds$. Or afin que le fil étant parfaitement flexible, ne soit pas rennué, il faut que la somme de ces momens évanouisse, d'où nous obtiendrons cette équation, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$y \int Q ds - \int y Q ds - x \int P ds + \int x P ds = 0.$$

Cette équation deviendra plus simple, en prenant la différentielle qui sera:

$$dy \int Q ds - dx \int P ds = 0.$$

où $\int Q ds$ exprime la somme de toutes les forces, dont le fil AM est sollicité suivant la direction de l'abscisse PC , & $\int P ds$ la somme de toutes

toutes les forces, dont le fil AM est sollicité suivant la direction des appliquées PM. C. Q. F. T.

VII. Si le fil est arrêté au point A, ou tenu fixe par une force quelconque, on résoudra aussi celle-cy suivant les directions AB & AC. Soit la force AB = B, & la force AC = C; & celle-là doit être comprise dans $\int Q ds$, & celle-cy dans $\int P ds$. Donc, si ces expressions $\int Q ds$ & $\int P ds$, ne comprennent que les forces, qui agissent sur les élémens du fil, on y doit ajouter ces forces finies B & C, & au lieu de $\int Q ds$ nous aurons $B + \int Q ds$, & $C + \int P ds$ au lieu de $\int P ds$; ce qui donnera pour la courbe cette équation différentielle :

$$dy (B + \int Q ds) - dx (C + \int P ds) = 0.$$

dont l'intégrale sera exprimée par :

$$\int dy (B + \int Q ds) - \int dx (C + \int P ds) = \text{Const.}$$

Or puisque $\int dy (B + \int Q ds)$ exprime la somme des momens, qui résultent des forces selon la direction des abscisses, & $\int dx (C + \int P ds)$ la somme des momens, qui résultent des forces selon la direction des appliquées, comme ces momens se doivent détruire mutuellement, il est évident que la constante doit être = 0, pourvu que les intégrales s'étendent par tout le fil.

VIII. Cependant, puisque les intégrales $\int Q ds$ & $\int P ds$ peuvent déjà renfermer les constantes B & C, on les pourra omettre sans faute, de sorte que la nature de la courbe du fil sera exprimée, ou par cette équation intégrale $\int dy \int Q ds - \int dx \int P ds = \text{Const.}$ ou par cette équation différentielle $dy \int Q ds - dx \int P ds = 0$. Laquelle nous fournit cette analogie :

$$dy : dx = \int P ds : \int Q ds.$$

D'où nous tirons cette règle générale pour trouver la courbure d'un fil parfaitement flexible, étant sollicité par des forces quelconques. C'est qu'ayant tiré l'appliquée infiniment proche pm, & Mn parallèle à l'abscisse, il y aura toujours : le différentiel de l'appliquée mn au différentiel de l'abscisse Mn = Pp, comme la somme de toutes les forces, qui agissent dans la direction des appliquées, est à la somme de toutes les forces, qui agissent dans la direction des abscisses.

IX. Si le fil A Y M n'est pas parfaitement flexible, mais qu'il soit élastique, ou qu'il ait quelque roideur qui résiste à l'inflexion, il ne sera pas difficile aussi dans ce cas de déterminer la courbe, que ce fil prendra, quoiqu'il soit outre cela sollicité par des forces quelconques, comme je viens de supposer. Car la force, ou plutôt le moment, qui est requis pour courber le fil au point M, sera proportionnel à la courbure dans ce point, ou réciproquement comme le rayon de la développée au point M. Supposant donc ce rayon $= r$, de sorte que r

$$= \frac{ds^3}{dx ddy}, \text{ en supposant } dx \text{ constant, ou } r = \frac{ds dx}{ddy} \text{ en suppo-}$$

sant ds constant, la force de roideur sera comme $\frac{1}{r}$, si la roideur

est partout égale. Or si l'épaisseur du fil est supposée variable, la force de roideur pourra être exprimée par $\frac{S}{r}$, ou S est une fonction

proportionnelle à l'épaisseur du fil au point M. Cette force de roideur tendant à remettre le fil dans sa situation droite, que je suppose lui être naturelle, elle doit être contrebalancée par la somme des moments de toutes les forces dont le fil est sollicité. Or la somme de ces moments a été trouvée $= y \int Q ds - \int y Q ds - x \int P ds + \int x P ds$ ou bien $= \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$, dont la direction étant con-

traire à la force de roideur $\frac{S}{r}$, il faut que ces deux expressions soient égales entr'elles. De là nous obtiendrons pour la courbe de ce fil roide, ou élastique, cette équation :

$$\frac{S}{r} = \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$$

qui se réduit à celle, que nous avons trouvée dans la solution du problème, si la roideur S évanouit.

X. En voicy donc la solution du problème le plus général, par laquelle on est en état de déterminer la courbe, que forme un fil, ou parfaitement flexible, ou élastique, dont tous les points sont sollicités

cités par des forces quelconques. Mais je remarque d'abord, que cette solution générale ne se peut déduire par la methode de *maximis & minimis*: car quoique cette methode soit propre à fournir des solutions générales, il faut pourtant qu'on sache, desquelles des variables soient composées les fonctions, qui entrent dans la formule qui doit être, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Donc, à moins qu'on ne détermine la nature des fonctions P & Q, qui expriment les forces, dont chaque élément Mm du fil est sollicité, il est impossible de découvrir une formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, produise la même courbe. Je m'en vais donc appliquer cette solution générale à des cas particuliers, en déterminant les fonctions P & Q, ou par les abscisses x , ou par les appliquées y , ou par une expression, qui contienne toutes les deux d'une maniere, dont la composition soit connuë. Pour cet effet je ferai l'application de la solution générale trouvée aux problemes suivants: & je tacherai de joindre à la solution de chacun la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, conduite à la même courbe: afin qu'on en puisse connoître pour chaque cas l'expression, qui représente la quantité d'action.

PROBLEME I.

XI. *Le fil parfaitement flexible AYM étant dans chaque point M sollicité selon la direction des appliquées MP par des forces, qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces appliquées: trouver la courbe AYM que ce fil formera.*

SOLUTION.

Ayant nommé comme auparavant l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de l'appliquée y , à laquelle la force dont le fil au point M est tiré suivant la direction MP, est supposée proportionnelle, de sorte que la force qui agit sur l'élément $Mm = ds$ soit $= Y ds$, laquelle ayant été supposée dans la solution générale $= P ds$, nous aurons $P = Y$ & $Q = 0$. Et partant puisque le fil est supposé parfaitement flexible, la nature de la

courbe sera exprimée par cette équation, $B dy - d x \int Y ds = 0$. Car quoique $Q = 0$, l'intégral $\int Q ds$ n'évanouira pas, mais il sera égale à une constante B, qui exprime la force A B appliquée au bout du fil A: or l'autre force A C = C sera renfermée dans l'expression intégrale $\int Y ds$. Pour réduire cette équation, & pour la ramener à la forme, qui se trouve dans la methode de *maximis & minimis*, je suppose $dy = p dx$, pour avoir $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$, & l'équation trouvée se changera en cette forme $B p = \int Y dx \sqrt{(1 + pp)}$, dont le différentiel est $B dp = Y dx \sqrt{(1 + pp)}$, ou $B p dp = Y dy \sqrt{(1 + pp)}$ à cause de $dx = \frac{dy}{p}$, d'où nous tirons $\frac{B p dp}{\sqrt{(1 + pp)}} = Y dy$, & prenant les intégrales $\int Y dy = B \sqrt{(1 + pp)}$, la constante qu'on pourroit ajouter, étant comprise dans l'intégrale $\int Y dy$: & cette équation $\int Y dy = B \sqrt{(1 + pp)}$ ayant ses deux variables p & y séparées, peut suffire pour la construction de la courbe, que nous cherchons.

XII. Pour trouver cette même courbe par la methode de *Maximis & Minimis*, il faut se rappeler cette solution générale, que j'ai donnée dans mon traité sur cette matière. Ayant posé l'abscisse $= x$, l'appliquée $= y$, & pour les différentiels $dy = p dx$; $dp = q dx$; $dq = r dx$ &c. Soit $\int Z dx$ la formule, dont la valeur doit être un *maximum*, ou *minimum*, où Z marque une fonction quelconque des quantités x, y, p, q, r , &c. de sorte que son différentiel ait une telle forme:

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ \&c.}$$

alors j'ai démontré, que la courbe, où $\int Z dx$ est un *maximum*, ou *minimum*, sera exprimée par cette équation, supposant l'élément dx constant.

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{\&c.}$$

XIII. Comme cette équation est encore trop générale pour notre cas, soit Z seulement une fonction de y & p , de sorte que $dZ = N dy + P dp$, & la formule $\int Z dx$ sera un *maximum*, ou *minimum*, dans

$$\text{la courbe exprimée par cette équation : } 0 = N - \frac{dP}{dx} \text{ ou } N dx = dP,$$

dP , qui étant multipliée par p , à cause de $p dx = dy$, donne $N dy = p dP$. Or nous avons $dZ = N dy + P dp$, & partant il y aura $dZ = p dP + P dp$, dont l'intégrale est : $Z = Pp + \text{Const.}$ Nous voilà donc réduits à trouver une telle fonction Z de y & de p , que supposant $dZ = N dy + P dp$, l'équation $Z = Pp + \text{Const.}$ devienne la même, que nous avons trouvée, savoir $\int Y dy = B \sqrt{(1+pp)}$, ou comme B sera égale à la constante de la première équation, que $Z - Pp$ devienne $= \frac{\int Y dy}{\sqrt{(1+pp)}}$, ou $\int Y dy = (Z - Pp) \sqrt{(1+pp)}$.

XIV. Pour résoudre cette équation, ou pour en tirer la valeur de Z , puisque $P = \frac{Z}{p} - \frac{\int Y dy}{p \sqrt{(1+pp)}}$, je remets cette valeur dans l'équation $dZ = N dy + P dp$, & j'aurai $dZ = N dy + \frac{Z dp}{p} - \frac{dp \int Y dy}{p \sqrt{(1+pp)}}$, ou bien $\frac{p dZ - Z dp}{p p} = \frac{N dy}{p} - \frac{dp \int Y dy}{p p \sqrt{(1+pp)}}$, où le premier membre étant intégrable, ayant pour intégrale $\frac{Z}{p}$, il faut que le second membre soit aussi intégrable.

Or son intégrale tirée de la partie $-\frac{dp \int Y dy}{p p \sqrt{(1+pp)}}$ en supposant y constant est $= \frac{\int Y dy}{p} \sqrt{(1+pp)} + \text{funct. } y$ & partant nous aurons $\frac{Z}{p} = \frac{\int Y dy}{p} \sqrt{(1+pp)} + \text{funct. } y$: ou $Z = \int Y dy \sqrt{(1+pp)} + p \text{ funct. } y$. Par conséquent la courbe du fil se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les courbe celle, dans laquelle $\int Z dx$ c. à d. $\int dx \sqrt{(1+pp)} \cdot \int Y dy + \int p dx \cdot \text{funct. } y$, sera un *maximum*, ou un *minimum* ; & l'expression, qui représente la quantité d'action sera $\int dx \sqrt{(1+pp)} \cdot \int Y dy + \int dy \text{ funct. } y$. Ou puisque $\int dy \text{ funct. } y$ est une fonction

tion de y , qui demeure la même pour toutes les courbes, qui passent par les mêmes points A & M, la courbure du fil AYM aura cette propriété, que parmi toutes les courbes qui passent par les points A & M, il y aura cette expression $\int ds \int Y dy$ un minimum: d'où je tire le Theoreme suivant.

THEOREME I.

XV. Le fil AYM, comme nous avons supposé dans le probleme précédent, étant dans chaque point M sollicité selon la direction des appliquées MP par des forces, qui sont exprimées par une fonction quelconque Y des appliquées $PM = y$, prendra une telle figure AYM, que parmi toutes les autres courbes possibles, il y aura cette expression $\int ds \int Y dy$ un minimum.

On trouvera donc cette courbe, si on cherche parmi toutes les courbes, qui sont comprises entre les mêmes termes, celle où la valeur de cette expression $\int ds \int Y dy$ devient un minimum. Il n'est pas nécessaire, comme la nature de la question semble de demander, que cette propriété ne regarde que les courbes de la même longueur: car il revient au même, soit qu'on suppose la formule $\int ds \int Y dy$ parmi toutes les courbes possibles, ou seulement parmi les isoperimetres: Car pour ce dernier cas, on devroit, comme j'ai démontré dans mon traité sur cette matiere, rendre cette formule $\int ds \int Y dy + \alpha \int ds$ un minimum. Or cette constante α pouvant être comprise dans l'intégral $\int Y dy$, on pourra negliger ce terme $\alpha \int ds$, & alors il ne reste à rendre un minimum, que la formule trouvée $\int ds \int Y dy$.

PROBLEME II.

XVI. Le fil parfaitement flexible AYM étant sollicité dans chaque point M suivant les directions MP, MQ par des forces, dont celle-là, qui agit selon MP, soit exprimée par une fonction de l'appliquée $MP = y$, & celle-cy, qui agit selon MQ par une fonction de l'abscisse $CP = x$: trouver la figure du fil AYM.

Solu-

S O L U T I O N.

Retenant toujours les mêmes dénominations $CP = x$, $PM = y$, l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de y , qui exprime la force, qui agit selon MP , & X la fonction de x , qui exprime la force MQ . Nous n'avons donc que mettre dans la solution générale, que X & Y au lieu de Q & P , pour avoir l'équation suivante, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$dy (B + \int X ds) - dx (C + \int Y ds) = 0$$

ou, puisque les constantes B & C peuvent être comprises dans les formules intégrales, nous aurons:

$$dy \int X ds = dx \int Y ds.$$

Supposons $dy = p dx$, pour avoir $ds = dx \sqrt{1+pp}$, & l'équation trouvée sera $p \int X dx \sqrt{1+pp} = \int Y dx \sqrt{1+pp}$ qui étant différenciée donne

$$dp \int X dx \sqrt{1+pp} + X p dx \sqrt{1+pp} = Y dx \sqrt{1+pp}$$

Soit de plus $dp = q dx$, & après avoir différencié cette équation:

$$\int X dx \sqrt{1+pp} + \frac{X p \sqrt{1+pp}}{q} = \frac{Y \sqrt{1+pp}}{q}$$

nous obtiendrons mettant partout $q dx$ au lieu de dp

$$\begin{aligned} & X dx \sqrt{1+pp} + X dx \sqrt{1+pp} + \frac{X p p dx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{p dX \sqrt{1+pp}}{q} - \frac{X p dq \sqrt{1+pp}}{q q} \\ &= \frac{Y p dx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{dY \sqrt{1+pp}}{q} - \frac{Y dq \sqrt{1+pp}}{q q} \text{ qui se réduit à } \\ & 2 X dx + \frac{X p p dx}{1+pp} + \frac{p dX}{q} - \frac{X p dq}{q q} = \frac{Y p dx}{1+pp} + \frac{dY}{q} - \frac{Y dq}{q q} \end{aligned}$$

Multiplions cette équation par $1+pp$ pour avoir

$$\frac{(dY - p dX)}{q} (1+pp) - \frac{dq}{q q} (Y - pX) (1+pp) + Y p dx - 2 X dx (1+pp) - X p p dx =$$

& pour en trouver l'intégrale, s'il y en a, je suppose;

$$\frac{(Y - pX) (1+pp)}{q} = Z \text{ ce qui étant différencié donne}$$

$$\frac{(dY - p dX)}{q} (1+pp) - \frac{dq}{q q} (Y - pX) (1+pp) + 2 p dx (Y - pX) - X dx (1+pp) =$$

ayant mis partout $dp = q dx$, Retranchons de cette équation la précédente, & il nous restera :

$dZ = Y p dx - 2 X p p dx + X dx (1 + p p) + X p p dx$
ou bien $dZ = Y p dx + X dx$. Or puisque $dy = p dx$, nous aurons $dZ = X dx + Y dy$, laquelle expression, parceque X est fonction de x & Y fonction de y , sera integrable & donnera

$$Z = \int X dx + \int Y dy$$

de sorte que notre equation integrale cherchée sera

$$\frac{(Y - pX)(1 + p p)}{q} = \int X dx + \int Y dy$$

ou à cause de $q = \frac{dp}{dx}$ & $dy = p dx$:

$$\frac{dp}{1 + p p} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

Il ne paroît pas que cette équation se puisse encore integrer ; aussi n'est ce pas mon dessein de construire ces courbes, ou d'en rechercher la nature : mon but n'étant ici, que de trouver les formules, qui étant supposées devenir un *maximum*, ou un *minimum*, fournissent les mêmes courbes que nous trouvons par les principes de mechanique.

XVII. Soit $\int Z dx$ cette formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, produise la courbe, que nous venons de trouver, ou l'équation :

$$\frac{dp}{1 + p p} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

& soit $dZ = M dx + N dy + P dp$, voiant, que Z doit être une fonction des quantités x, y , & p . Et alors la courbe cherchée sera exprimée par cette équation :

$0 = N - \frac{dP}{dx}$, ou $0 = N dx - dP$,

équation qui doit être la même, que $\frac{dp}{1 + p p} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$.

Ici je remarque, que dans l'analyse il nous manque encore une methode, par laquelle on puisse decouvrir la formule $\int Z dx$, sachant l'équation, à laquelle elle doit conduire : mais après quelques essais on trouve-

ni, que l'on n'a qu'à mettre $Z = (\int X dx + \int Y dy) \sqrt{1 + pp}$.
Car alors on aura $M = X \sqrt{1 + pp}$; $N = Y \sqrt{1 + pp}$.

& $P = \frac{p(\int X dx + \int Y dy)}{\sqrt{1 + pp}}$, d'où l'on tire

$$dP = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1 + pp) \sqrt{1 + pp}} + \frac{X p dx + Y p dy}{\sqrt{1 + pp}}$$

& partant l'équation $N dx = dP$ donnera

$$Y dx \sqrt{1 + pp} = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1 + pp) \sqrt{1 + pp}} + \frac{X p dx + Y p dy}{\sqrt{1 + pp}}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{1 + pp}$ produira :

$$Y dx + Y p p dx - X p dx - Y p dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1 + pp}$$

Or puisque $p dx = dy$, il sera $Y p p dx - Y p dy = 0$; & par conséquent on aura :

$$Y dx - X dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1 + pp} \text{ ou } \frac{dp}{1 + pp} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée pour la courbure du fil APM .

THEOREME II.

XVIII. *Le fil APM étant sollicité, comme on a supposé dans le problème II. dans chaque point M par deux forces, l'une selon la direction des abscisses MQ qui soit égale à une fonction X de l'abscisse $CP = x$; & l'autre selon la direction des appliquées MP , qui soit égale à une fonction Y de l'appliquée $PM = y$; alors ce fil prendra une telle figure APM , dans laquelle cette expression $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ sera un minimum.*

Le Theoreme precedent nous a déjà fait voir, que si le fil n'étoit sollicité que par les forces Y , alors cette formule $\int ds \int Y dy$ seroit un *minimum*: & par la même raison, si le fil étoit sollicité par les seules forces X , alors cette formule $\int ds \int X dx$ deviendrait un *minimum*. A présent nous voyons, que si ces deux différentes forces agissent ensemble, alors aussi la somme de ces deux formules $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ y deviendra un *minimum*, ce qui sera à présent d'autant plus aisé de démontrer *a priori*. Nous avons supposé les forces X &

X^2

Y con-

P contraires aux accroissemens des coordonnées x & y ; car dès que le point M obeiroit à ces forces, tant l'abscisse x que l'appliquée y en deviendrait plus petite. D'où il est clair, que si ces forces avoient des directions opposées, alors la formule $-\int ds (\int X dx + \int P dy)$ deviendrait un *minimum*, & partant celle-cy $+\int ds (\int X dx + \int P dy)$ un *maximum*: ce qui sert à faire voir l'étroite liaison entre les *maxima* & *minima*, de sorte qu'on n'a qu'à changer le signe, pour changer le *minimum* dans un *maximum*, & réciproquement.

P R O B L E M E III.

XIX. Si l'épaisseur du fil APM n'est pas la même partout, mais qu'elle varie selon une loi quelconque, & que ce fil soit sollicité en chaque point M suivant la direction MQ par une force exprimée par une fonction quelconque de l'abscisse $CP = x$, trouver la figure que ce fil prendra.

S O L U T I O N.

Soit X la fonction, à laquelle la force, qui tire l'élément Mm suivant MQ , est proportionnelle; & cette force X doit être regardée comme une force accélératrice, qui étant multipliée par la masse de l'élément Mm , donnera la véritable force motrice. Or le fil étant supposé d'une épaisseur inégale, la masse de l'élément Mm , n'e sera plus exprimée par ds , ni par conséquent la force par $X ds$. Soit donc $\int S ds$ la masse du fil entier APM dont la longueur $= s$, & la masse de l'élément Mm fera $= S ds$, où S marque une fonction quelconque de s , d'où dépend l'épaisseur du fil. Donc la force qui tire cet élément Mm , suivant la direction des abscisses MQ , fera $= X S ds$, qui étant mise pour $Q ds$ donnera pour la figure du fil cette équation :

$$C dx = dy \int X S ds.$$

Posant $dy = p dx$ & $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ cette équation

se changera en $\frac{C}{p} = \int X S dx \sqrt{1 + pp}$, & par la différentiation en

$$-\frac{C dp}{p^2 \sqrt{1 + pp}} = X S dx, \text{ ou } \frac{C \sqrt{1 + pp}}{p} = \int X S dx.$$

Il s'en faut encore beaucoup, qu'on puisse connoître de cette équation la



la courbe que nous cherchons, mais cette équation suffit pour notre dessein qui est de découvrir une formule, qui étant supposée un *mini-*

um produise la même équation $\frac{C \sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X S dx$.

XX. Il paroît d'abord fort probable, que pour avoir cette formule, nous n'avons qu'à écrire $S ds$, au lieu de dx , dans les formules, qui satisfont aux questions précédentes. Ainsi pour ce cas que nous venons de développer nous aurons cette formule $\int S ds \int X dx$, qui étant supposée un *minimum*, devrait produire l'équation pour la courbure du fil. Cette formule comparée à la générale $= \int Z dx$, à cause de $ds = dx \sqrt{(1+pp)}$ donnera $Z = S \sqrt{(1+pp)}$. $\int X dx$: qui étant une fonction renfermant non seulement les x, y , avec leurs différentiels, mais aussi l'arc s , il faut employer pour ce cas la règle qui suit.

Si Z est une fonction non seulement des variables x, y , & des quantités qui résultent de leurs différentiels, savoir $p = \frac{dy}{dx}$; $q =$

$\frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ &c. mais aussi d'une formule intégrale $\int Z dx = \Pi$,

de sorte que

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ \&c.}$$

$$\text{ \& } dZ = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr \text{ \&c.}$$

Alors entre toutes les courbes, qui ont $\int Z dx$ de la même grandeur, celle où il y aura $\int Z dx$ un minimum sera exprimée par cette équation.

$$0 = N - \mathfrak{N} \int L dx - \frac{1}{dx} d.(P - \mathfrak{P} \int L dx) + \frac{1}{dx^2} dd.(Q - \mathfrak{Q} \int L dx).$$

XXI. Dans le cas présent S étant une fonction de $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, je ferai $\Pi = s$ & $Z = \sqrt{(1+pp)}$: & il sera $\mathfrak{M} = 0$,

$$\mathfrak{N} = 0, \text{ \& } \mathfrak{P} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}; \text{ Ensuite supposant } dS = K ds,$$

nous aurons

X 3

dZ

$$dZ = Kds \sqrt{(1+pp)} \cdot \int X dx + XSdx \sqrt{(1+pp)} + \frac{Sp dp}{\sqrt{(1+pp)}} \int X dx$$

$$\& \text{ partant } L = K \sqrt{(1+pp)} \int X dx; M = XS \sqrt{(1+pp)}; N = 0$$

$$\& P = \frac{Sp \int X dx}{\sqrt{(1+pp)}}. \text{ De là l'équation cherchée sera :}$$

$$0 = -\frac{1}{dx} d. \left(\frac{Sp \int X dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int Kdx \sqrt{(1+pp)} \cdot \int X dx \right)$$

$$\text{Or puisque } Kdx \sqrt{(1+pp)} = Kds, \text{ nous aurons } Kdx \sqrt{(1+pp)} = dS \& \text{ notre équation sera } 0 = -\frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (S \int X dx - \int dS \int X dx)$$

& prenant intégrale :

$$C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (S \int X dx - \int dS \int X dx).$$

Mais le différentiel de $S \int X dx - \int dS \int X dx$ étant $= XSdx$, nous

$$\text{aurons } C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int XSdx, \text{ ou bien } \frac{C \sqrt{(1+pp)}}{p}$$

$= \int XSdx$, qui est la même équation, que la solution du problème nous a fournie, & par conséquent cette solution se trouve, si l'on cherche entre toutes les courbes isoperimètres, ou entre toutes les courbes, que le fil proposé pourroit former, celle, où il y aura cette formule $\int S ds \int X dx$ un *minimum* : & de là nous tirerons ce *theorem* encore plus général.

THEOREME III.

XXII. Le fil parfaitement flexible AYM, dont la longueur $= s$, & la masse $= \int S ds$, étant sollicité en chaque point M par deux forces accélératrices, suivant les directions MQ, MP, dont celle-là soit égale à une fonction X de l'abscisse CP $= x$, à laquelle la direction MQ est parallèle; or celle-ci, qui agit dans la direction de l'appliquée MP $= y$, soit égale à une fonction Y de y, de sorte que l'élément du fil Min $= ds$, dont la masse $= Sds$, soit sollicité par la force motrice XSds selon MQ & par la force motrice YSds selon MP: la courbe, AYM, que le fil formera, aura cette propriété, que parmi toutes les autres

autres courbes de la même longueur, il y aura cette formule $\int S ds$ ($\int X dx + \int Y dy$) UN MINIMUM.

Il n'est pas nécessaire de démontrer ce theoreme dans toute son étendue, car l'ayant démontré pour le cas, où l'élément Mm n'est sollicité que par une force $XS ds$ dans la direction MQ , la même démonstration servira aussi pour l'autre force $YS ds$, si elle agissoit toute seule, desorte que pour le premier cas on aura la formule $\int S ds \int X dx$, & pour l'autre celle-cy $\int S ds \int Y dy$, qui doit être un *minimum*. Or la solution du probleme second nous convaincra, que si les deux forces agissent ensemble, on n'aura qu'à ajouter ensemble les deux formules, qui appartiennent séparément à ces deux cas: cependant on pourra s'assurer tout à fait de cette verité, si l'on veut faire le calcul suivant les règles, dont nous nous sommes servi dans la solution du probleme II.

XXIII. Pour approfondir la nature de ces formules, il faut avoir egard à trois choses: I^{mo}. à la quantité des forces acceleratrices, dont chaque élément du fil est sollicité, II^{do}. à la direction de ces forces & III^{io}. à l'épaisseur, ou à la masse du fil. La quantité de la force acceleratrice se trouve, si l'on divise la force motrice dont chaque élément du fil est sollicité, par la masse de ce même élément: la force acceleratrice sera donc une quantité finie exprimée par une fonction. Jusqu'ici nous avons supposé des fonctions, ou de l'abscisse x , ou de l'appliquée y , pour exprimer ces forces acceleratrices. Pour la direction de ces forces, nous l'avons supposée parallele à celle des coordonnées x ou y , dont la force même étoit une fonction: Ainsi la force exprimée par X , fonction de l'abscisse $CP = x$, agissoit dans la direction MQ parallele aux abscisses, & la force Y , fonction de l'appliquée $PM = y$, agissoit dans cette même direction MP . Dans ces cas pour trouver les formules, qui contiennent un *minimum*, ou ce qui revient au même, pour représenter la quantité d'action, il faut multiplier chaque force X & Y par l'élément de sa direction dx & dy , pour avoir $X dx$ & $Y dy$, & d'en prendre les intégrales $\int X dx$ & $\int Y dy$. A ces formules on donnera le signe $+$ si les forces X & Y sont contraires aux directions des quantités x & y , ou que leur action tend à diminuer ces quantités, comme la figure représente: or si une de ces

ces forces avoit une direction contraire; on donnera le signe — à la formule intégrale $\int X dx$ ou $\int Y dy$. Suivant cette règle par rapport aux signes, on ajoutera ensemble ces intégrales, s'il y en a plusieurs, & on multipliera la somme par la masse de l'élément du fil $S ds$. Alors l'intégrale de ce produit $\int S ds (\pm \int X dx \pm \int Y dy)$; sera la formule cherchée, dont la valeur est un *minimum* pour la courbe du fil.

XXIV. Cette règle, que nous venons de découvrir, demande, que la variable, dont la force est une fonction, & la force, ayent la même direction; & on se tromperoit, si l'on vouloit appliquer cette règle à des cas, ou cette identité de directions n'a pas lieu. Pour la preuve de cela, supposons que le fil A Y M soit sollicité au point M suivant la direction de l'appliquée MP par une force, qui soit égale à une fonction de l'abscisse CP = x . Soit cette force = X , & supposant le fil par tout également epais, nous aurons pour la courbure cette équation $B dy = dx \int X ds$, qui posant $dy = p dx$ se change en

$$B p = \int X dx \sqrt{1 + pp}, \text{ ou } \frac{B dp}{\sqrt{1 + pp}} = X dx, \text{ d'où l'on}$$

$$\text{tire } \int X dx = B \int \frac{dp}{\sqrt{1 + pp}}.$$

Or on verra bientôt, que cette courbe ne se trouve pas en faisant la formule $\int ds \int X dy$ un *minimum*, où la force acceleratrice X est multipliée par dy , le différentiel de la ligne MP, qui représente la direction de cette force, & l'intégral $\int X dx$ est multiplié par l'élément du fil ds . Mais la courbe qu'on tire de cette formule $\int ds \int X dy$ suivant la methode de *maximis* & *minimis* sera bien différente de celle, que nous venons de trouver savoir

$$\int X dx = B \int \frac{dp}{\sqrt{1 + pp}} = B l (p + \sqrt{1 + pp})$$

XXV. Voyons donc quelle sera pour ce cas la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, conduite à cette même équation. Soit $\int Z dx$ cette formule, & $dZ = M dx + N dy + P dp$;

$$\text{d'où on obtient en général cette équation } 0 = N - \frac{dP}{dx}$$

Or

Or puisque notre équation $\int X dx = B \int \frac{dp}{V(1+pp)}$ ne contient pas y , on voit que $N = 0$, & que l'équation pour la courbe sera $dP = 0$, ou $P = B$. Soit pour abrégér $\Pi = \int \frac{dp}{V(1+pp)}$, de sorte que Π est une fonction connue de p , & notre équation $\int X dx = B \Pi$, comparée à $P = B$, donnera $P = \frac{\int X dx}{\Pi}$, & partant $dZ = M dx + \frac{dp \int X dx}{\Pi}$; soit l'intégral $\int \frac{dp}{V(1+pp)} = \Phi$, & nous aurons $Z = \Phi \int X dx$, & la formule dont la valeur est un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe du fil sera $\int \Phi dx \int X dx$, où Φ marque une fonction de p , qui renferme une double intégration savoir $\Phi = \int \frac{dp}{V(1+pp)} = \int \frac{dp}{V(1+pp) \pm p}$; formule si embarrassée qu'il semble presque impossible, qu'aucune theorie y sauroit jamais conduire à priori.

XXVI. Nous voyons donc, qu'il n'est pas permis de donner à la règle, que nous avons tirée des trois theoremes precedens, une plus grande étendue, que pour les cas où, tant la quantité, que la direction des forces acceleratrices sont déterminées par la même quantité variable, & quoique jusqu'ici nous ayons supposé ces variables parallèles entr'elles, pourtant la règle mentionnée aura aussi lieu, si les variables, dont les forces sont des fonctions, sortent d'un point fixe, pourvu que les forces agissent dans la direction de ces mêmes variables. La même règle ne souffrira non plus aucune exception, quand même le fil seroit sollicité en même tems vers plusieurs points fixes, par des forces acceleratrices, qui fussent proportionnelles à des fonctions quelconques des distances à ces points. Comme cette circonstance contribuera considérablement à la perfection de la theorie, que nous avons en vuë, je joindrai les problemes suivans, où je considérerai des forces dirigées vers un, ou plusieurs points fixes, pour en tirer les

theoremes, qui contiennent les formules, dont la quantité d'action peut être représentée.

P R O B L E M E IV.

Fig. 2. XXVII. *Le fil A M étant dans tous ses points M sollicité vers le point fixe C par une force, qui soit exprimée par une fonction quelconque de la distance M C: trouver la courbe C M, à laquelle le fil sera réduit.*

S O L U T I O N.

Que l'axe CP auquel nous rapporterons la courbe, passe par le point C, & y ayant tiré la perpendiculaire MP, soit $CP = x$, $PM = y$, & il sera $CM = \sqrt{(xx + yy)}$. Or soit $CM = \sqrt{(xx + yy)} = v$ & V la fonction de v , qui exprime la force acceleratrice, dont l'élément M m est tiré vers C. Décomposons cette force selon les directions MP, MQ paralleles aux coordonnées, & nous aurons la force selon MQ $= \frac{Vx}{v}$ & la force selon MP $= \frac{Vy}{v}$. Donc

dans la solution du problème général nous n'avons qu'à mettre $\frac{Vx}{v}$ au lieu de Q & $\frac{Vy}{v}$ au lieu de P, & l'équation pour la courbe cherchée A M fera

$$dy \int \frac{Vx}{v} ds - dx \int \frac{Vy}{v} ds = 0$$

où ds marque la masse de l'élément du fil Mm, que je supposerai ici de la même épaisseur par tout, desorte que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Mettons comme auparavant $dy = p dx$, pour avoir $p \int \frac{Vx dx \sqrt{(1+pp)}}{v} = \int \frac{Vy dx \sqrt{(1+pp)}}{v}$ dont le différentiel est:

$$dp \int \frac{Vx dx \sqrt{(1+pp)}}{v} + \frac{Vx p dx \sqrt{(1+pp)}}{v} = \frac{Vy dx \sqrt{(1+pp)}}{v}$$

Soit

Soit de plus $dp = q dx$, & pour $\frac{V}{v}$ écrivons U , pour avoir:

$$\int U x dx \sqrt{1+pp} = \frac{U(y-px) \sqrt{1+pp}}{q}$$

dont le différentiel est:

$$U x dx \sqrt{1+pp} = \frac{dU(y-px) \sqrt{1+pp}}{q} - U x dx \sqrt{1+pp} + \frac{U(y-px) p dx}{\sqrt{1+pp}} - \frac{U(y-px) dq \sqrt{1+pp}}{q^2}$$

qui se change en celle - cy

$$\frac{2 x q dx}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{p q dx}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

ou bien à cause de $q dx = dp$ en celle - cy

$$\frac{2 x dp}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{p dp}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

dont chaque membre est un différentiel logarithmique; car $d(y-px)$

$$= -x dp, \text{ \& partant } \frac{2 x dp}{y-px} = \frac{-2 d(y-px)}{y-px}$$

Par conséquent l'intégrale de notre équation fera $lC - 2 l(y-px) = lU + l\sqrt{1+pp} - lq$, & remontant aux nombres:

$$\frac{C}{(y-px)^2} = \frac{U \sqrt{1+pp}}{q} = \frac{U dx \sqrt{1+pp}}{dp}$$

Donc $\frac{C dp}{(y-px)^2 \sqrt{1+pp}} = U dx$. Or puisque U est fon-

ction de $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, & partant $v dv = x dx + y dy = d(x + py)$ multiplions notre équation par $x + py$, pour avoir

$$\frac{C dp (x + py)}{(y-px)^2 \sqrt{1+pp}} = U dx (x + py) = U v dv = V dv$$

à cause de $V = Uv$; où le membre $V dv$ est intégrable: or je ré-

marque que l'autre membre $\frac{C dp (x + py)}{(y-px)^2 \sqrt{1+pp}}$ est également

integrable, ayant pour integrale $\frac{C V (1+pp)}{y-px}$. Car puisque d

$(y-px) = -x dp$ à cause de $dy = p dx$, il sera

$$\frac{C V (1+pp)}{y-px} = \frac{C p dx}{(y-px) V (1+pp)} + \frac{C x dp V (1+pp)}{(y-px)^2} = \frac{C dp (x+py)}{(y-px)^2 V (1+pp)}$$

Par conséquent nous aurons pour l'équation de la courbe cherchée:

$$\frac{C V (1+pp)}{y-px} = \int V dv.$$

XXVIII. Il y a encore un autre chemin de trouver l'integrale de l'équation différentielle, à laquelle nous sommes parvenus :

$$= \frac{dU(y-px)V(1+pp)}{q} - 2UxdxV(1+pp) + \frac{U(y-px)pdx}{V(1+pp)} - \frac{U(y-px)dqV(1+pp)}{q q}$$

Nous n'avons qu'à la multiplier par $V(1+pp)$, pour avoir

$$= \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - 2Uxdx(1+pp) + U(y-px)pdx - \frac{U(y-px)dq(1+pp)}{q q}$$

de laquelle supposons que l'integrale soit :

$$C = Z + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}, \text{ qui étant différentiée donne}$$

$$= dZ + \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - Uxdx(1+pp) + 2U(y-px)pdx - \frac{U(y-px)dq(1+pp)}{q q}$$

qui étant comparée à notre équation donnera :

$$dZ = -Uxdx(1+pp) - U(y-px)pdx = -Udx(x+py)$$

Il y aura donc $dZ = -U(xdx + ydy) = -Uv dv$

& parceque $Uv = V$, qui est fonction de v nous aurons $dZ = -V dv$ & $Z = -\int V dv$. Par conséquent notre équation intégrée pour la première fois sera

$$C = -\int V dv + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}$$

$$\text{ou bien } \frac{U}{\int V dv} = \frac{q}{(y-px)(1+pp)}.$$

Multiplions de part & d'autre par $v dv = dx(x+py)$ & nous aurons

$$U v dv$$

$$\frac{U v d v}{\int V d v} = \frac{q d x (x + p y)}{(y - p x)(1 + p p)}$$

Or puisque $U v = V$ & $q d x = d p$,

$$\frac{V d v}{\int V d v} = \frac{d p (x + p y)}{(y - p x)(1 + p p)} = \frac{x d p}{y - p x} + \frac{p d p}{1 + p p}$$

dont chaque membre est un différentiel logarithmique à cause de $x d p = -d(y - p x)$, & delà nous tirerons cette équation intégrale

$$\int V d v = -\int (y - p x) + \int V(1 + p p) + \int C$$

d'où remontant aux nombres nous obtiendrons

$$\int V d v = \frac{C V (1 + p p)}{y - p x}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée par la première méthode, après avoir fait deux intégrations. Mais qu'on remarque en particulier l'équation qui s'est trouvée ici par la première intégration

$$\int V d v = \frac{U(y - p x)(1 + p p)}{q} \text{ ou } \frac{q \int V d v}{1 + p p} = \frac{V(y - p x)}{v}$$

à laquelle conduira la méthode de *maximis & minimis*.

THEOREME IV.

XXIX. Le fil A M étant dans tous ses points M sollicité vers le point fixe C par une force accélératrice V, qui soit une fonction quelconque de la distance C M = v, la courbure du fil se trouvera, si l'on cherche entre toutes les courbes possibles, celle où la valeur de cette expression $\int d s \int V d v$ est un minimum, (ds marquant la masse de l'élément du fil M m.)

Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Ayant fait $d y = p d x$, $d p = q d x$, la formule proposée $\int d s \int V d v$ se change en $\int d x \sqrt{(1 + p p)} \int V d v$, supposant le fil par tout de la même grosseur, où $\int V d v$ sera une fonction de v, & partant son différentiel = $V d v = \frac{V x d x + V y d y}{v}$ à cause de $v d v = x d x + y d y$.

Ou mettant $dp = q dx$, & pour ds la valeur $dx \sqrt{1 + pp}$

$$\int dx (Ux + U'x' + U''x'') \sqrt{1 + pp} = \frac{U(y - px) \sqrt{1 + pp}}{q} + \frac{U'(y' - px') \sqrt{1 + pp}}{q} + \frac{U''(y'' - px'') \sqrt{1 + pp}}{q}$$

laquelle étant différentiée, comme dans la solution du probleme précédent, donnera :

$$\begin{aligned} &= \frac{dU(y - px) \sqrt{1 + pp}}{q} - 2Ux dx \sqrt{1 + pp} + \frac{U(y - px) p dx}{\sqrt{1 + pp}} - \frac{U(y - px) dq \sqrt{1 + pp}}{qq} \\ &+ \frac{dU'(y' - px') \sqrt{1 + pp}}{q} - 2U'x' dx (1 + pp) + \frac{U'(y' - px') p dx}{\sqrt{1 + pp}} - \frac{U'(y' - px') dq \sqrt{1 + pp}}{qq} \\ &+ \frac{dU''(y'' - px'') \sqrt{1 + pp}}{q} - 2U''x'' dx \sqrt{1 + pp} + \frac{U''(y'' - px'') p dx}{\sqrt{1 + pp}} - \frac{U''(y'' - px'') dq \sqrt{1 + pp}}{qq} \end{aligned}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{1 + pp}$, & intégrée comme dans le §. XXVIII. donnera :

$$\begin{aligned} C &= - \int V dv + U(y - px)(1 + pp) : q \\ &- \int V' dv' + U'(y' - px')(1 + pp) : q \\ &- \int V'' dv'' + U''(y'' - px'')(1 + pp) : q \end{aligned}$$

Ou si nous tirons des centres de forces C, C', C'' des perpendiculaires sur la tangente de la courbe, & que nous nommions ces perpendiculaires u, u', u'' &c, nous aurons,

$$\begin{aligned} C &= + \frac{Vu dv}{du} - \int V dv \\ &+ \frac{V'u' dv'}{du'} - \int V' dv' \\ &+ \frac{V''u'' dv''}{du''} - \int V'' dv'' \end{aligned}$$

Si nous multiplions par $\frac{q}{1 + pp}$ nous obtiendrons cette équation :

$$\frac{1}{1+pp}(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'') = \begin{cases} +U(y-px) = \\ +U'(y'-px') = \\ +U''(y''-px'') = \end{cases} \begin{cases} +V(y-px) : v \\ +V'(y'-px') : v' \\ +V''(y''-px'') : v'' \end{cases}$$

qui exprime la nature de la courbure du fil.

THEOREME V.

XXXI. *Le fil parfaitement flexible AM étant dans tous ses points M sollicité vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces accélératrices V, V', V'' &c. qui soient des fonctions quelconques des distances MC = v, MC' = v', MC'' = v'' &c. (c. à d. chaque de la distance qui lui répond), la courbe, que le fil formera aura cette propriété, que la valeur de cette formule $\int ds (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ y sera un minimum, où ds marque la masse de l'élément du fil Mm.*

DEMONSTRATION.

Soit le fil partout de la même grosseur, desorte que ds, qui devoit marquer la masse de l'élément du fil Mm, signifie simplement sa longueur $dx \sqrt{1+pp}$, supposant $dy = p dx$. Car on reconnoitra aisément, que la démonstration sera la même, si au lieu de ds on mettoit dans la formule $S ds$, où S marqueroit une fonction quelconque de s. Cela remarqué, si nous y appliquons les formules générales $\int Z dx$ & $dZ = M dx + N dy + P dp$, nous aurons :

$$Z = (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'') \sqrt{1+pp}$$

& puisque :

$$dv = \frac{x/x + y dy}{v}; dv' = \frac{x' dx + y' dy}{v'}; dv'' = \frac{x'' dx + y'' dy}{v''}$$

nous aurons les valeurs suivantes :

$$M = \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} \right) \sqrt{1+pp}$$

$$N = \left(\frac{V y}{v} + \frac{V' y'}{v'} + \frac{V'' y''}{v''} \right) V (1 + p p)$$

$$P = \frac{p}{V(1+pp)} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

Or ces valeurs étant trouvées, nous savons que la courbe, où $\int Z dx$ est un *minimum*, sera exprimée par cette équation : $N dx = dP$: qui sera :

$$\left(\frac{V y}{v} + \frac{V' y'}{v'} + \frac{V'' y''}{v''} \right) dx V (1 + p p) =$$

$$\frac{p}{V(1+pp)} (V dv + V' dv' + V'' dv'') + \frac{dp}{(1+pp)V(1+pp)} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

& multipliant par $V(1+pp)$, nous obtiendrons en faisant $dp = q dx$; & en remettant pour dv, dv', dv'' leurs valeurs; cette équation :

$$\frac{V(y - p x)}{v} + \frac{V'(y' - p x')}{v'} + \frac{V''(y'' - p x'')}{v''} =$$

$$\frac{1 + p p}{q} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

laquelle étant la même, que la solution du problème précédent nous a fournie, la vérité du theoreme est manifeste. Si l'on vouloit entreprendre le calcul, on s'assureroit par une opération semblable; de la vérité du theoreme pour les cas où l'épaisseur du fil seroit supposée variable. Car alors on n'aura qu'à mettre $S ds$ pour ds , & pour S prendre une fonction quelconque de s , tout comme nous avons fait dans la solution du Probl. III.

XXXII. Nous voilà donc tout à fait éclaircis sur la maniere de déterminer la quantité d'action, lorsque les forces agissent, ou en des directions données, ou lorsqu'elles sont dirigées vers des points fixes, pourvu que que la quantité de chaque force soit exprimée par une fonction de la distance à son point fixe. Car le cas où les directions d'une force sont paralleles entr'elles, est compris dans l'autre, où la force est dirigée vers un point fixe, quand ce point s'éloigne

à l'in-

à l'infini. Or quoique dans ce cas, où la distance au point fixe devient infinie, il semble que la force ne puisse pas être exprimée par une fonction de cette distance, la règle donnée y trouve pourtant lieu, & ne demande aucune exception. Car soit z la distance infinie du lieu, où la force agit, au point fixe qu'on suppose éloigné à l'infini; on en pourra retrancher une ligne constante a pareillement infinie, de sorte que $z - a$ devienne une ligne finie; & alors la quantité de la force doit être exprimée par une fonction de cette ligne finie $z - a$, pourqu'on puisse appliquer la règle trouvée: car il est clair, que la force étant une fonction de $z - a$, pourra être regardée comme une fonction de la distance même z , bien qu'elle soit infinie. Or dans ce cas $z - a$ marquera la distance du lieu, où la force agit, à une ligne droite, qui est perpendiculaire aux directions de la force, qui seront parallèles entr'elles. C'est donc la raison, pourquoi notre règle a pu être appliquée avec succès dans les cas, où la force, qui agissoit selon la direction de l'abscisse ou de l'appliquée, a été exprimée par une fonction de l'abscisse, ou de l'appliquée.

XXXIII. Cela remarqué, nous pourrons établir, que la règle, que nous venons de découvrir pour déterminer la *quantité d'action*, aura lieu toutes les fois, que les forces, dont le fil est sollicité, seront dirigées vers des points fixes, & que la quantité de chaque force sera exprimée par une fonction quelconque de la distance à ce point fixe, auquel cette force est dirigée. Or dans les cas où cette condition a lieu, quelque grand que soit le nombre des forces, qui agissent sur le fil parfaitement flexible, on trouvera la figure du fil, en cherchant celle, où la quantité d'action devient *un minimum*. Pour cet effet, il faut considérer chaque force séparément: Soit dS l'élément de la masse du fil, sur lequel les forces agissent, & V une de ces forces accélératrices dirigée vers un point fixe, dont la distance à l'élément du fil soit $= v$, de sorte que V soit une fonction quelconque de cette distance v ; & alors qu'on prenne l'intégral $\int V dv$, auquel on donnera le signe $+$, si l'action de la force tend à diminuer la distance v , mais s'il arrive le contraire, le signe $-$. Ayant tiré selon cette règle pour chaque force la formule $\int V dv$, on recueillira tou-

ses ces formules avec leurs signes dans une somme, que je nommerai ΣW ; & alors la quantité d'action sera exprimée par cette formule $\int W dS$, qui étant supposée un *minimum*, donnera la figure du fil. En examinant cette expression de la quantité d'action, on la trouvera parfaitement d'accord avec celle que Monsieur de *Maupeituis* a publiée dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'An. 1740. & qu'il a tirée de principes, qui tiennent plutôt à la *Metaphysique* qu'à la *Mécanique*.

XXXIV. Quoique je n'aye appliqué cette règle, qu'aux fils parfaitement flexibles, on reconnoitra aisément que cette manière de déterminer la quantité d'action doit être beaucoup plus générale, & qu'elle aura lieu dans tous les autres objets, sur lesquels les mêmes forces peuvent agir: car en effet, le cas, auquel Mr. de *Maupeituis* a appliqué cette règle est bien différent de celui cy, que j'ai considéré dans les problèmes précédens. Il n'y a donc aucun doute qu'on ne doive exprimer de la même manière la quantité d'action des forces semblables, qui agissent sur un fil roide, ou élastique: or dans ce cas, comme la courbure d'un tel fil ne dépend pas uniquement de ces forces, qui agissent sur chacun de ses élémens, mais outre cela aussi de la roideur, ou de son élasticité; il faut ajouter à la quantité d'action qui résulte des forces, encore la quantité d'action qui convient à la roideur, ou élasticité même du fil, pour obtenir l'expression totale, qui sera un *minimum*. Mais il ne paroît pas si facile de déterminer suivant la même règle, que je viens de donner pour les forces, la quantité d'action, qui convient à l'élasticité; puisque l'action de l'élasticité semble tout à fait différente de celle des forces, que j'ai considérées jusqu'ici, tant par rapport à la direction qu'à la quantité de l'élasticité. Je tâcherai donc de découvrir à *posteriori* cette quantité d'action de l'élasticité, en cherchant l'expression, qui étant supposée un *minimum*, fournisse la même courbe, que les principes de la *Mécanique* donnent pour un fil élastique sollicité par des forces quelconques.

Fig. 1.

XXXV. Si le fil élastique AYM n'est sollicité qu'au bout A par deux forces constantes $AB = A$ & $AC = C$, la courbe à laquelle

quelle il sera réduit, sera exprimée par cette équation $\frac{S}{r} = B y - C x$, où r marque le rayon de la courbure au point M, & S signifie l'épaisseur du fil au point M ou l'élasticité absolue. De sorte que si le fil est partout également élastique, cette quantité S deviendra constante; soit donc $S = A$, & l'équation $\frac{A}{r} = B y - C x$ exprimera la nature de la courbe élastique ordinaire. Dans ce cas Mr. Daniel Bernoulli a remarqué que cette courbe se trouve, si l'on rend cette formule $\int \frac{ds}{r^2}$ un *minimum*, où ds marque l'élément de la courbe Mm. De là il faut donc conclurre que la quantité d'action de l'élasticité est proportionnelle à la formule $\int \frac{ds}{r^2}$; mais il n'est pas encore clair, si elle se peut combiner avec les formules, qui représentent les quantités d'action des forces sollicitantes, ou en cas que cela soit permis, par quelle constante on doit multiplier cette formule $\int \frac{ds}{r^2}$ pour qu'elle puisse être mise en parallèle avec les quantités d'action des forces, qui agiront sur le même fil. Pour nous assurer sur cet article, je m'en vais chercher par les principes de Mécanique la courbure d'un fil élastique, qui est en chaque point M sollicité selon la direction M Q parallèle aux abscisses CP = x , par des forces X qui soient des fonctions quelconques des abscisses. Et ensuite je tâcherai de découvrir la formule, dont la valeur soit la plus petite dans la courbe du fil que j'aurai trouvée.

P R O B L E M E VI.

XXXVI. Le fil élastique AYM, dont l'épaisseur aussi bien que l'élasticité soit partout la même, étant dans tous ses points M sollicité suivant la direction M Q parallèle aux abscisses CP, par des forces ac-

celeratrices qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces mêmes abscisses : trouver la courbe AYM, que ce fil prendra.

S O L U T I O N.

Soit l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, l'élément du fil $Mm = ds$, la force acceleratrice $MQ = X$, & partant la force motrice $= Xds$, puisque ds marquera en même tems la masse de l'élément du fil Mm . Soit ensuite le rayon de la courbure en $M = r$, qui supposant $dy = p dx$; $dp = q dx$, sera exprimé en sorte $r = \frac{(1 + pp) \sqrt{(1 + pp)}}{q}$; & $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$. Pour

l'effet de l'élasticité, nous avons vu cy-dessus, que son moment pour tourner le fil autour du point M , est $= \frac{A}{r}$, A marquant une quantité constante proportionnelle à la quantité absolue de l'élasticité. Cela posé, puisque dans l'équation générale donnée §. IX. il y aura $S = A$, $Q = X$, & $P = 0$, par conséquent $\int P ds$ constant $= C$, nous aurons pour la courbe du fil AYM cette équation $\frac{A}{r} = f dy$

$\int X ds - Cx$: & prenant les différentiels: $A d. \frac{1}{r} = dy \int X ds$,

$- C dx$ ou $\frac{A}{p} d. \frac{1}{r} = dx \int X ds - \frac{C dx}{p}$. Prenons en en-

core les différentiels en supposant dx constant, & nous aurons

$A d. \left(\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} \right) = X dx^2 \sqrt{(1 + pp)} + \frac{C dx dp}{pp}$

puisque $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$ d'où nous obtiendrons:

$\frac{A}{\sqrt{(1 + pp)}} d. \left(\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} \right) = X dx^2 + \frac{C dx dp}{pp \sqrt{(1 + pp)}}$

Pour intégrer cette équation supposons $\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} = R dx$ & à

cause

cause de $d\left(\frac{1}{p} d. \frac{1}{r}\right) = dR dx$ nous aurons

$$\frac{A d R}{V(1+pp)} = X dx + \frac{C dp}{pp V(1+pp)}$$

donc l'intégral sera :

$$\frac{AR}{V(1+pp)} + A \int \frac{R p dp}{(1+pp)V(1+pp)} = \int X dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

Or puisque $dp = q dx$ & $R dx = \frac{1}{p} d. \frac{1}{r}$ il sera

$$\int \frac{R p dp}{(1+pp)V(1+pp)} = \int \frac{q}{(1+pp)V(1+pp)} d. \frac{1}{r} = \int \frac{1}{r} d. \frac{1}{r} = \frac{1}{2rr}$$

parce que $\frac{(1+pp)V(1+pp)}{q} = r$. Par conséquent nous aurons :

$$\frac{A d(1:r)}{p dx V(1+pp)} + \frac{A}{2rr} = \int X dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

$$\text{Mais il y aura } \frac{A}{2rr} = \frac{A q q}{2(1+pp)^3} \text{ \& } d. \frac{1}{r} =$$

$$\frac{dp}{(1+pp)V(1+pp)} - \frac{3qp dp}{(1+pp)^2 V(1+pp)} = \frac{dq}{(1+pp)V(1+pp)} - \frac{3pq q dx}{(1+pp)^2 V(1+pp)}$$

de sorte que notre équation intégrée sera :

$$\frac{A dq}{(1+pp)^2 dx} - \frac{3Aqq}{(1+pp)^3} + \frac{Aqq}{2(1+pp)^3} = \int X dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

$$\text{ou bien } \int X dx = \frac{CV(1+pp)}{p} + \frac{A dq}{p dx (1+pp)^2} - \frac{5Aqq}{2(1+pp)^3}$$

Il n'est pas besoin, qu'on cherche à intégrer cette équation encore une fois ; car elle suffit pour rechercher la formule, qui par la méthode des plus grands & plus petits donne la même équation.

XXXVII. Pour

XXXVII. Pour découvrir la formule $\int Z dx$, qui étant supposée un *minimum* produise la même courbe, que nous venons de trouver, je commencerai par considérer séparément, tant les forces, dont le fil est sollicité, que son élasticité. Et d'abord si l'élasticité du fil évanouissoit, la formule qui représente la quantité d'action, seroit, comme nous avons vu, $\int ds \int X dx$: or si la force X évanouissoit, & que la courbe devint l'élastique commune, alors la formule

qui représente la quantité d'action seroit $\int \frac{ds}{r}$. Delà on pourra conclure, que joignant les forces X & l'élasticité ensemble, la formule, qui représentera la quantité d'action, aura une telle forme $\int ds \int X dx + E \int \frac{ds}{r}$ où $\int ds (\int X dx + \frac{E}{r})$, de sorte que la quantité

évanouisse, si l'élasticité $\frac{A}{r}$ ou la valeur absolue A devient ∞ , mais nous ne savons pas encore, si la quantité E est égale à A ou à quelque fonction de A. Je ferai donc la recherche de la courbe, où la valeur de cette expression générale $\int ds (\int X dx + \frac{E}{r})$ devient un *minimum*. Soit pour cet effet $dy = p dx$, $dp = q dx$, & il y aura $ds = dx \sqrt{1 + pp}$, & $r = \frac{(1 + pp) \sqrt{1 + pp}}{q}$: d'où notre formule sera $\int dx (\int X dx + \frac{E q q}{(1 + pp)^3}) \sqrt{1 + pp}$.

XXXVIII. Celle-cy étant comparée à la formule générale $\int Z dx$, donnera $Z = (1 + pp)^{\frac{5}{2}} \int X dx + \frac{E q q}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}}$ d'où l'on voit que Z sera une fonction des quantités x, p & q : & partant posant $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq$, nous aurons:

$$M = X \sqrt{1 + pp}; N = 0; P = \frac{p \int X dx}{\sqrt{1 + pp}} - \frac{5 E p q q}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}} \& Q$$

& $Q = \frac{2 E q}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}}$. Or l'équation pour la courbe, où la valeur

de la formule $\int Z dx$ est un *minimum*, sera $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2}$,

ou puisque $N=0$, celle-cy: $0 = -dP + \frac{dQ}{dx}$, & prenant les in-

tégrales $D = P - \frac{dQ}{dx}$ ou $P dx - dQ = D dx$: ou bien $dQ - P dx$

+ $D dx = 0$, substituons pour P & Q leurs valeurs trouvées, & puis-

$$\text{que } dQ = \frac{2 E dq}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{10 E p q dp}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 E dq}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$\frac{10 E p q q dx}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} \text{ à cause de } dp = q dx, \text{ nous trouverons :}$$

$$\frac{2 E dq}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{10 E p q q dx}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p dx \int X dx}{V(1+pp)} + \frac{5 E p q q dx}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} + D dx = 0$$

d'où nous tirons :

$$\int X dx = \frac{D V(1+pp)}{p} + \frac{2 E dq}{p dx (1+pp)^2} - \frac{5 E q q}{(1+pp)^2}$$

Or l'équation, que nous a fournie la solution du probleme étant

$$\int X dx = \frac{C V(1+pp)}{p} + \frac{A dq}{p dx (1+pp)^2} - \frac{5 A q q}{2(1+pp)^2}$$

nous voyons premièrement que la constante D , que l'intégration a introduite est celle, qui dans la solution du probleme a été nommée $= C$. Ensuite il est evident que $2 E = A$, & partant $E = \frac{1}{2} A$, de sorte que nous connoissons à présent le coefficient de la formule

$\int \frac{d^2 s}{r^2}$ afin qu'elle puisse être ajoutée aux expressions, qui contiennent les quantités d'action résultantes des forces sollicitantes. Par

conséquent pour le cas du probleme précédent la courbe, qui formera le fil elastique, se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les,

courbes possibles celle, où la valeur de cette expression $\int ds \int X dx + \frac{1}{2} A \int \frac{ds}{r}$ sera la plus petite : d'où nous tirons le theoreme suivant.

THEOREME VI.

XXXIX. Le fil elastique AYM, dont l'epaisseur aussi bien que l'elasticité soit partout la même, de sorte que la force de l'elasticité au point M, laquelle contrebalance la somme des momens de toutes les forces, qui agissent sur le fil, soit $= \frac{A}{r}$, où r marque le rayon de la courbure au point M; le fil étant sollicité dans tous ses points M suivant la direction MQ parallele aux abscisses CP $= x$, par des forces acceleratrices X, qui soient des fonctions quelconques de l'abscisse x , la courbe, que ce fil formera, sera trouvée si l'on cherche parmi toutes les courbes possibles celle où cette expression $\int ds (\int X dx + \frac{A}{2rr})$ sera un minimum, où ds marque la masse de l'élément du fil Mm.

Fig. 3

On voit bien, si au lieu des forces X, dont les directions sont paralleles aux abscisses x , nous eussions supposé, que les élémens du fil Mm fussent sollicités vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces acceleratrices V, V', V'' &c. qui soient des fonctions quelconques des distances CM $= v$, C'M $= v'$, C''M $= v''$ &c. pendant que l'elasticité $\frac{A}{r}$ demeurât la même, dans ce cas plus général, dis-je la courbure du fil se trouvera en faisant un minimum cette formule :

$$\int ds (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c. + \frac{A}{2rr})$$

Et même si le fil n'étoit pas de la même grosseur par tout, mais que la masse de l'élément Mm fut $= S ds$ on n'auroit qu'à écrire $S ds$ au lieu de ds , dans cette formule ; pourvu que nonobstant cette variabilité de l'épaisseur du fil, l'elasticité absolue A ne changeât point : car d'ailleurs la quantité A deviendrait variable.

XL. Delà

XL. De là il semble que la quantité d'action de l'élasticité se détermine d'une façon tout à fait différente de celle, qui sert pour les vraies forces sollicitantes, vu qu'il n'y a pas de ressemblance entre les formules $\int V dv$ & $\frac{A}{2 r r}$. Cependant le coefficient $\frac{1}{2}$ me fait conjecturer, que cette quantité $\frac{A}{2 r r}$ pourroit être originairement une formule intégrale, comme $\int \frac{A}{r} d \frac{1}{r}$, forme qui approche déjà fort de celle $\int V dv$. De plus on voit très clairement que $\frac{A}{r}$ répond à V , car comme V signifie la quantité de la force dont l'élément Mm est sollicité dans la direction MC , ainsi $\frac{A}{r}$ marque la quantité de la force de l'élasticité au point M . Mais il n'est pas encore clair, comme le différentiel de $\frac{1}{r}$ puisse répondre à dv : néanmoins l'analogie paroitra, dès qu'on fera ces réflexions. Le différentiel dv pris négativement marque l'espace par lequel le point M seroit transporté, s'il obéissoit tant soit peu à la sollicitation de la force V : voyons donc si le différentiel $d \frac{1}{r}$ pourra signifier le même effet par rapport à l'élasticité.

La force de l'élasticité $\frac{A}{r}$ tend à remettre le fil selon une ligne droite, ou à en diminuer la courbure. Soit donc O le centre de la courbure de l'élément $Mm = ds$, qui de la situation droite $m\mu$ diffère de l'angle $Mm\mu = MOm$; soit cet angle $MOm = d\phi$, & puisque $MO = mO = r$, il sera $d\phi = \frac{ds}{r}$; Or la courbure de l'élément $Mm = ds$ se mesure par l'angle $MO'm = d\phi$, & absolument sans avoir égard à la quantité de l'élément $Mm = ds$ cette mesure sera $\frac{d\phi}{ds}$.

Fig. 4.

$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{r}$. Donc pour peu que l'élasticité produise un effet,

cette quantité $\frac{1}{r}$ en sera diminuée ; & partant il est clair, que le dif-

ferentiel de cette quantité $\frac{1}{r}$ pris négativement, représente le chemin,

que la force de l'élasticité fait decroître à l'élément Mm , dès qu'elle produit quelque effet : d'où l'on voit clairement, que ce que le différentiel dv marque par rapport à la force V , revient au même, que le différentiel

de $\frac{1}{r}$ ou $d \cdot \frac{1}{r}$ signifie par rapport à la force de l'élasticité $\frac{A}{r}$: &

comme V est une fonction de v , de même la force de l'élasticité $\frac{A}{r}$ est une fonction de la quantité $\frac{1}{r}$, dont le différentiel représente

l'action instantanée. De là on pourra tirer cette règle pour trouver la quantité d'action de la force de l'élasticité : Soit T la force de l'éla-

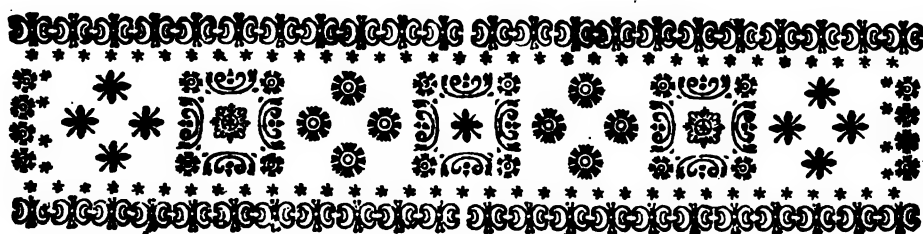
sticité, que nous avons supposée $= \frac{A}{r}$, & que T soit une fonction

quelconque de r ou de $\frac{1}{r}$: qu'on multiplie cette force T par le dif-

ferentiel de $\frac{1}{r}$ ou par ds , supposant $s = \frac{1}{r}$ pour trouver l'intégrale

$\int T ds$, qui étant multipliée par la masse de l'élément Mm , qui soit ds ou $S ds$, l'intégrale du produit $\int ds \int T ds$ donnera la quantité d'action de la force de l'élasticité. Où il est évident, que cette règle est précisément la même, que celle que nous avons trouvée pour les autres forces, dont le fil puisse être sollicité. Par conséquent la règle, que Mons. de Maupertuis a donnée dans les Mem. de l'Acad. de Paris est beaucoup plus générale, qu'on pourroit penser, puisqu'elle s'étend non seulement à toutes sortes de forces, qui sont dirigées vers des centres fixes, mais aussi aux forces d'élasticité ; & il n'y a aucun doute, qu'elle ne soit encore plus générale.

REFLE-



R E F L É X I O N S
SUR QUELQUES LOIX GÉNÉRALES DE LA
NATURE QUI S'OBSERVENT DANS LES EFFETS
DES FORCES QUELCONQUES,
PAR M. EULER.



I.

yant examiné dans le Mémoire précédent la figure que doit prendre un fil, soit parfaitement flexible, ou doüé de quelque roideur, étant sollicité par des forces quelconques dirigées vers autant de points fixes, qu'on voudra ; j'ai recherché les formules, dont la valeur est la plus petite dans cette figure, de sorte que, si l'on connoissoit d'ailleurs ces formules, on pourroit par la methode des plus grands & des plus petits trouver la même figure d'un tel fil, sans avoir égard aux principes directs de la Mécanique, sur lesquels cette recherche est fondée. Comme il y a longtems, que les Philosophes soutiennent avec bien de la raison, que la nature dans toutes ses productions affecte constamment un certain *minimum*, ce que Monsieur de *Maupertuis* a mis tout à fait hors de doute dans quelques Mémoires, qu'il a donnés, tant sur l'état d'équilibre des corps, que sur celui de mouvement ; nous nous trouvons en état d'assigner ce *minimum* pour les figures des fils sollicités par des forces quelconques. Mais puisque j'ai été

conduit à la connoissance de ce *minimum a posteriori*, il s'agit maintenant de découvrir les raisonnemens, qui nous puissent conduire *a priori* à la même connoissance : ou bien il faut rechercher les principes, desquels on pourroit conclure ce *minimum*, quand même on ne connoitroit pas encore la courbe, que le fil prend actuellement. Ces principes une fois découverts ne manqueront pas de répandre beaucoup de lumière sur les loix que la nature observe dans un nombre infini de ses autres productions, pour la détermination desquelles la Mécanique même n'est pas encore portée à un degré suffisant de perfection ; & il n'y a aucun doute, que la Metaphysique ne puisse tirer de cette découverte quantité d'éclaircissemens sur la manière d'agir des forces en général.

II. Pour mieux réussir dans cette recherche, il faut commencer par la même considération, dont Mr. de *Maupertuis* s'est servi pour établir sa loi générale du repos : car cette considération nous conduira à une idée plus précise & plus féconde, de ce qu'on doit entendre par la *quantité d'action des forces*. Nous verrons que la chose nommée par ce terme est de la dernière importance dans toutes les actions des forces, soit que les corps, qui en sont sollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils soient mis en mouvement, ce que je ferai voir par plusieurs preuves très convaincantes. Après cela on verra aisément que cette quantité d'action des forces doit entrer dans toutes les formules, dont la valeur est la plus petite dans les effets, qui sont produits par ces forces. C'est une règle assez généralement reçue, que la nature dans toutes ces productions n'emploie que la plus petite quantité d'action, qu'il soit possible ; mais dans la plupart des cas il a été jusqu'ici extrêmement difficile de bien déterminer cette quantité d'action, pour l'épargne de laquelle la nature est si soigneuse. Mais dès que nous nous serons formé une idée assez distincte de la quantité d'action des forces, que Mr. de *Maupertuis* a découverte si heureusement dans le cas d'équilibre, qu'il a traité, la plupart des autres difficultés, que la diversité des cas semble renfermer, disparaîtront bientôt, & on sera obligé de reconnoître que cette idée est d'un usage universel, tant dans la Mécanique, que dans toute

toute la Physique. Quand même on ne goûteroit pas les raisonnemens, par lesquels je ferai l'application de cette idée à quantité d'effets produits par des forces quelconques, on sera obligé d'en reconnoître la solidité par un grand nombre de cas, qu'on est en état de vérifier par les principes ordinaires de la Mécanique.

III. C'est la figure, que doit prendre une masse fluide, dont toutes les particules sont sollicitées par des forces quelconques, qui a été le principal objet des recherches de Mr. de Maupertuis, pour découvrir la loi générale du repos dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris de l'An. 1740. Je considérerai donc de même une masse fluide dont toutes les particules sont attirées vers autant de centres fixes, qu'on voudra, par des forces, qui sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances à ces centres, & je rechercherai premièrement la figure, que doit prendre cette masse fluide, afin qu'elle soit en repos, ou en équilibre. De là je tâcherai ensuite de découvrir ce qui sera dans cette figure un *maximum*, ou un *minimum*, pour être d'autant mieux en état de déterminer ce qu'il faut entendre sous le nom de la *quantité d'action des forces sollicitantes*, dont je ferai sentir après, par quelques réflexions, la dernière importance dans toutes les recherches où il s'agit des effets produits par des forces quelconques. D'abord il est évident que, pour qu'une telle masse fluide soit en équilibre, il faut que la moyenne direction des forces, dont chaque particule, qui se trouve à la surface, est sollicitée, soit perpendiculaire à la surface : car si la moyenne direction étoit oblique à la surface, la particule qui en étoit sollicitée, suivroit cette direction oblique selon la tangente, & partant la masse ne seroit point en équilibre. Donc, pour entrer dans cette recherche, je commencerai par déterminer en général la position de la ligne perpendiculaire à une surface quelconque.

PROBLEME I.

IV. Une surface quelconque étant proposée sur laquelle se trouve le point Z, trouver la position de la ligne ZP, qui est perpendiculaire à cette surface au point Z.

Fig. 1.

SOLU-

S O L U T I O N.

Pour exprimer la nature de cette surface, je choisis à volonté trois axes AB, AC, AD perpendiculaires entr'eux, dont les deux AB & AC soient pris dans le plan de la planche, & le troisième AD y soit perpendiculaire. Du point quelconque de cette surface Z je tire sur le plan BAC la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe AB la perpendiculaire YX, de sorte que la position du point Z soit déterminée par les trois coordonnées AX, XY & YZ, que je nommerai $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Maintenant la nature de la surface étant exprimée par une équation quelconque entre ces trois coordonnées x, y, z , je n'ai qu'à en considérer la différentielle, qui soit :

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

les lettres X, Y, Z marquant des fonctions quelconques des coordonnées x, y, z , qui peuvent résulter de la différentiation de l'équation en termes finis. A présent je considère premièrement la figure EZ, qui résulte, lorsqu'on coupe la surface proposée par le plan IYZ parallèle au plan BAD. La nature de cette ligne courbe EZ sera donc exprimée par l'équation donnée, si l'on pose XY = y constante & partant son différentiel $dy = 0$, de sorte que pour cette courbe EZ nous aurons cette équation $X dx + Z dz = 0$ entre les deux coordonnées IY = x & YZ = z. Soit la ligne ZM perpendiculaire à cette section EZ, & on sait que la sounormale YM sera ==

$$\frac{z dz}{dx}; \text{ or puisque } \frac{dz}{dx} = - \frac{X}{Z} \text{ nous aurons } YM = -$$

$$\frac{X z}{Z}. \text{ Qu'on tire sur le plan BAC, auquel la section IYZ est per-$$

pendiculaire, par le point M la ligne MP perpendiculaire à YM, & il est clair que toutes les lignes tirées du point Z à cette droite MP seront également perpendiculaires à la section EZ. Par conséquent parmi ces lignes sera comprise celle ZP, qui est perpendiculaire, non seulement à la section EZ, mais aussi à la surface proposée même. Pour trouver cette perpendiculaire cherchée ZP, je coupe pareille-
ment

ment la surface proposée par un plan XZ parallèle au plan CAD, & supposant FZ la section, qui en résulte, sa nature sera exprimée par l'équation générale, en faisant AX = x constante, & partant dx = 0. Donc l'équation pour la section FZ sera Ydy + Zdz = 0. entre ses coordonnées XY = y & YZ = z. Qu'on tire de même à cette section FZ la perpendiculaire ZN, & on voit que la sou-
normale sera $YN = \frac{z}{dy} = - \frac{Yz}{Z}$. Tirant donc par N à YN la perpendiculaire NP dans le plan BAC auquel la section FZ est perpendiculaire, toutes les lignes tirées du point Z à la ligne NP seront également perpendiculaires à la section FZ. Par conséquent si de l'intersection P des lignes MP & NP nous tirons la ligne PZ, elle sera perpendiculaire à l'une & à l'autre des sections EZ & FZ, & partant elle sera perpendiculaire à la surface proposée même EZF. Donc le point P dans le plan BAC, où la perpendiculaire cherchée ZP rencontre ce plan, se trouvera si on prend $YM = - \frac{Xz}{Z}$ & $YN = - \frac{Yz}{Z}$, & qu'on achève le parallélogramme YMPN, dont le quatrième angle P sera au point cherché. Or il est clair, qu'ayant pour la surface l'équation différentielle $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, on en tirera les valeurs des lignes YM & YN en termes finis. Ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME II.

V. Trouver la nature des forces, qui peuvent agir sur le point Z d'une surface proposée, afin que leur moyenne direction soit perpendiculaire à cette surface.

SOLUTION.

Soit comme auparavant $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ l'équation différentielle, qui exprime la nature de la surface proposée entre les trois coordonnées AX = x, XY = y & YZ = z. Cela posé, de quelques forces que soit sollicité le point Z, elles peuvent toujours être



réduites à trois, selon des directions parallèles aux trois axes AB, AC, AD . Soit Q la force, qui agit selon la direction parallèle à AB , R la force qui agit selon AC , & S celle qui agit selon AD , de sorte que ces forces tendent à augmenter les valeurs des variables x, y, z . Parce que la moyenne direction de ces forces doit être perpendiculaire à la surface, elle tombera dans la ligne ZP , dont nous venons de déterminer la position, ayant trou-

vé $YM = -\frac{Xz}{Z}$, & $YN = -\frac{Yz}{Z}$. Soit donc P la force, qui

agissant dans la direction ZP soit équivalente aux trois forces proposées Q, R, S . Or cette force P étant décomposée selon les direc-

tions ZY & YP , donnera pour la direction ZY la force $= \frac{YZ}{ZP} P$, &

pour la direction parallèle à YP la force $= \frac{YP}{ZP} P$; celle-cy se de-

composera encore selon les directions YM & YN , & pour la direc-

tion YM nous aurons la force $\frac{YM}{ZP} P$, & pour l'autre direction

YN la force $= \frac{YN}{ZP} P$. Donc la force P sera résoluë en trois, sui-

vant des directions parallèles aux trois axes AB, AC, AD , dont la

première qui agit parallèlement à AB sera $= \frac{YM}{ZP} P$; la seconde,

qui agit parallèlement à AC sera $= \frac{YN}{ZP} P$; & la troisième, qui agit

parallèlement à AD sera $= -\frac{YZ}{ZP} P$; puisque la direction ZY de

la dernière est contraire à celle de l'axe AD , auquel nous la rapportons. Donc, afin que la force P perpendiculaire à la surface selon ZP soit équivalente aux forces proposées Q, R, S , il faut que celles-cy soient égales respectivement à ces trois, dans lesquelles nous ve-

nons

nous de résoudre la force P. Et partant nous en obtiendrons ces égalités

$$Q = \frac{Y M}{Z P} P; R = \frac{Y N}{Z P} P \text{ \& } S = - \frac{Y Z}{Z P} P.$$

Or ayant trouvé $Y M = -\frac{X z}{Z}$, & $Y N = -\frac{Y z}{Z}$, à cause de

$Y Z = z$ nous aurons $Y P = \frac{z}{Z} \sqrt{(X X + Y Y)}$ & $Z P = \frac{z}{Z} \sqrt{(X X + Y Y + Z Z)}$. Soit pour abréger $\sqrt{(X X + Y Y + Z Z)} =$

W , & ayant $Z P = \frac{W z}{Z}$ les trois égalités trouvées se changeront en telles-cy :

$$Q = - \frac{X}{W} P; R = - \frac{Y}{W} P \text{ \& } S = - \frac{Z}{W} P$$

Par conséquent les trois forces Q, R, S, qui agissent suivant les directions des trois coordonnées x, y, z , seront entr'elles comme les quantités X, Y, Z, qui se trouvent dans l'équation différentielle $X dx + Y dy + Z dz = 0$ qui exprime la nature de la surface, C. Q. F. T.

P R O B L E M E III.

VI. *Trouver la figure, à laquelle sera réduite une masse fluide, dont toutes les particules seront sollicitées par des forces quelconques.*

S O L U T I O N.

Soit Z un point dans la surface de cette masse fluide dont nous cherchons la figure, ou ce qui revient au même, il s'agit de trouver une équation entre les trois coordonnées $A X = x$, $X Y = y$ & $Y Z = z$, laquelle exprime la nature de la surface de la masse fluide proposée. Soit la différentielle de cette équation, que nous cherchons: $X dx + Y dy + Z dz = 0$. Maintenant de quelques forces que soit sollicité le point Z, elles se pourront réduire selon les directions



de nos trois coordonnées. Soit donc Q la force qui agit selon la direction parallèle à $A X$, R la force qui agit selon la direction parallèle à $X Y$, & S celle, qui agit dans la direction $Y Z$. Cela posé pour que la masse fluide soit en équilibre il faut que la moyenne direction de ces trois forces soit perpendiculaire à la surface. Pour cet effet nommant P la force équivalente aux trois forces données Q , R , & S , laquelle doit agir perpendiculairement à la surface, & pour abrégér $W = \sqrt{XX + YY + ZZ}$, la solution du problème précédent nous fournira les équations suivantes,

$$Q = -\frac{X}{W} \cdot P; R = -\frac{Y}{W} \cdot P; S = -\frac{Z}{W} \cdot P$$

Desquelles nous tirerons $X = -\frac{W}{P} \cdot Q; Y = -\frac{W}{P} \cdot R$ & $Z = -$

$\frac{W}{P} \cdot S$: ces valeurs étant substituées dans l'équation $X dx + Y dy + Z dz = 0$, qui doit exprimer la nature de la surface que nous cherchons, nous en obtiendrons cette équation :

$$Q dx + R dy + S dz = 0$$

D'où l'on voit, que connoissant les forces Q , R , S , qui agissent sur chaque point de la masse fluide suivant les directions des trois coordonnées x , y , z , il n'y a rien de plus aisé que d'assigner l'équation différentielle, qui exprimera la nature de la figure de la masse fluide, qu'il falloit chercher. Or la force équivalente aux trois forces Q , R , S , qui agissent ensemble sur le point Z , fera $P = \sqrt{Q Q + R R + S S}$, laquelle aura sa direction perpendiculaire à la surface : & pour trouver la situation de cette direction $Z P$, nous n'avons qu'à prendre

$$Y M = -\frac{Q}{S} z, \text{ \& } Y N = -\frac{R}{S} z, \text{ pour en remplir le paral-}$$

lelogramme rectangle $Y M P N$, dont l'angle P donnera le lieu du point P , où la perpendiculaire $Z P$ à la surface rencontre le plan $B A C$. Du reste il faut remarquer que, pour que la figure soit possible, les forces Q , R , S , doivent être telles fonctions de x , y , z , afin que l'équa-
tion

tion $Q dx + R dy + S dz = 0$ puisse être reduite à des quantités finies.

VII. On fait qu'une équation différentielle, qui ne renferme que deux variables, est toujours possible, ou qu'il y a toujours une équation en termes finis entre les mêmes quantités variables, qui étant différentiée produise l'équation différentielle proposée, quoique même fort souvent on ne soit pas en état de trouver cette équation intégrale. Mais il n'en est pas de même des équations différentielles qui renferment trois quantités variables, comme x, y & z : car il y a quantité de cas où il est absolument impossible, qu'une telle équation puisse résulter par la différentiation d'une équation exprimée en termes finis. Un exemple d'une telle équation impossible est $x dx + y dy + x dz = 0$: car puisque les deux premiers membres $x dx + y dy$ sont intégrables d'eux mêmes, il n'est pas possible de trouver un facteur, par lequel l'équation étant multipliée devienne intégrable. On a même déjà decouvert les conditions, sous lesquelles une telle équation devient possible ou impossible : & Mons. *Clairaut* & *d'Alembert* ont démontré qu'une équation de cette forme $Q dx + R dy + S dz = 0$ n'est possible, que dans les cas où il y aura :

$$Q \left(\frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy} \right) + R \left(\frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz} \right) + S \left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx} \right) = 0.$$

Dans cette équation la formule $\frac{dR}{dz}$ marque le différentiel de la fonction R , en ne supposant que z variable, dont le différentiel dz est détruit par le denuminateur dz . De même la valeur de $\frac{dS}{dy}$ se trouvera en supposant la seule y variable dans la différentiation de S : & pour trouver la valeur de $\frac{dS}{dx}$, dans la différentiation de S il ne faut

supposer que x variable, en sorte que ces expressions $\frac{dR}{dz}, \frac{dS}{dy}, \frac{dS}{dx},$
 $\frac{dQ}{dz}$

$\frac{dQ}{dz}$ &c. ne renfermeront que des quantités finies, puisque les dénominateurs détruisent les différentiels des numérateurs. Donc toutes les fois que la propriété contenue dans cette équation n'aura pas lieu entre les fonctions Q, R, S , l'équation $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ sera impossible ; & dans ces cas la masse fluide ne sauroit jamais parvenir à l'état de l'équilibre, comme a fort bien remarqué Mons. Clairaut, dans son Traité sur la figure de la terre.

VIII. Le cas le plus évident, auquel l'équation $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ devient possible, est si Q est une fonction de x , R une fonction de y , & S une fonction de z : car alors chaque membre de l'équation sera intégrable à part. Donc si chaque particule de la masse fluide est sollicitée de trois forces Q, R , & S , suivant les directions des trois axes AB, AC & AD , ou des trois coordonnées x, y & z ; & que la force Q , qui agit dans la direction de x , soit exprimée par une fonction quelconque de x , la force R qui agit dans la direction de y par une fonction de y , & la force S par une fonction de z , alors l'équation différentielle $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ étant intégrable, la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation intégrale,

$$\int Q dx + \int R dy + \int S dz = A$$

où A marque une quantité constante, que la quantité du fluide déterminera. Dans ce cas donc la masse fluide sera réduite à l'état de l'équilibre, & à chaque point de sa surface la valeur de cette formule $\int Q dx + \int R dy + \int S dz$ sera la même. Or si nous envisageons en général la nature de l'équilibre, nous appercevrons aisément, qu'elle exige de toutes parts une égalité dans l'action des forces, quoique nous ne sachions d'abord comme il faut estimer cette action des forces. Mais voyant dans le cas proposé, que c'est cette quantité $\int Q dx + \int R dy + \int S dz$ qui est par tout la même, nous en conclurons sûrement, que cette même formule représente la quantité d'action des forces, qui dans l'équilibre doit partout être la même. Donc la quantité d'action des forces Q, R, S , qui agissent sur le point Z de la manière que je viens de supposer, sera $= \int Q dx + \int R dy + \int S dz$:

dz : formule qui est parfaitement conforme aux principes de Mons. de Maupertuis, & dont je ferai voir plus clairement la force & l'importance dans les réflexions suivantes.

P R O B L E M E IV.

IX. *Une masse fluide étant attirée vers plusieurs centres fixes C, C', C'' par des forces proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, trouver la figure, à laquelle cette masse fluide sera réduite.*

Fig. 2.

S O L U T I O N.

Soit Z un point quelconque dans la surface de la masse fluide proposée, dont les distances aux centres fixes C, C', C'' soient nommées $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$, & les forces dont ce point Z est attiré vers ces centres soient des fonctions quelconques de ces distances V, V', V'', la force V qui tire dans la direction ZC, étant une fonction quelconque de v , la force V' dans la direction ZC' une fonction de v' , & la force V'' dans la direction ZC'' une fonction de v'' . Celapose, qu'on choisisse comme auparavant trois axes perpendiculaires entr'eux, auxquels on tire du point Z les droites parallèles ZQ, ZR, ZY, suivant lesquelles on décompose les forces V, V', V'' qui agissent sur le point Z. Pour cet effet on n'a qu'à concevoir des plans parallèles au plan QZR, qui passent par les points C, C', C'', lesquels seront traversés perpendiculairement par la droite ZY aux points Y, Y', Y'', & dans ces plans on tire les droites CX, C'X', C''X'' parallèles à ZQ, & à celles-cy les perpendiculaires YX, Y'X', Y''X'', qui seront parallèles à ZR. Maintenant on aura pour chaque centre C, C', C'' trois coordonnées qu'on nommera : pour le centre C; $CX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$: pour le centre C'; $C'X' = x'$, $X'Y' = y'$ & $Y'Z = z'$ & pour le centre C''; $C''X'' = x''$, $X''Y'' = y''$ & $Y''Z = z''$. De ces coordonnées nous obtiendrons d'abord ces équations $vv = xx + yy + zz$; $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$ & $v''v'' = x''x'' + y''y'' + z''z''$. Et puisque les variables x, x', x'' ne different entr'elles que des quantités constantes, leurs différentiels seront égaux entr'eux d'où nous aurons $dx = dx' = dx''$, & par la même raison :

dy

$dy = dy' = dy''$; & $dz = dz' = dz''$. Maintenant la force $ZC = V$ étant décomposée suivant les directions ZQ, ZR & ZY , donnera ces trois forces

$$ZQ = \frac{Vx}{v}, \quad ZR = \frac{Vy}{v} \quad \& \quad ZY = \frac{Vz}{v}$$

De la force ZC' résulteront ces trois forces

$$ZQ = \frac{V'x'}{v'}, \quad ZR = \frac{V'y'}{v'}, \quad \& \quad ZY = \frac{V'z'}{v'}$$

& de la force ZC'' ces trois

$$ZQ = \frac{V''x''}{v''}, \quad ZR = \frac{V''y''}{v''} \quad \& \quad ZY = \frac{V''z''}{v''}$$

Dont de l'action commune de ces trois forces le point Z fera sollicité

suivant la direction

par la force

ZQ	$\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}$
ZR	$\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}$
ZY	$\frac{Vz}{v} + \frac{V'z'}{v'} + \frac{V''z''}{v''}$

Ces forces agissant selon des directions contraires à celles que nous avons données aux forces Q, R, S dans le problème précédent, si nous ferons l'application, nous aurons :

$$Q = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'} - \frac{V''x''}{v''}$$

$$R = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'} - \frac{V''y''}{v''}$$

$$S = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'} - \frac{V''z''}{v''}$$

Or

Or la nature de la surface de cette masse fluide sera exprimée par cette équation $Q dx + R dy + S dz = 0$. Mais substituant les valeurs trouvées pour Q, R, S , nous obtiendrons en changeant les signes cette équation.

$$\left. \begin{aligned} + \frac{V x dx}{v} + \frac{V' x' dx'}{v'} + \frac{V'' x'' dx''}{v''} \\ + \frac{V y dy}{v} + \frac{V' y' dy'}{v'} + \frac{V'' y'' dy''}{v''} \\ + \frac{V z dz}{v} + \frac{V' z' dz'}{v'} + \frac{V'' z'' dz''}{v''} \end{aligned} \right\} = 0$$

Or les premières formules, qui expriment les valeurs des distances v, v', v'' fournissent

$$x dx + y dy + z dz = v dv$$

$$x' dx' + y' dy' + z' dz' = v' dv'$$

$$x'' dx'' + y'' dy'' + z'' dz'' = v'' dv''$$

Par conséquent la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation $V dv + V' dv' + V'' dv'' = 0$ dont chaque terme est intégrable de lui même, & partant nous aurons pour la figure cherchée cette équation intégrale : $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' = \text{Const.}$
P. Q. E. T.

X. La même équation se peut aussi trouver, sans qu'on ait égard à la position des trois axes, laquelle est arbitraire, & ne se trouve plus dans l'équation finale. Nous n'avons qu'à considérer un élément infiniment petit Zz , conçu d'une manière quelconque depuis le point Z sur la surface de la masse fluide, & il est d'abord clair, que pour que le point Z puisse être en équilibre ou demeurer en repos, il faut que les forces, qui sollicitent le point Z selon la direction Zz évanouissent, après avoir décomposé les forces V, V', V'' , qui y agissent, selon cette direction Zz , & d'autres qui y sont perpendiculaires. Car si les forces suivant Zz ne se détruisoient pas mutuelle-

ment, rien n'empêcheroit, que le point Z ne se mût actuellement suivant cette direction & partant la masse fluide ne seroit pas en équilibre. On nomme ces forces *tangentiell*es, qui résultent de cette décomposition selon la direction de l'élément Zz ; ce seront donc ces forces tangentiell

es, qui doivent se détruire mutuellement, ou dont la somme doit être $= 0$. Pour trouver ces forces tangentiell

es, je mène du point z sur les distances $CZ, C'Z, C''Z$ les perpendiculaires zt, zt', zt'' , & nommant l'élément $Zz = ds$, nous aurons $Zt = -dv$; $Zt' = -dv'$ & $Zt'' = -dv''$. La ressemblance des triangles élémentaires Zzt, Zzt', Zzt'' aux triangles, qui se forment en baissant des perpendiculaires des points C, C', C'' sur la tangente ou l'élément Zz prolongé, donnera les forces tangentiell

es, qui résultent de chacune des forces V, V', V'' & de la force V on obtiendra la force tangentielle $= -\frac{V dv}{ds}$, de la force V' provien-

dra la force tangentielle $= -\frac{V' dv'}{ds}$ & de la force V'' celle - cy $= -\frac{V'' dv''}{ds}$. Donc puis que la somme de ces forces tangentiell

es doit être égale à 0, nous aurons pour la figure de la masse fluide cette équation $= -\frac{V dv}{ds} - \frac{V' dv'}{ds} - \frac{V'' dv''}{ds} = 0$, ou bien celle - cy

$V dv + V' dv' + V'' dv'' = 0$, dont l'intégrale sera :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' = C.$$

qui est la même équation, à laquelle nous a conduit la solution précédente.

XI. La masse fluide donc étant sollicitée par ces forces V, V', V'' , que nous venons de considérer, parviendra dans un état d'équilibre, & la figure qu'elle prendra alors, aura cette propriété que pour chaque point Z de sa surface la valeur de cette expression $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$, sera partout la même. Donc puisque l'état d'équilibre exige de toutes parts une égalité d'action, il est d'abord clair que

que cette même formule nous exprimera la quantité d'action, qui par son égalité se contrebalance de tous cotés ; & on ne sauroit douter, que cette formule , $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ ne fût la vraie mesure de la quantité d'action des forces, qui agissent sur la masse fluide, quand même on n'auroit point d'autres raisons, par lesquelles on seroit en état de déterminer cette mesure. Or Mr. de Maupertuis, dans son excellente piece sur les loix du repos, a expliqué les principes, desquels il a tiré précisément la même mesure de la quantité d'action des forces : & ces principes lui ont fourni pour ce cas d'équilibre d'une masse fluide la même formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$, sans qu'il ait été obligé d'avoir recours aux principes ordinaires de la Mécanique. De là on tirera la règle suivante pour trouver la quantité d'action des forces, qui agissent sur un point quelconque Z : *Qu'on multiplie chaque force V par le différentiel de la ligne ZC = v, suivant la direction de laquelle cette force agit, du produit V dv qu'on prenne l'intégrale, & la somme de toutes ces intégrales $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ donnera la quantité d'action de toutes ces forces sur le point Z.* Cette règle, qui coule immédiatement des principes de Mr. de Maupertuis, est donc parfaitement d'accord avec la solution, que je viens de déduire des principes ordinaires de la Mécanique.

XII. Mr. de Maupertuis dans ses réflexions sur cette matière est encore allé plus loin, & a soutenu que non seulement la quantité d'action des forces, qui agissent sur toutes les particules de la surface d'une masse fluide, étoit partout la même ; mais que sa valeur étoit encore la plus petite, qu'il soit possible. Cette propriété si convenable aux loix générales de la nature, qui affecte constamment de produire ses effets à moindres frais, est aussi une suite fort naturelle de la solution, que je viens de trouver. Car puisque la valeur de cette expression $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ est partout la même, son différentiel sera égal à zero, ou $V dv + V' dv' + V'' dv'' = 0$. Or on sait que, pour que la valeur d'une quantité variable soit la plus grande, ou plus petite, il faut, que son différentiel soit $= 0$. Donc réciproquement, puisque dans la figure de la masse fluide le différentiel $V dv + V' dv' + V'' dv''$ est $= 0$, on pourra dire, que son intégral

gral $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ y est un *minimum*. Il est bien vrai que cette conversion n'est pas toujours juste; car, par exemple, dans un cercle dont la nature est exprimée par cette équation $x x + y y = a a$, quoique le différentiel de la quantité $x x + y y$ soit égal à zero, on ne sauroit dire que la quantité $x x + y y$ même y étoit un *maximum*, ou *minimum*. Mais outre que le principe général de la nature exige que la quantité d'action, que cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ exprime, soit un *minimum*, de sorte que l'exception tirée de l'exemple du cercle, n'y puisse pas avoir lieu, j'en vai prouver cette conclusion par un cas tout particulier, dont l'evidence sautera d'abord aux yeux.

XIII. Supposons que la masse fluide vienne à être diminuée à l'infini, desorte qu'elle soit réduite à un seul point Z: on demandera donc où ce point Z doit être placé, afin qu'étant attiré vers les centres de forces C, C', C'', il soit en équilibre: & on s'apercevra d'abord que ce lieu d'équilibre du point Z sera là, où la quantité d'action de forces, ou la valeur de l'expression $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ fera la plus petite. Quand j'aurai prouvé cela, on ne fera aucune difficulté de reconnoître, que pour le cas d'une masse fluide d'une étendue finie, le même raisonnement n'ait lieu: & que puisque le différentiel de cette même formule est également zero, la valeur de cette formule n'y soit un *minimum*. Car si cette conclusion n'étoit pas juste dans le cas d'une masse fluide, elle ne le seroit pas non plus dans le cas, où la masse fluide est réduite à un seul point. Or le cas de l'état d'équilibre d'un point, qui est sollicité par des forces quelconques, que je m'en vai considérer, est celui d'où dépendent les premiers principes de la Statique, savoir la composition & la décomposition des forces, dont la vérité est par conséquent d'autant moins assujettie à des doutes: quoique les démonstrations qu'on en donne ordinairement ne soient pas assez rigoureuses; puisqu'on y fait entrer la considération du mouvement, qui paroît tout à fait étrangère dans ce cas, où il ne s'agit que de l'état du repos. Pour Monsieur Nicolas Bernoulli a bien fait sentir ce défaut général dans le I. Tome des Comment. de l'Acad. de Petersbourg, où il a donné une fort belle

Belle démonstration de ce principe de la Statique, qui est aussi ingénieuse, que purement geometrique, & fondée sur des axiomes incontestables.

XIV. Cependant je me flatte, qu'on trouvera la démonstration suivante, que je donnerai de ce même principe, également convaincante, quoiqu'elle soit fondée sur quelque principe tiré de la Méta-physique. Soit un point quelconque Z, qui étant sollicité par trois forces V, V' V'' selon les directions ZC, ZC' ZC'', se trouve actuellement en équilibre : & on soutient qu' alors ces trois forces seront entr'elles comme les sinus des angles opposés C'ZC'' ; CZC'', CZC'. Pour démontrer cette vérité, de laquelle dépend toute la Statique, au lieu des forces, je concevrai des fils élastiques égaux entr'eux, qui étant attachés aux lignes AB, A'B', A''B'', & les tirant vers les parois immobiles EF, E'F', E''F'' agissent sur le point Z par le moyen des verges ZC, ZC', ZC'' de la même manière, que les forces proposées V, V', V''. Soit la force de chaque fil élastique, dont il s'agit de se contracter, = 1, & le nombre des fils, qui sont attachés à la ligne AB pour l'approcher au parois EF, soit = V, afin que toute la force unie de ces fils élastiques devienne = V. & que le point Z par ce moyen soit sollicité par la même force V dans la direction ZC. De même, soit le nombre des fils semblables attachés à la ligne A'B' = V', & le nombre des fils attachés à la ligne A''B'' = V'' afin que le point Z soit sollicité suivant les directions ZC' & ZC'' par les forces V' & V''.

Fig. 2

XV. Cela posé il est clair que ces forces n'agissent qu' entant que les fils élastiques tachent de se raccourcir, & le point Z ne sauroit être en repos, que lorsqu'il sera impossible, que la contraction de tous ces fils ensemble se puisse augmenter davantage. On m'accordera donc sans aucune difficulté, que le point Z sera alors en équilibre, lorsque les fils se seront raccourcis autant qu'il sera possible, ou lorsque la somme de tous les fils pris ensemble sera la plus petite : car si le point Z pouvoit être traîné dans un autre endroit z, où le raccourcissement des fils, considérés tous ensemble, seroit encore plus grand, il n'y a aucun doute, que les forces ne le transportassent dans

cet endroit là, avant que l'état d'équilibre arrive. Ce principe est si évident, que pour peu qu'on y réfléchisse on sera convaincu de sa vérité : puisque ces fils se contracteront effectivement, tandis qu'une plus grande contraction sera possible, & ils ne cesseront d'agir, qu'il ne s'oppose des obstacles insurmontables, qui rendront impossible une plus grande contraction. Donc, si nous nommons la longueur des fils élastiques $AG = x$, celle des fils $A'G' = x'$ & $A''G'' = x''$, la longueur de tous les fils pris ensemble sera $= Vx + V'x' + V''x''$, & celle-cy sera par conséquent la plus petite, lorsque le point Z est réduit dans l'état d'équilibre.

XVI. Donc, si le point Z sera transporté infiniment peu de l'endroit où il est en équilibre, la valeur de la formule $Vx + V'x' + V''x''$ demeurera encore la même, ou son différentiel $Vdx + V'dx' + V''dx''$ sera égal à zero ; car je regarderai ici les forces V, V', V'' , comme constantes, de sorte qu'elles n'augmentent ni ne diminuent, pendant que les fils élastiques s'allongent, ou se raccourcissent : je fais cette hypothèse, afin que le cas soit plus évident & moins embarrassé, puisqu'il ne sera pas difficile ensuite de juger des cas, où les forces V, V', V'' sont elles-mêmes variables. Qu'on conçoive donc le point Z transporté en z par l'espace infiniment petit Zz , & comme un tel changement se peut faire d'une infinité de manières, j'en choisirai celui où le point z est également éloigné de AB , que le point Z , de sorte que par ce changement les fils AG, BH ne souffrent aucune alteration. Mais comme le point Z par ce mouvement Zz s'est approché plus de $E'F'$, & qu'il s'est éloigné plus de $E''F''$, les fils $A'G', B'H'$, se seront raccourcis, & les fils $A''G'', B''H''$ allongés : & partant la ligne $A'B'$, à laquelle sont attachés les fils, sera parvenue en $a'b'$, & la ligne $A''B''$ en $a''b''$: donc le raccourcissement de ceux-là sera $= A'a'$, & l'allongement de ceux-cy $= A''a''$. Or en vertu de la propriété des plus petits, l'allongement total d'un côté $V''A''a''$ doit être égal au raccourcissement de l'autre côté $V'A'a'$. Tirons les lignes zc'', zc'' égales & parallèles aux lignes $ZC' & ZC''$, & y ayant mené les perpendiculaires Zq, zp , le raccourcissement $A'a'$ sera $= Zp$, & l'allongement $A''a'' = zq$, donc il y aura $V'Zp = V''zq$.

$\equiv V'' : z q$, ce qui donnera cette proportion $V' : V'' \equiv z q : Z p$. Or prenant $Z z$ pour le sinus total, $z q$ sera le sinus de l'angle $z Z q$, ou bien de $C Z C''$ à cause des angles droits $C Z z$ & $C'' Z q$; de même $Z p$ sera le cosinus de $z Z p$ & partant le sinus de $C Z C'$, d'où il s'ensuit que les forces V' & V'' seront entr'elles comme les sinus des angles $C Z C''$ & $C Z C'$, & de là on tirera cette proportion connue :

force $Z C$: force $Z C'$: force $Z C'' \equiv \sin C' Z C'' : \sin C Z C'' : \sin C Z C'$.

XVII. De cette nouvelle démonstration du principe général de la Statique, en vertu duquel trois forces appliquées à un point sont en équilibre, lorsque ces forces sont entr'elles, comme les sinus des angles opposés, on sera convaincu, que non seulement la formule différentielle $V dx + V' dx' + V'' dx''$ doit être $\equiv 0$, mais aussi que la valeur de la formule finie $V x + V' x' + V'' x''$ y est la plus petite. J'ai supposé ici les forces V, V', V'' constantes, ou qu'elles demeurent les mêmes, quelque changement que subissent les fils élastiques que j'ai substitués à leurs places: mais la formule différentielle demeurera la même, quoique les forces soient variables: on n'a pour cet effet qu'à nommer les distances $Z C \equiv v, Z C' \equiv v', Z C'' \equiv v''$, & on aura $dx \equiv -dv, dx' \equiv -dv', dx'' \equiv -dv''$. De plus, si les forces V, V', V'' sont des fonctions quelconques de ces distances v, v', v'' , l'état d'équilibre du point Z donnera la même équation différentielle $V dv + V' dv' + V'' dv'' \equiv 0$, qui a été trouvée dans la solution du problème, & à présent il n'y a aucun doute que son integral $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ ne soit aussi un *minimum*. Or si cette formule est un *minimum* dans le cas, où les forces n'agissent que sur le seul point Z , elle sera pareillement un *minimum* dans le cas d'une masse fluide quelconque, qui est sollicitée par les mêmes forces. Par conséquent, nous avons les plus fortes raisons de soutenir, que la quantité d'action des forces V, V', V'' sur un point quelconque Z , doit être exprimée par cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ puis que cette formule se trouve, soit qu'on considère le point Z tout seul, ou qu'il appartienne à une masse fluide quelconque. Voilà donc un appuy inébranlable, sur lequel est fondée la règle

regle donnée cy - dessus pour déterminer la quantité d'action des forces quelconques sur un point donné.

XVIII. Les réflexions suivantes mettront encore davantage dans tout son jour cette idée de la quantité d'action des forces, & on en entendra plus clairement la raison, pourquoi la quantité d'action des forces V, V', V'' sur le point Z doit être exprimée précisément par la formule $\int V du + \int V' dv' + \int V'' dv''$. Dans la recherche précédente, où j'ai substitué des fils élastiques égaux entr'eux au lieu des forces V, V', V'' , l'état ou l'action de chaque force appliquée au point Z a été représentée par la somme des longueurs de tous les fils élastiques, qui tiennent lieu des forces: car nous avons vu, si la longueur des fils élastiques AG substitués à la place de la force V est nommée x , & que V marque le nombre de ces fils, puisque la force de chacun a été posée $= 1$; alors la somme totale de tous ces fils étoit $= Vx$: ce sera donc cette quantité Vx , qui représente l'action de cette force V sur le point Z , puisque Vx exprime l'état actuel de contraction des fils élastiques, de laquelle dépend l'action de la force V . Or posant toute la distance du point Z aux parois immobiles $EF = v$, & la distance constante $ZC = a$, nous aurons $x = v - a$, & l'action de la force V sera $= V(v - a)$ pourvu que la force V soit constante, ou que sa quantité ne dépende point de la distance v . Or en cas que la force V dépende de la distance v , ou ce qui revient au même de la longueur des fils élastiques x , alors le nombre des fils V seroit variable, & leur longueur totale ne seroit plus Vx ou $V(v - a)$, mais on s'appercvra aisément que pour avoir cette longueur totale, il faudra prendre l'intégrale de $V dx$ ou de $V dv$, y ayant égard à la variabilité de V . Ce sera donc alors $\int V dv$, qui exprime la longueur totale des fils élastiques substitués au lieu de la force V , & partant il est évident que cette même formule $\int V dv$, exprimera aussi la quantité d'action de la force V sur le point Z ; & on comprendra de même que la quantité d'action de plusieurs forces V, V', V'' sera $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$.

XIX. Mais il y a plus : la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ est non seulement d'un si grand usage dans l'état de repos, c'est aussi d'elle que dépend principalement la détermination du mouvement. Car supposons qu'un corps sollicité vers les centres C, C', C'' par des forces V, V', V'' ait parcouru déjà l'arc A Z d'une courbe quelconque, ayant commencé son mouvement du repos en A : & soit u la vitesse, que ce corps aura acquise au point Z : & $u + du$ celle qu'il aura au point z , après avoir parcouru l'élément d'espace, $Zz = ds$. Soient les distances du corps en Z aux centres C, C', C'' nommées $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$, & V, V', V'' les forces dont le corps est attiré à ces centres. Qu'on tire de z sur les distances CZ, C'Z, C''Z les perpendiculaires $z\tau$, $z\tau'$, $z\tau''$ & on aura $Z\tau = dv$, $Z\tau' = -dv'$, $Z\tau'' = -dv''$, d'où nous tirerons les forces tangentielles

— $\frac{V dv}{ds}$, — $\frac{V' dv'}{ds}$, — $\frac{V'' dv''}{ds}$, & partant le mouvement du corps, pendant qu'il parcourt l'élément $Zz = ds$ sera accéléré par la force — $\frac{V dv - V' dv' - V'' dv''}{ds}$, qui étant

multipliée par l'espace ds sera égale au produit de la vitesse u par son différentiel du : de sorte que nous aurons cette équation $u du = -V dv - V' dv' - V'' dv''$, dont l'intégrale sera $\frac{1}{2}uu = C - \int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv''$, où la constante C doit être prise, en sorte qu'au point A la vitesse devienne = 0. Donc le demi-quarré de la vitesse au point Z, ou ce qui revient au même, la hauteur due à la vitesse sera exprimée par la formule $C - \int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv''$, qui consiste de deux membres, dont le premier C dépend uniquement du point A où le mouvement a commencé ; mais l'autre membre $-\int V dv - \int V' dv' - \int V'' dv''$ dépend uniquement du point Z où le corps est parvenu. Par conséquent la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$, qui dans l'état de repos marque la quantité d'action des forces sur le point Z, exprime aussi dans l'état de mouvement la partie du quarré de la vitesse, laquelle dépend du point Z, de sorte que cette for-

Fig. 4.

mulé est de la dernière importance, aussi bien dans l'état de repos, que dans celui de mouvement.

XX. Ayant donc établi la véritable idée de la quantité d'action des forces quelconques sur un point donné, soit qu'il se trouve en repos, ou en mouvement, je ferai voir plus clairement le grand usage de cette idée, en considérant plusieurs centres fixes C, C', C'' &c. qui attirent à soi avec des forces V, V', V'' &c. proportionnelles à des fonctions quelconques des distances v, v', v'', &c. de sorte que la quantité d'action de ces forces sur un point Z, dont les distances à ces centres sont v, v', v'' &c. est $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \dots$. Et d'abord pour trouver le lieu, où il faut placer un corps considéré comme un point, afin qu'il demeure en repos, ou en équilibre, entre ces centres de forces, je viens de montrer que ce point cherché Z sera là, où la valeur de cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \dots$, ou la quantité d'action, est la plus petite. Par le moyen de cette propriété on trouvera aisément le lieu de ce point Z, en transportant ce point Z par un espace infiniment petit Zz, & supposant le différentiel $V dv + V' dv' + V'' dv'' + \dots$ égal à zéro : comme j'ai fait voir dans le cas, où le point Z étoit sollicité de trois forces. C'est de ce cas, que dépend la composition & la résolution des forces, laquelle étant la base de toute la Statique, on voit que ce seul principe de la quantité d'action fournit le fondement de cette science.

XXI. En second lieu, si on considère une masse fluide dont toutes les particules sont attirées à ces centres de forces, C, C', C'' &c. on trouvera encore la figure, que cette masse fluide prendra, par le seul moyen de la quantité d'action : car il faut, comme j'ai fait voir que la quantité d'action des forces soit la même partout, sur chaque point de la surface de la masse fluide : ou la nature de cette surface sera exprimée par cette équation :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \dots = \text{Const.}$$

Ou bien cette masse fluide ne sauroit être en repos, que dans un tel endroit & avec une telle figure, afin que la quantité d'action totale soit la plus petite qu'il est possible : c. d. d. pour que la masse fluide soit

soit en équilibre, il faut que la valeur de cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$ soit un *minimum*. C'est de ce principe que dépend toute l'hydrostatique, ou la théorie de l'équilibre des liqueurs. Car si nous ne considérons qu'une seule force centrale, pour avoir le cas de la pesanteur naturelle, nous aurons pour l'état d'équilibre d'une masse fluide l'équation $\int V dv = C$, & puisque V est une fonction de v , la distance v sera constante; donc tous les points de la surface fluide doivent être également éloignés du centre de la terre, ou la surface d'un fluide sera horizontale.

XXII. Ce ne sera pas donc seulement la quantité d'action des forces sur un seul point Z , qui est la plus petite, mais on reconnoitra aisément que dans une masse fluide, qui est en équilibre, la somme totale de toutes les quantités d'action des forces sur tous les élémens de la masse fluide doit être un *minimum*. Ainsi si l'on nomme dS une particule quelconque de la masse fluide, & que la quantité d'action des forces $V, V', V'' \&c.$ sur cette particule, soit $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$, entant qu'elle n'est considérée que comme un point, il est clair que la quantité d'action sur l'élément dS sera $= dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$, puisque dS est déjà regardé comme un assemblage de plusieurs points, sur chacun desquels la quantité d'action des forces est $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$ de sorte que cette quantité doit être multipliée par le nombre des points de l'élément dS , c. d. d. par l'élément dS même, pour avoir la quantité d'action des forces sur cet élément dS . Par conséquent la quantité d'action des forces sur toute la masse fluide sera $= \int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$. Ce sera donc cette expression intégrale, dont la valeur doit être la plus petite; puisqu'elle comprend la somme totale de toutes les quantités d'action des forces sur toutes les particules de la masse fluide. De là il est aisé de tirer cette règle générale pour trouver l'état d'équilibre d'un corps quelconque sollicité par des forces quelconques; *Qu'on multiplie chaque élément du corps par la quantité d'action des forces, qui y agissent, & l'intégrale de ce produit, qui sera la quantité d'action totale sur le corps entier, doit être*

être un minimum. Quiconque aura compris la réalité de l'idée de la quantité d'action des forces sur un point, que je viens d'établir par les plus fortes raisons, accordera sans difficulté, que dans tous les cas d'équilibre la somme de toutes ces quantités d'action doit être la plus petite.

XXIII. Si le corps entier, dont nous cherchons l'état d'équilibre, est infiniment petit, de sorte que dS exprime tout ce corps, alors la quantité d'action totale sera $= dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ laquelle sera un *minimum*, si $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$ aura la plus petite valeur, puisque dS est constant : & c'est le cas que j'ai déjà développé cy-dessus. Mais si le corps proposé est une masse fluide, dont dS est un élément, il n'est plus si aisé, que la figure où $\int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ est un *minimum*, sera la même, que j'ai trouvée auparavant, & qui avoit cette propriété, qu'à chaque point de sa surface la quantité d'action $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$ étoit d'une valeur constante; Car en général il est extrêmement difficile de déterminer la figure d'un solide, où une telle formule $\int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$ est un *maximum*, ou un *minimum*, puisque cette méthode n'est encore assez cultivée, que pour les figures décrites sur un plan. Donc, pour affermir la vérité de cette règle générale, & pour faire voir qu'elle conduit à la même solution, que j'ai déjà trouvée, je considérerai une masse fluide infiniment mince, couchée sur un plan, & dont toutes les particules sont poussées vers plusieurs centres fixes C, C', C'' &c. situés dans le même plan.

Fig. 5.

XXIV. Soit donc AM la surface de cette masse fluide, quand elle sera en équilibre; & pour trouver cette figure qu'on prenne les coordonnées $CX = x, XM = y$, & pour les autres centres soient des coordonnées semblables $C'X' = x', X'M = y'$; $C''X'' = x'', X''M = y''$: & il y aura $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$. Mais avant que de considérer le dernier point M , il faut chercher la quantité d'action des forces sur l'élément XxM de l'aire $CXMA$, qui nous représente la masse fluide. Pour cet effet qu'on prenne de cet élément XxM une particule quelconque Yy , & qu'on nomme en

atten-

attendu que $XY = y$, $X'Y = y'$, $X''Y = y''$: & la particule Yy fera $= dx dy$. Maintenant soient les distances de cette particule aux centres des forces : $CY = v$, $C'Y = v'$, $C''Y = v''$, & les forces mêmes, comme jusqu'ici, V, V', V'' : de sorte que nous ayons $vv = xx + yy$; $v'v' = x'x' + y'y'$; $v''v'' = x''x'' + y''y''$. Or la quantité d'action de ces forces sur le point Y étant $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$, la quantité d'action sur la particule Yy fera $= dx dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ dont l'integrale, en supposant x constant, donnera la quantité d'action des forces sur tout l'élément XxM , pourvu qu'on avance le point Y jusqu'en M , & que les significations des y, y', y'' soient les mêmes, que je leur ai données au commencement. Par conséquent la quantité d'action des forces sur tout l'élément de l'aire XxM sera $= dx \int dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$, supposant dans cette integrale l'abscisse x constante, & la seule appliquée y variable. Je nommerai pour abrégé cette integrale, qui résulte en supposant x constante, $\int dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.) = U$, de sorte que le différentiel de U en supposant encore x constante soit $dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$, ou si nous posons en général $dU = M dx + N dy$, il y aura $N = \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$.

XXV. Ayant ainsi trouvé la quantité d'action sur l'élément XxM , laquelle est $= U dx$, il est clair que la quantité d'action sur toute l'aire $CXMA$ sera $= \int U dx$. Par conséquent cette quantité $\int U dx$ doit être la plus petite entre toutes les figures, que cette aire pourroit prendre ; il s'agit donc de trouver parmi toutes les figures de la même aire, $\int y dx$, celle où la valeur de cette formule $\int U dx$ est la plus petite. Cette question revient au même que si l'on cherchoit parmi toutes les courbes possibles celle, où cette formule $\alpha \int y dx + \int U dx$ ou $\int dx (U + \alpha y)$ est un *minimum*. Pour cet effet suivant ma methode, en comparant cette formule avec $\int Z dx$, & posant $dZ = M dx + N dy + P dp + \&c.$ la courbe cherchée sera $0 = N - \frac{dP}{dx}$. Mais puisque $Z = U + \alpha y$, & que U ne renferme que les va-

riables x & y , nous aurons $N = 0$, ou bien le différentiel de $U + \alpha y$, en ne supposant que y variable doit être $= 0$. Et partant le différentiel de U , en ne supposant que y variable, étant $= dy (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ & celui de $\alpha y = \alpha dy$, nous en obtiendrons pour la courbe cherchée AM cette équation $0 = \alpha + \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ ou bien la quantité d'action des forces sur chaque point M de la courbe AM doit être la même ; tout comme il a été trouvé par les autres principes. Ce bel accord de notre principe général dans ce cas ne laissera pas le moindre doute, qu'il ne soit pareillement d'accord dans tous les autres cas.

XXVI. On sera encore plus fortement convaincu de la vérité de ce principe général, si l'on remarquera, que la formule, dont la valeur est la plus petite dans la figure des fils flexibles, est parfaitement conforme à ce principe. Car soit AM la figure d'un fil parfaitement flexible, dont tous les élémens sont sollicités aux centres C, C', C'' par des forces V, V', V'' &c. & en vertu de notre principe le fil demeurera en repos, si la somme de toutes les actions des forces sur le fil AM sera la plus petite. Pour trouver cette somme, il faut chercher la quantité d'action sur l'élément $Mm = ds$, & puisque, en nommant les distances $CM = v, C'M = v', C''M = v''$ la quantité d'action sur le point M est $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ l'action sur l'élément $Mm = ds$ sera $= ds (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$, & partant la somme de toutes les actions sur la partie du fil AM , sera l'intégrale $\int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$. La valeur de cette formule étant renduë un *minimum*, donnera la figure du fil lors qu'il s'est mis en équilibre. Or ayant déterminé dans le Mémoire précédent la figure d'un tel fil par les principes ordinaires de la Mécanique, j'ai déjà remarqué que cette figure se trouve, si l'on cherche la courbe, où la valeur de cette même formule $\int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ est la plus petite.

XXVII. Je ne puis pas passer sous silence une fort belle propriété de la courbe d'un fil parfaitement flexible, & d'une épaisseur partout égale, à laquelle cette solution conduit. Soit AM ce fil parfaitement flexible, & partout de la même épaisseur, dont chaque point M est

Fig. 6.

est attiré à trois centres C, C', C'' par des forces V, V', V'', qui sont des fonctions quelconques des distances CM = v, CM' = v', C''M = v''. Qu'on nomme les abscisses CX = x, C'X' = -x', C''X'' = -x'' les appliquées XM = y, X'M' = y', X''M = y'' & puisque dx = dx' = dx'' & dy = dy' = dy'' l'élément de la courbe Mm fera ds = √(dx² + dy²). Soit maintenant dy = p dx, & dp = q dx; & la methode des plus grands & plus petits a fourni pour la courbe du fil AM l'équation suivante

$$\frac{V(y - px)}{v} + \frac{V'(y' - px')}{v'} + \frac{V''(y'' - px'')}{v''} = \frac{q}{1 + pp} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

où la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ exprime la quantité d'acti, on sur le point M. Qu'on divise de part & d'autre par $\sqrt{1 + pp}$, & puisque le rayon de la développée MO = $\frac{(1 + pp) V(1 + pp)}{q}$

nous aurons cette equation

$$\frac{\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''}{MO} = \frac{V(y - px)}{v \sqrt{1 + pp}} + \frac{V'(y' - px')}{v' \sqrt{1 + pp}} + \frac{V''(y'' - px'')}{v'' \sqrt{1 + pp}}$$

Or $\frac{y - px}{\sqrt{1 + pp}} = \frac{y dx - x dy}{ds}$ exprime la perpendiculaire CT

qui est menée du centre C à la tangente MT; car baissant du point X sur la même tangente la perpendiculaire XP & CQ sur XP, on

voit d'abord que XP = $\frac{y dx}{ds}$ & XQ = $\frac{x dy}{ds}$, de sorte que CT =

$$\frac{y dx - x dy}{ds} = \frac{y - px}{\sqrt{1 + pp}}; \text{ Donc si des autres centres } C', C'' \text{ on}$$

tire pareillement sur la tangente les perpendiculaires C'T', C''T'', l'équation trouvée se changera en cette forme:

$$\frac{\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''}{MO} = \frac{V}{v} \cdot CT + \frac{V'}{v'} \cdot C'T' + \frac{V''}{v''} \cdot C''T''$$

Multiplications par MO, & $\frac{CT \cdot MO}{v} = \frac{CT \cdot MO}{CM}$ exprimera la

ligne

ligne MR , ayant baissé sur la ligne CM prolongée du point O la perpendiculaire OR . Ce qui nous fournit cette propriété : Si du centre O du cercle osculateur en M on mène sur les distances CM , $C'M$, $C''M$ prolongées les perpendiculaires OR , OR' , OR'' ; alors la quantité d'action des forces sur le point M , c'est à dire $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ sera égale à $V.MR + V'.MR' + V''.MR''$.

XXVIII. Mais notre principe est encore plus général, & s'étend même aux fils élastiques, comme j'ai fait voir dans mon Mémoire précédent ; il s'agit seulement de ramener l'effet de l'élasticité à l'idée de la quantité d'action. Qu'on retienne toutes les dénominations du cas précédent, où chaque particule du fil AM est attirée vers les centres C , C' , C'' par les forces V , V' , V'' , & soit le rayon de la développée

$$MO = r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy}, \text{ duquel dépend la force de l'élasticité, qu'on suppose ordinairement } = \frac{A}{r}, \text{ ou } = \frac{S}{r}, \text{ si le fil n'est pas}$$

partout de la même épaisseur, de sorte que l'élasticité est dans un endroit plus grande, ou plus petite que dans un autre. Or pour rendre la solution plus générale, je supposerai que l'élasticité en M soit $= T$, cette lettre T marquant une fonction quelconque de r , qui renferme même la longueur du fil, en cas qu'il soit d'une élasticité variable. Cela posé, les principes de la Mécanique nous fournissent pour la courbe de ce fil élastique cette équation

$$T = + \int dy \int ds \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} + \&c. \right) \\ - \int dx \int ds \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''} + \&c. \right)$$

Pour trouver cette même équation par la méthode des plus grands & plus petits, puisque la quantité d'action des forces V , V' , V'' sur le point M est $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.$ on n'aura qu'à y ajouter la quantité d'action de l'élasticité, que je viens de nommer T :

on

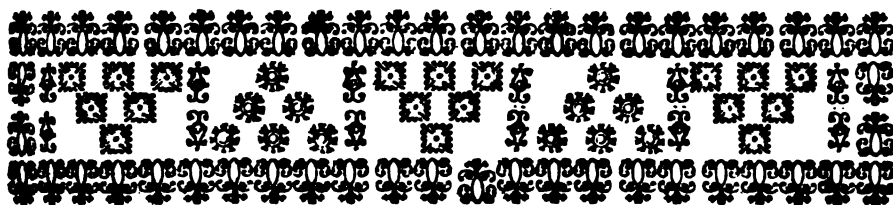
Or nommant $\frac{1}{r} = \epsilon$, de sorte que ϵ soit proportionnel à la courbure même, on comprendra aisément que, comme de la force V est résulté l'action $\int V dv$, ainsi de la force T résultera l'action $\int T d\epsilon$. Par conséquent, nommant la masse de l'élément du fil $Mm = dS$, la somme totale de toutes les actions sur la portion du fil AS sera $= \int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \& + \int T d\epsilon)$ & celle-cy sera la plus petite, quand le fil se trouve en équilibre: & cette propriété doit avoir lieu en vertu de notre principe, non seulement, lorsque les centres des forces C, C', C'' avec la figure du fil se trouvent dans le même plan, mais aussi lorsque leur situation est quelconque.

XXIX. Mais ayant établi ce principe général, que dans tout état d'équilibre la somme de toutes les actions des forces sur toutes les particules du corps, qui est en équilibre, est un *minimum*, je remarque de plus que ce même principe a lieu dans tous les mouvemens libres des corps, de quelques forces qu'ils soient sollicités. Soit un corps, après avoir reçu un mouvement quelconque, attiré constamment vers plusieurs centres de forces C, C', C'' , & que les forces V, V', V'' soient exprimées par des fonctions quelconques des distances $CM = v, C'M = v', C''M = v''$; ce corps éprouvera à chaque instant une autre quantité d'action de ces forces, & au moment qu'il se trouve en M , la quantité d'action est $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$, comme j'ai fait voir au commencement de ce discours. Donc nommant l'élément du tems $= dt$, la quantité d'action instantanée, que le corps soutient pendant cet élément de tems dt , sera $= dt (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$: & partant la somme de toutes les actions instantanées, auxquelles le corps est exposé pendant le tems fini $= t$, sera $= \int dt (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$. Maintenant il est fort naturel, que ce corps prendra une telle route, que cette somme de toutes les actions instantanées y soit un *minimum*. Voilà donc un nouveau principe général, pour le mouvement libre des corps sollicités par des forces quelconques, dont la vérité saute d'a-

bord aux yeux, dès qu'on fait réflexion sur l'idée de la quantité d'action, que j'ai établie.

XXX. En se servant de ce principe on trouvera en effet les mêmes courbes pour le mouvement des corps sollicités par des forces quelconques, auxquelles les principes ordinaires de la mécanique nous conduisent. Car ce principe ne diffère point de celui, dont je me suis servi pour déterminer ces mêmes courbes par la méthode *de maximis & minimis* : où j'ai fait voir, tout comme le principe de Mr. de Maupertuis exige que nommant l'élément de la courbe $Mm = ds$ & la vitesse du corps en $M = u$, la valeur de cette formule $\int u ds$ étoit toujours un *maximum*. Or j'ai remarqué cy-dessus que la quantité d'action $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ étant retranchée d'une quantité constante donne le carré de la vitesse uu , de sorte que $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' = C - uu$; donc, suivant notre nouveau principe, cette formule $\int ds (C - uu)$, où $C = \int u u ds$ se fait un *minimum*, ou bien pendant le même tems la valeur de cette formule $\int u u ds$ ou à cause de $ds = u dt$, la valeur de celle-cy $\int u ds$ doit être un *maximum*, tout comme j'ai prouvé dans mon *Traité de Maximis & Minimis*.





SUR UNE CONTRADICTION APPA-
RENTE DANS LA DOCTRINE DES LIGNES COURBES.

PAR M. EULER.



L

On croit généralement que la Geometrie se distingue des autres sciences, parce que tout qu'on y avance est fondé sur des démonstrations les plus rigoureuses, & qu'il ne s'y trouve rien, qui puisse donner occasion à des controverses. En effet, puisque dans la Geometrie on n'admet d'autres propositions, que celles qui sont parfaitement démontrées, on ne sauroit comprendre, comment on pourroit tomber en dispute. Encore moins fera-t-il possible, que deux propositions solidement prouvées soient en contradiction entr'elles, vu que les verités, bien loin d'être contraires, se trouvent toujours dans la plus parfaite harmonie entr'elles. Et quoiqu'il arrive souvent dans les autres sciences, que deux verités se paroissent contredire, on est pourtant bien assuré, que ce n'est qu'une contradiction apparente, qui tire pour la plus part son origine des idées moins précises, ou du defaut d'une connoissance suffisante des choses, auxquelles il faut avoir égard. Par cette raison on sera d'autant plus porté à croire, que dans la Geometrie de pareilles contradictions apparentes ne trouvent aucun lieu, puisqu'on est bien éloigné de se contenter des idées vagues, & non suffisamment déterminées.

Ee 2

II.

II. Néanmoins je m'en vai mettre devant les yeux deux propositions de la Geometrie, dont toutes les deux sont rigoureusement démontrées, qui paroissent conduire à une contradiction ouverte. Cette difficulté se rencontre dans la doctrine des lignes courbes, où pour les lignes courbes d'un certain ordre on fait combien de points il en faut pour la détermination. Ainsi une ligne du troisieme ordre peut être décrite par 9 points donnés, ou 9 points déterminent telle-ment une ligne du troisieme ordre, qu'il n'y a qu'elle seule qui puisse être tirée par ces neuf points. Mais il est aussi démontré que deux lignes du 3^{me} ordre se peuvent couper en neuf points ; donc, il peut arriver que deux lignes du troisieme ordre passent par neuf points donnés, d'où il s'ensuit que neuf points ne sont pas suffisants pour déterminer une ligne du 3^{me} ordre, ce qui est contraire à ce qu'on vient d'avancer. Avant que d'expliquer & de développer cette contradiction apparen-te, il sera convenable de la mettre dans tout son jour, pour en mieux faire sentir l'importance. Pour cet effet je commencerai par l'expli-cation de ces deux propositions mêmes, qui semblent renfermer cette contradiction.

prop. 1.

III. Comme une ligne du premier ordre, ou une droite, se peut tirer par deux points donnés quelconques, ainsi une ligne du second ordre, ou section conique, sera tirée par 5 points, une ligne du troi-sieme ordre par 9 points, une du quatrieme ordre par 14 points, & en général une ligne de l'ordre indiqué par le nombre n , pourra être tirée par $\frac{n \cdot n + 3 \cdot n}{2}$ points. Car l'équation générale des lignes de cet ordre :

$$Ay + (B + Cx)y + (D + Ex + Fx^2)y + (G + Hx + Lx^2 + Kx^3)y + \&c. = 0$$

contient $\frac{n \cdot n + 3 \cdot n}{2} +$, coefficients arbitraires A, B, C, D, &c. Or

chaque point donné, par lequel la courbe doit passer, fournit des valeurs données pour les coordonnées x & y , qui étant substituées donneront une

une équation. Donc $\frac{n n + 3 n}{2}$ points donnés conduisent à autant d'équations, par lesquelles tous les coefficients A, B, C, &c. seront déterminés, & par conséquent la courbe même. Car quoique les coefficients soient d'un de plus, que les équations tirées de $\frac{n n + 3 n}{2}$ points, puisqu'il ne s'agit ici que du rapport mutuel entre les coefficients, il n'en faut que $\frac{n n + 3 n}{2}$ équations pour déterminer tous ces rapports.

IV. Deux lignes droites, ou du premier ordre, ne peuvent se couper mutuellement qu'en un point; deux sections coniques, ou deux lignes du second ordre, ne peuvent se couper en plus qu'en quatre points. Deux lignes du troisième ordre se peuvent couper en 9 points; deux lignes du quatrième ordre en 16 points, & ainsi de suite. Et comme une ligne de l'ordre m , peut-être coupée, par une ligne droite en m points, par une ligne du second ordre en $2m$ points, par une ligne du troisième ordre en $3m$ points; ainsi on soutient en général qu'une ligne de l'ordre m peut-être coupée par une ligne de l'ordre n en $m n$ points. Cette proposition se doit entendre, que le nombre des intersections de deux lignes courbes, dont l'une est de l'ordre m , & l'autre de l'ordre n , ne peut être plus grand que $m n$, bien qu'il soit souvent plus petit: quelques points d'intersection ou s'éloignant à l'infini, ou devenant imaginaires. La démonstration, de cette proposition n'est pas si aisée, & j'en parlerai plus amplement dans la suite de ce discours.

V. La vérité de ces deux propositions étant reconnue, je rapporterai premièrement les conséquences qu'on en tire, & qui paroissent être contradictoires. Ensuite je ferai voir le défaut, qui se trouve dans ces conséquences, qui consiste dans une fort subtile précipitation du raisonnement, laquelle n'étant pas si facile à découvrir, nous doit rendre extrêmement circonspects, principalement dans les autres

sciences, afin que nous ne nous laissions pas séduire par de semblables contradictions apparentes. Car, si dans la Geometrie nous sommes assujettis à des difficultés si remarquables, où il est pourtant permis de ramener toutes les idées presque au plus haut degré de justesse, combien plus pourrons-nous être embarrassés dans les autres sciences, où il n'est pas possible de parvenir à des idées assez précises, & où il est infiniment plus difficile de se garantir de pareilles fautes dans le raisonnement? Enfin je mettrai dans tout son jour la maniere dont il faut entendre ces deux propositions, en y appliquant une certaine restriction nécessaire, laquelle étant remarquée, toutes les contradictions, quelques solides qu'elles aient pu paroître, évanouiront tout d'un coup, & on s'apercevra de la plus belle harmonie entre ces deux propositions.

Difficulté.

VI. La premiere contradiction semble d'abord se rencontrer dans la propriété des lignes du troisieme ordre, selon qu'on a égard ou à l'une ou à l'autre des deux propositions générales rapportées. Voicy les conséquences qu'on en tire :

I. *Puisqu'il faut, selon la premiere proposition, 9 points pour déterminer une ligne du troisieme ordre ; par 9 points donnés on ne peut tirer qu'une ligne du troisieme ordre.*

II. *Or, selon la seconde proposition, deux lignes du troisieme ordre se peuvent couper en 9 points ; donc on pourra marquer 9 points, par lesquels peuvent passer deux lignes du troisieme ordre.*

Ces deux conséquences se contredisent ouvertement ; car dans la premiere on soutient, que 9 points étant donnés, on ne sauroit décrire qu'une ligne du troisieme ordre qui passât par chacun de ces 9 points. Néanmoins la seconde conséquence nous fait voir, qu'il y a une infinité de cas, où par neuf points donnés on puisse faire passer deux lignes du troisieme ordre.

Difficulté.

VII. La contradiction devient encore plus sensible dans les lignes du quatrieme & de plus hauts ordres. Pour le quatrieme ordre les conséquences contradictoires sont.

I. Par



I. *Par la premiere proposition, il faut 14 points pour déterminer une ligne du quatrieme ordre : Et partant 14 points étans donnés, on ne pourra decrire qu'une ligne de cet ordre, qui passe par tous ces points.*

II. *Mais la seconde proposition nous apprend, que deux lignes du quatrieme ordre se peuvent couper mutuellement en 16 points : par conséquent dans ces cas il sera possible de faire passer deux lignes du quatrieme ordre par 16 points donnés.*

La contradiction de ces deux conséquences est manifeste, cars'il n'étoit pas possible de decrire plus d'une ligne du quatrieme ordre par 14 points donnés ; à plus forte raison on ne sauroit decrire deux lignes de cet ordre, qui passassent toutes les deux par les mêmes 16 points :

VIII. Pour les lignes du cinquieme ordre, nos deux propositions générales nous fournissent ces deux conséquences encore plus contraires entr'elles. III. Difficulté

I. *La premiere proposition nous enseignant que 20 points fussent pour déterminer une ligne du 5^{me} ordre, il s'en suit que par 20 points donnés on ne sauroit decrire qu'une seule ligne du 5^{me} ordre.*

II. *Or la seconde proposition nous assure, que deux lignes du 5^{me} ordre se peuvent couper mutuellement en 25 points. Donc il sera possible de marquer 25 points, par lesquels on sera en état de faire passer deux lignes du 5^{me} ordre.*

Il y a par conséquent des cas, ou 25 points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la ligne du 5^{me} ordre, & pourtant la premiere conséquence nous veut persuader qu'il ne faut que 20 points pour déterminer une ligne du cinquieme ordre. Et il est clair que dans les courbes de plus hauts ordres, la difference entre les nombres des points, qui devroient suffire à la détermination, devient encore plus grande.

IX. Ces contradictions étant tout à fait manifestes, il faut absolument, ou que l'une des deux propositions générales soit fausse, ou que les conséquences, qu'on en a tirées, ne soient pas justes. Pour la seconde proposition, quoiqu'on n'en trouve nulle part, à ce que je sache,

fache, une démonstration affés rigoureuse, elle est pourtant très certaine, comme je le montrerai cy-apres ; & les conséquences, qui en ont été tirées, sont si claires qu'il ne reste pas le moindre doute de ce coté là. Car si par exemple deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, on fera absolument forcé d'accorder, qu'il est possible de marquer 16 points, par lesquels on puisse faire passer non seulement une, mais deux lignes du quatrieme ordre. Donc tant la seconde proposition, que les conséquences, qu'on en a tirées, étant tout à fait averées, nous sommes obligés de conclure, que c'est dans la premiere proposition, ou dans la maniere d'en tirer les conséquences marquées Nro. I, qu'il faut chercher quelque paralogisme.

X. Les conséquences, qu'on a tirées de la premiere proposition, sont également bien fondées : car si 9 points déterminent une ligne du troisieme ordre, il s'ensuit, que par 9 points donnés on ne sauroit tirer qu'une ligne de cet ordre : de même que par deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite, & par cinq points donnés une seule section conique. Donc, si l'equation générale pour les lignes de l'ordre n est déterminée par $\frac{n^2 + 3n}{2}$ points, par lesquels elle doit passer, il ne fera pas possible, que plus d'une ligne de cet ordre passe par autant de points donnés, que cette formule $\frac{n^2 + 3n}{2}$ contient d'unités. Ce n'est pas donc dans les conséquences, qu'on vient de déduire de la premiere proposition, qu'il faut chercher la source de ces contradictions : & par conséquent il ne reste que la premiere proposition même, sur laquelle puisse tomber le soupçon d'un paralogisme, quelque fondée qu'elle paroisse d'ailleurs.

XI. En effet, en réfléchissant bien sur l'état de la premiere proposition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas, où $\frac{n^2 + 3n}{2}$ points donnés ne sont pas suffisans pour déterminer la courbe de l'ordre n , qui peut être tirée par ces points : ou, ce qui revient

vient au même que $\frac{n \cdot n + 3 \cdot n}{2}$ équations ne suffisent pas pour déterminer autant de coefficients, ou pour déterminer le rapport entre $\frac{n \cdot n + 3 \cdot n}{2} + 1$ coefficients : quoique ces coefficients entrent dans

chacune des équations, & qu'ils n'y occupent qu'une seule dimension. D'ailleurs c'est le cas le plus simple, où plusieurs inconnues doivent être déterminées par autant d'équations, puisque par l'élimination successive de ces quantités inconnues, on demeure toujours au premier degré, de sorte qu'on ne trouve jamais pour chaque inconnue plus d'une valeur, qui par conséquent sera toujours réelle. Circonstance qui paroît d'autant plus confirmer la vérité de la première proposition, & l'affranchir de toute exception.

XII. Cependant on ne doutera plus, qu'on ne doive appliquer, à cette première proposition une certaine restriction, sans laquelle elle ne sauroit être vraie en général ; dès qu'on aura égard aux réflexions suivantes.

Premièrement donc je dis, pour commencer des cas les plus simples, qu'il peut arriver, que deux équations ne sont pas suffisantes, pour déterminer les valeurs de deux inconnues, quoique toutes les deux entrent dans chacune de ces deux équations, & n'y occupent qu'une seule dimension. Car on n'a qu'à regarder ces deux équations $3x - 2y = 5$ & $4y = 6x - 10$ & on verra d'abord, qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnues x & y : puisqu'en éliminant l'une x , l'autre s'en va d'elle même, & on obtient une équation identique, dont on n'est en état de déterminer rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en $6x - 4y = 10$, qui n'étant que la première $3x - 2y = 5$ doublée, n'en diffère point. C'est pourquoi, quand on dit que pour déterminer deux quantités inconnues, il suffit d'avoir deux équations, il faut joindre à cette proposition cette restriction, que ces deux équations soient différentes entr'elles, ou que l'une ne soit pas déjà comprise dans l'autre & ce n'est qu'avec cette restriction, que la dite proposition puisse être admise.

III. Réflexion.

XIII. En second lieu, on reconnoitra aisément, que trois équations peuvent ne suffire pas à déterminer trois quantités inconnues. Car s'il arrive le même cas, que dans la réflexion précédente, qu'une des trois équations soit comprise dans une des deux autres, auquel cas les trois équations ne valent que deux ; alors il sera impossible d'en déterminer les trois inconnues. Comme si l'on avoit ces trois équations :

$$4x - 6y + 10z = 16$$

$$3x - 5y + 7z = 9$$

$$2x - 3y + 5z = 8$$

il est clair que la première ne différant de la 3^{me}, ne contribuë rien à la détermination des trois inconnues x, y & z . Mais il y a aussi des cas, où une des trois équations est contenuë dans les deux autres conjointement, comme si l'on avoit ces trois équations :

$$2x - 3y + 5z = 8$$

$$3x - 5y + 7z = 9$$

$$x + y + 3z = 7$$

où la somme de la première & troisième produit la seconde. Dans ce cas on peut omettre telle de ces trois équations qu'on voudra, & il est de même que s'il n'y avoit que deux équations. Ainsi quand on dit, que pour déterminer trois inconnues, il suffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette restriction, que ces trois équations différent tellement entr'elles, qu'aucune ne soit déjà comprise dans les autres.

III. Réflexion.

XIV. Il en est de même de quatre équations, qui ne sont suffisantes à déterminer quatre quantités inconnues, qu'au cas qu'elles soient toutes différentes entr'elles, ou qu'aucune ne soit déjà renfermée dans les autres. Car si une est déjà comprise dans les trois autres, ces quatre équations doivent être regardées, comme s'il n'y avoit que trois. Il peut même arriver, que deux équations soient déjà comprises dans les deux autres, & alors il n'y aura que deux équations, qui restent dans le calcul, & par conséquent deux inconnues resteront

ront indéterminées. Comme si l'on étoit parvenu à ces quatre équations :

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$

$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$

$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$

$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

elles ne vaudroient que deux. Car ayant tiré de la troisième la valeur de $x = -13y + 14z - 15v - 16$, & l'ayant substituée dans la

seconde pour avoir : $y = \frac{33z - 36v - 52}{29}$ & $x = \frac{23z + v33 + 212}{29}$

, ces deux valeurs de x & y étant substituées

dans la première & quatrième équation conduiront à des équations identiques, de sorte que les quantités z & v resteront indéterminées.

XV. La même circonstance peut avoir lieu en quelque nombre d'équations qu'on voudra, de sorte que quand même on auroit autant d'équations, qu'il y a d'inconnues, elles ne pourroient pas être suffisantes à les déterminer toutes. Car une des quantités inconnues restera indéterminée, si une des équations proposées est renfermée dans les autres. De plus, deux ou plusieurs quantités inconnues resteront indéterminées, s'il y a parmi les équations deux ou plusieurs, qui sont déjà renfermées dans les autres, & qui par conséquent ne contribuent rien à la détermination des inconnues. C'est pourquoi quand on soutient, que pour déterminer n quantités inconnues, il suffit d'avoir n équations, qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restriction, que toutes les équations soient différentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit déjà renfermée dans les autres.

XVI. Après ces réflexions on conviendra aisément, que pour la détermination de la ligne courbe d'un certain degré le nombre des points, qui selon la première proposition paroît suffisant, peut en

certain cas devenir insuffisant, puisque cette détermination se réduit à la détermination d'un certain nombre de coefficients par autant d'équations, qui, à ce que nous venons de voir, peuvent quelquefois devenir insuffisantes à ce dessein. Pour connoître ces cas, je considérerai premièrement l'équation générale pour les lignes droites au du premier ordre: $\alpha y + \zeta x + \gamma = 0$, & soient proposés deux points, par lesquels doit passer une ligne de cet ordre. Ayant choisi une ligne droite quelconque pour αx , soient a & b les coordonnées pour premier point & c d , pour l'autre: ou pour le premier-point on aura $x = a$; $y = b$; & pour l'autre $x = c$; $y = d$; d'où nous tirerons ces deux équations:

$$\alpha b + \zeta a + \gamma = 0. \quad \alpha d + \zeta c + \gamma = 0$$

de la différence desquelles nous aurons: $\frac{\alpha}{\zeta} = \frac{c - a}{d - b}$. Le rapport donc entre α & ζ sera toujours déterminé, à moins qu'il ne soit $c = a$ & $d = b$, auquel cas les deux points tombent l'un sur l'autre. Donc deux points déterminent une ligne droite, pourvu qu'ils ne soient pas coïncidents. Restriction qui s'entend de soi même dans la description de toutes les autres lignes courbes, parce que deux points qui tombent l'un sur l'autre, ne sont réputés que comme un seul.

XVII. L'équation générale pour les lignes du second degré étant:

$$\alpha x^2 + \zeta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

que 5 points soient proposés, par lesquels on doit décrire une ligne du second ordre. Pour abréger le calcul, qu'on prenne une ligne droite, qui passe par deux de ces points, pour axe, & une autre ligne tirée par un de ces deux points, & un troisième, représente l'inclinaison des appliquées, puisqu'il est indifférent de les supposer perpendiculaires à l'axe, ou non. Cela supposé, soient les valeurs de x & y pour ces 5 points donnés;

	I	II	III	IV	V
$x =$	0	a	0	c	e
$y =$	0	0	b	d	f

De

De là nous aurons les 5 équations suivantes :

$$I. \quad \zeta = 0$$

$$II. \quad \alpha a^2 + \delta a + \zeta = 0$$

$$III. \quad \gamma b^2 + \epsilon b + \zeta = 0$$

$$IV. \quad \alpha c^2 + \zeta c d + \gamma d^2 + \delta c + \epsilon d + \zeta = 0$$

$$V. \quad \alpha e^2 + \zeta e f + \gamma f^2 + \delta e + \epsilon f + \zeta = 0$$

Des trois premières nous avons d'abord :

$$\zeta = 0; \delta = -\alpha a; \& \epsilon = -\gamma b.$$

ces valeurs étant substituées dans les deux dernières donnent ces équations

$$\alpha c^2 + \zeta c d + \gamma d^2 - \alpha a c - \gamma b d = 0$$

$$\alpha e^2 + \zeta e f + \gamma f^2 - \alpha a e - \gamma b f = 0$$

que détermineront la courbe cherchée, à moins qu'elles ne soient pas équivalentes. Or ce cas arrivera, quand les deux valeurs de ζ qu'on en tire seront les mêmes

$$\zeta = \frac{\alpha c(a-c) + \gamma d(b-d)}{cd} = \frac{\alpha e(a-e) + \gamma f(b-f)}{ef}$$

$$c. d. d. \text{ si } \frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f} \& \frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}; \text{ ou si}$$

$$a = \frac{cf-dc}{f-d} \& b = \frac{de-cf}{e-c}. \text{ Par là on voit, que les cinq}$$

points donnés peuvent être tellement disposés, que la ligne du second ordre n'en est pas déterminée, & puisque un coefficient demeure indéterminé, il s'ensuit que par ces cinq points donnés on pourra faire passer une infinité de lignes du second ordre.

XVIII. Si nous considérons de plus près ce cas, où les cinq points donnés peuvent être insuffisants pour déterminer la ligne du second ordre, nous remarquerons aisément que cela arrive, quand quatre de ces cinq points donnés sont disposés dans une ligne droi-

ce. Cela deviendra assés clair, si des équations $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$ nous tirons les valeurs $f = \frac{d(a-c)}{a-c} = b - \frac{e(b-d)}{c}$ ce qui donne $(c-e)(ad-ab+bc) = 0$. Lorsque $e=c$, il y aura aussi $f=d$, & deux points tombent l'un sur l'autre; lequel cas s'exclut de lui même. Soit donc $ad-ab+bc = 0$, ou $f = b - \frac{b-c}{a}$, & on trouvera $f = b - \frac{b-c}{a}$; on n'a à présent qu'à regarder ces formules geometriquement, pour s'assurer, que quatre points sont situés en ligne droite. Il n'auroit pas été difficile de deviner d'abord ce cas, car puisque le second ordre renferme aussi deux lignes droites situées d'une maniere quelconque, on reconnoit, que si trois des cinq points donnés sont en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne du second ordre, & l'autre droite conjugée sera déterminée par les deux autres points. Donc, si quatre points sont situés en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne cherchée, mais l'autre partie, ou l'autre ligne droite passera par le cinquieme point, & n'ayant pas d'autres déterminations, on la pourra tirer comme on voudra. Si tous les cinq points donnés étoient situés en ligne droite, cette même droite avec toute autre quelconque satisferoit à la question; donc, ce cas sera encore moins déterminé que le précédent.

XIX. L'équation générale pour les lignes du troisieme ordre étant :

$ax^3 + 6x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \epsilon x^2 + \zeta xy + \eta y^2 + \theta x + \iota y + \kappa = 0$
il faut définir neuf coefficients par le dixième, pour que l'équation ou la ligne de cet ordre soit déterminée. Donc si neuf points sont donnés, par lesquels cette ligne doit passer, chacun fournissant une équation, la ligne sera déterminée, pourvu que ces neuf équations soient toutes différentes entr'elles, & qu'il n'y en ait aucune, qui soit déjà

déjà comprise dans les autres. Or on comprendra aisément, qu'il y a une infinité de cas, où non seulement une, mais aussi deux, ou plusieurs des neuf équations peuvent déjà être renfermées dans les autres : & par conséquent dans ces cas la courbe ne sera point déterminée par les 9 points proposés, mais on y pourra encore ajouter le dixième, & même l'onzième, ou le douzième, afin que la détermination devienne complète. Il est cependant fort difficile de définir ces cas généralement, comme j'ai fait pour les lignes du second ordre, puisque le calcul à cause du grand nombre des points, & des coefficients, deviendrait trop compliqué. Néanmoins il n'est pas difficile de découvrir plusieurs cas particuliers, où ce défaut dans la détermination a lieu ; desquels on ne conclurra pas difficilement, que le nombre de tels cas peut être infiniment grand, ce qui suffit pour mon dessein.

XX. On fait que l'équation générale du troisième ordre comprend, outre les lignes courbes de cet ordre, aussi ou trois lignes droites, ou une ligne droite jointe à une section conique. Donc si des neuf points donnés quatre sont disposés en ligne droite, puisque dans les lignes courbes de cet ordre il n'y a pas quatre points en ligne droite, cette ligne droite tirée par ces quatre points constituera une partie de la figure cherchée, & les cinq autres points détermineront l'autre partie, qui sera ou une section conique, ou deux droites ; & ici peut déjà avoir lieu le cas précédent de marque de détermination. Mais supposons que 5 points soient situés en ligne droite, qui constituera une partie de la figure, & il est clair que les autres 4 points ne sont pas suffisants pour déterminer l'autre partie. Dans ce cas donc on aura besoin de dix points pour déterminer la figure : or si des points proposés il y en a 6 situés en ligne droite, il en faut encore 5, & partant en tout 11 points pour déterminer entièrement la question. Et de là il est évident, qu'il peut arriver, que quelque grand nombre que ce soit de points, ne soit pas suffisant pour la détermination d'une ligne du troisième ordre, qui doit passer par tous ces points.

XXI. Comme ces cas n'ont lieu que dans les lignes droites qui sont comprises dans l'équation générale des lignes du troisième ordre

ordre, on doutera peut être, si la même chose peut arriver dans les lignes courbes de troisieme ordre, ou si neuf points peuvent être insuffisants pour déterminer une ligne courbe propre à cet ordre. Pour prouver cela je ne considererai qu'un cas, où les neuf points donnés

sont disposés en quarré $a b c d e f g b i$: que l'axe soit tiré par les points $d e f$, & que le point e soit le commencement des abscisses. Nommant l'intervalle de

a	b	c
d	e	f
g	b	i

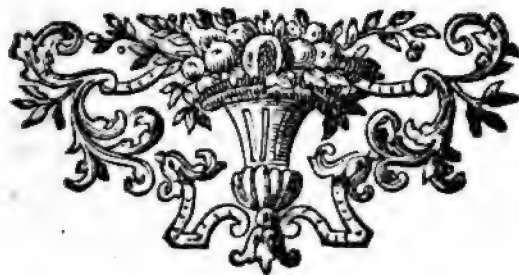
deux points $= a$, nous aurons pour l'abscisse $x = 0$, trois valeurs pour l'appliquée y , qui sont 0 , $+ a$, & $- a$; & ces mêmes trois valeurs répondront aussi à l'abscisse $x = a$, & à $x = - a$. A ces valeurs répondra cette équation

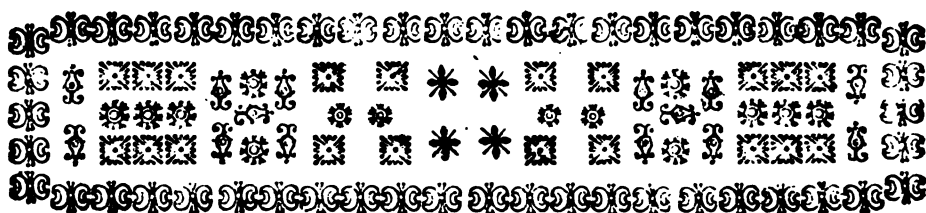
$$m y (y y - a a) = n x (x x - a a)$$

où le rapport des coefficients m & n peut être quelconque, de sorte qu'une infinité de lignes du troisieme ordre peut être indiquée, qui passent toutes par ces points donnés.

XXII. Il est bien vrai que cette équation renferme aussi des lignes droites, & des sections coniques: car si $n = 0$, on aura trois lignes droites $a c$, $d f$ & $g i$: si $m = 0$, on aura trois lignes droites $a g$, $b b$ & $c i$: si $m = n$, on aura une droite $a e i$, & une ellipse tirée par les points $b c f d g b$: & si $m = - n$, la ligne du troisieme ordre sera composée d'une ligne droite $c e g$ & d'une ellipse qui passe par les points $a b d f b i$. Mais dans tous les autres rapports, qu'on pose entre m & n , on aura toujours une vraie ligne courbe, qui passe par les neuf points donnés. Et de là on comprendra aisément que toutes les fois, que deux lignes du troisieme ordre, se coupent en 9 points, ces points seront tels, qu'ils ne déterminent pas tout à fait la ligne du troisieme ordre, & que dans l'équation générale, après qu'on l'aura appliquée à ces neuf points, il restera un coefficient indéterminé. Dans ces cas donc, il n'y aura pas seulement deux lignes du troisieme ordre, mais une infinité de lignes de cet ordre, qui peuvent toutes être décrites par ces neuf points.

XXIII. Quand deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entr'elles, sont suffisants pour déterminer une ligne de cet ordre ; ces 16 points seront toujours tels, que trois ou plusieurs des équations, qui en résultent, sont déjà comprises dans les autres. De sorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avoit que 13, ou 12, ou encore moins, & partant pour déterminer la courbe entièrement, on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points. La même chose arrivera si deux lignes du cinquieme ordre se coupent l'une l'autre en 25 points, qui n'étant pas suffisants à déterminer la courbe; ils ne vaudront plus que 19, ou même 18, de sorte que 6 ou 7 points sont superflus : & partant ces 25 points seront toujours tellement disposés, que dès que la courbe passe par 19 de ces points, elle passera d'elle même aussi par les autres, ou il sera impossible qu'elle passe par 19 points, sans passer en même tems par tous les 25. Ces réflexions étant bien comprises, on résoudra aisément toutes les autres difficultés, qui pourroient naître de la comparaison des deux propositions générales, que j'ai rapportées dans le commencement de ce discours.





D E M O N S T R A T I O N
SUR LE N O M B R E D E S P O I N T S , O U
D E U X L I G N E S D E S O R D R E S Q U E L C O N Q U E S
P E U V E N T S E C O U P E R .

P A R M . E U L E R .

I.



ans la Piece précédente j'ai rapporté sans démonstration cette proposition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une est de l'ordre m & l'autre de l'ordre n se peuvent couper en mn points.* La verité de cette proposition est reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouer, qu'on n'en trouve nulle part une démonstration assés rigoureuse. Il y a des verites générales, que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers : & c'est parmi cette espeece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la proposition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non seulement dans quelques, ou plusieurs cas, mais aussi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aisement, que toutes ces preuves infinies ne sont pas capables de mettre cette proposition à l'abri de toutes les objections, qu'un adversaire peut former, & qu'il faut absolument une démonstration rigoureuse, pour le réduire au silence.

II. Avant

II. Avant que d'entreprendre la démonstration de cette proposition, il en faut bien fixer le sens; Premièrement il est à remarquer, que le nombre des intersections de deux lignes, dont l'une est de l'ordre m , l'autre de l'ordre n , n'est pas nécessairement $= mn$, mais qu'il peut fort souvent être plus petit. Ainsi il peut arriver, que deux lignes droites ne se coupent point du tout, lorsqu'elles sont parallèles : & qu'une ligne droite ne coupe une parabole que dans un point : & que deux sections coniques ne se coupent l'une l'autre qu'en deux points, ou point du tout. Ainsi le sens de notre proposition est, que le nombre des intersections ne peut jamais être plus grand que mn , quoiqu'il soit souvent plus petit; & alors on juge, ou que quelques intersections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De sorte qu'en comptant les intersections à l'infini, & les imaginaires aussi bien que les réelles, on puisse dire, que le nombre des intersections est toujours $= mn$.

III. Il peut y avoir pourtant des cas, où le nombre des intersections est infini, si l'on veut regarder la coïncidence de deux lignes égales & semblables pour une infinité d'intersections. Ce cas arrivera donc, si les deux équations, qui expriment les deux lignes, sont les mêmes, ou si elles ont des facteurs égaux. Mais comme la coïncidence parfaite ne peut pas proprement être regardée comme une infinité d'intersections, puisque c'est plutôt un attouchement continu, le contenu de la proposition ne souffre aucune exception réelle de ce côté là; & si la question roule sur le nombre d'intersections de deux lignes courbes, on suppose toujours qu'elles ne sont ni coïncidentes, ni qu'elles ont des parties, dont l'une tombe parfaitement sur l'autre. Ainsi on pourra énoncer la proposition en question de cette manière : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m , & l'autre de l'ordre n , dont les équations ne sont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviseur, ne se peuvent jamais couper en plus que mn points, bien que le nombre des intersections puisse fort souvent être plus petit.

IV. On reconnoitra aisément la vérité de cette proposition générale dans une infinité de cas différens, & qui pourroient même tenir

lieu d'une démonstration, si l'on ne se piquoit pas de n'avancer rien dans la Geometrie, qui ne soit muni d'une démonstration rigoureuse. Cependant comme ces preuves particulieres ne contribuent pas peu à connoître mieux la proposition même, & à en faire sentir l'importance, je commencerai par l'explication de ces preuves, avant que d'entreprendre la démonstration générale. Et d'abord la verité de cette proposition est reconnue dans le cas, où l'une des deux lignes, qui se coupent, est droite, ou du premier ordre, c. à. d. si $m = 1$, car alors il est aisé de démontrer que le nombre des intersections d'une ligne de l'ordre n par une ligne droite est égal à n , ou plus petit. Car l'équation générale des lignes de l'ordre n étant :

$$\alpha y + (\beta + \gamma x) y + (\delta + \epsilon x + \zeta x^2) y + \dots = 0$$
 de l'équation pour une ligne droite quelconque

$$a y + b x + c = 0$$

on substitue la valeur de $y = -\frac{b x + c}{a}$, on parviendra à une é-

quation, où l'inconnue x ne monte, qu'à n dimensions. Donc puisque chaque intersection est marquée par une racine de x de cette équation, il est clair que le nombre des intersections est égal au nombre des racines de cette équation, & qu'il ne peut pas par conséquent être plus grand que n . De plus on verra que le nombre des intersections est $= n$, si toutes les racines sont réelles, & qu'il sera plus petit, si quelques unes de ces racines sont imaginaires. Or si les plus hautes dimensions de x se détruisent mutuellement, & que l'équation après l'élimination de y se réduise à un degré inférieur, c'est une marque, que quelques points d'intersections s'éloignent à l'infini.

V. Soit $m = 2$, & que la ligne du second ordre soit composée de deux lignes droites, ce qui arrive, lorsque l'équation est résoluble en deux facteurs, comme

$$(a y + b x + c) (d y + e x + f) = 0$$

Or

Or l'autre ligne soit une courbe quelconque de l'ordre n , dont la nature soit exprimée par cette équation

$$a y^n + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \&c. = 0$$

Dans ce cas il est clair, puisque cette ligne de l'ordre n ne peut être coupée par une ligne droite qu'en n points; que deux lignes droites qui sont regardées comme une seule ligne du second ordre, la pourront couper en $2n$ points, lorsque chacune la coupe en n points: ce qui est conforme à l'enoncé de la proposition, puisque mn dans ce cas devient $= 2n$.

VI. Si l'une des deux lignes proposées est du troisieme ordre, mais qu'elle soit composée de trois lignes droites, l'autre demeurant une courbe quelconque de l'ordre n , il est clair que le nombre d'intersections sera $= 3n$, ou moindre, comme la proposition exige. Et il en sera de même d'une ligne de l'ordre quelconque m , si elle consiste de m lignes droites, ou si son équation est résoluble en autant d'équations simples de cette forme $ay + bx + c = 0$; car puisque chacune de ces lignes droites peut couper l'autre ligne proposée de l'ordre n en n points, le nombre de toutes les intersections pourra monter à mn , selon l'enoncé de la proposition. Et partant nous avons déjà une infinité de cas, où la vérité de cette proposition se trouve solidement établie. Mais dans tous ces cas l'une des deux lignes proposées, n'est pas véritablement une ligne courbe, mais plutôt un amas de plusieurs lignes droites, selon l'ordre auquel elle appartient.

VII. Mais il y a aussi une infinité de lignes courbes où la vérité éclate avec autant de clarté. Car soit l'une des deux lignes une parabole exprimée par l'équation: $y = axx + bx + c$, & partant $m = 2$. l'autre courbe soit exprimée par l'équation générale de l'ordre n :

$$a y^n + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \&c. = 0$$

& il est evident que si l'on met ici par tout pour y sa valeur $axx + bx + c$, cette équation montera au degré $2n$, & la racine x pourra avoir autant de racines, dont toutes les intersections seront indiquées:

donc il sera possible que la ligne de l'ordre n soit coupée par la parabole en $2n$ points : & quoique le nombre des intersections puisse souvent être plus petit, on voit pourtant, qu'il ne peut jamais être plus grand que $2n$.

VIII. La même chose paroît aussi, si l'une des deux lignes est une courbe parabolique d'une ordre quelconque :

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

Car si l'on met cette valeur pour y dans l'équation pour l'autre courbe de l'ordre n , on verra sans difficulté, que la lettre x obtiendra dans l'équation résultante mn dimensions, qui marquent autant de racines & partant autant d'intersections, tout comme la proposition prononce. De là on conclura aussi, comme l'axe des deux courbes est arbitraire, quand même l'une des deux courbes ne seroit pas exprimée par une telle équation :

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

pourvu qu'en changeant d'axe, & même d'inclinaison entre les coordonnées, l'équation puisse être réduite à cette forme, le nombre des intersections sera également $= mn$, l'équation qui désigne les intersections montant toujours à ce degré, ou un inférieur, & jamais à un plus haut.

IX. Ces cas particuliers joints ensemble nous conduisent à un cas beaucoup plus général, où la vérité de la proposition se trouve confirmée. Car toutes les fois que l'équation de la première ligne, que je suppose de l'ordre m se peut résoudre en des facteurs, qui expriment, ou lignes droites, ou courbes paraboliques, cette équation étant :

$$(y - P)(y - Q)(y - R)(y - S) \&c. = 0$$

où $P, Q, R, S, \&c.$ soient des fonctions rationnelles de x , & le premier facteur $y - P = 0$ marque une ligne de l'ordre p , le second $y - Q = 0$ une de l'ordre q , le troisième une de l'ordre r , &c. de sorte que $p + q + r + s + \&c. = m$, cette ligne sera composée de toutes ces lignes droites ou courbes ensemble : & l'autre courbe, que je suppose être

être de l'ordre n , pourra être coupée de la partie de la premiere, qui est exprimée par le facteur $y - P = 0$, en $p n$ points, de la partie comprise en $y - Q = 0$ en $q n$ points, de la partie comprise en $y - R = 0$ en $r n$ points. &c. Et partant la ligne de l'ordre n pourra être coupée par toutes les parties de la ligne premiere de l'ordre m en $p n + q n + r n + s n + \&c.$ points, c'est à dire en $m n$ points, à cause de $p + q + r + s + \&c. = m$.

X. Quoique ces cas aillent à l'infini, on conviendra néanmoins, qu'il s'en faut encore beaucoup, que la verité de la proposition soit démontrée dans toute son étendue. Et pour parvenir à une telle démonstration il faut prouver, que deux équations d'ordres quelconques étant proposées, comme :

$$ay + (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fxx)y^{m-2} + \&c. = 0$$

$$\alpha y + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta xx)y^{n-2} + \&c. = 0$$

si l'on elimine l'une ou l'autre des deux variables x & y , l'autre ne monte après l'elimination qu'à $m n$ dimensions. Il est bien vrai qu'il seroit impossible d'achever en général cette élimination, pour faire voir actuellement, à combien de dimensions l'autre variable pourroit monter : & même dans la plupart des cas si l'on se sert des methodes ordinaires d'eliminer, on parviendra à une équation de plus de dimensions, que $m n$; de sorte qu'employant cette maniere, on devroit plutot croire que la proposition fut fausse. Car quoique l'équation, à laquelle on arrive par ce chemin, ait des diviseurs, on a lieu de douter, si l'on peut negliger ces diviseurs, & s'ils ne renferment des racines, qui marquent des intersections.

XI. Pour faire sentir plus évidemment cette difficulté, je m'en vai eliminer suivant la maniere ordinaire la quantité y de ces deux équations :

$$I. Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0.$$

$$II. py^3 + qy^2 + ry + s = 0.$$

Où P, Q, R, S, p, q, r, s soient des fonctions quelconques de l'autre

tre quantité variable x . Multiplions la premiere par s , & la seconde par S , & la difference étant divisée par y donnera :

$$\text{III. } (Ps - pS) y^2 + (Qs - qS) y + Rs - rS = 0.$$

Ensuite multiplions la premiere par p , & la seconde par P , & la difference donnera :

$$\text{IV. } (Qp - qP) y^2 + (Rp - rP) y + Sp - sP = 0.$$

De la même maniere de ces deux équations du second degré nous tirerons deux du premier degré de y :

$$\text{V. } ((Ps - pS)(Sp - sP) - (Qp - qP)(Rs - rS)) y + (Qs - qS)(Sp - sP) - (Rp - rP)(Rs - rS) = 0.$$

$$\text{VI. } ((Qs - qS)(Qp - qP) - (Rp - rP)(Ps - pS)) y + (Rs - rS)(Qp - qP) - (Sp - sP)(Ps - pS) = 0.$$

Et de là on tirera cette équation, ou la quantité y ne se trouve plus :

$$\text{VII. } (Ps - pS)(Sp - sP)(Rs - rS)(Qp - qP) - (Ps - pS)^2 (Sp - sP)^2$$

$$- (Qp - qP)^2 (Rs - rS)^2 + (Qp - qP)(Rs - rS)(Sp - sP)(Ps - pS) =$$

$$(Qs - qS)^2 (Qp - qP)(Sp - sP) - (Qs - qS)(Qp - qP)(Rp - rP)(Rs - rS)$$

$$- (Rp - rP)(Ps - pS)(Qs - qS)(Sp - sP) + (Rp - rP)^2 (Ps - pS)(Rs - rS)$$

qui se change en celle-cy :

$$= (Ps - pS)^4 + 2(Qp - qP)(Rs - rS)(Ps - pS)^2 - (Qp - qP)^2 (Qs - qS)^2 (Ps - pS) + (Qp - qP)^2 (Rs - rS)^2$$

$$+ (Rp - rP)(Qs - qS)(Ps - pS)^2 + (Rs - rS)(Rp - rP)^2 (Ps - pS) - (Qp - qP)(Qs - qS)(Rp - rP)(Rs - rS)$$

Mais les derniers termes qui ne contiennent pas le facteur $(Ps - pS)$ se réduisent à :

$$(Qp - qP)(Rs - rS)((Qp - qP)(Rs - rS) - (Qs - qS)(Rp - rP))$$

ce qui est :

$$(Qp - qP)(Rs - rS)(Ps - pS)(Qr - qR)$$

& partant toute l'équation sera divisible par $Ps - pS$ étant :

$$-pS)^4 + 2(Qp - qP)(Rs - rS) \} (Ps - pS)^2 - (Qp - qP)(Qs - qS)^2 \} (Ps - pS) + (Qp - qP)(Qr - qR)(Rs - rS)(Ps - pS)$$

$$+ (Rp - rP)(Qs - qS) \} (Ps - pS)^2 + (Rs - rS)(Rp - rP)^2 \} (Ps - pS) + (Qp - qP)(Qr - qR)(Rs - rS)(Ps - pS)$$

XII. Il est assez clair, que dans ce cas le facteur $Ps - pS$ étant posé $= 0$, ne peut pas marquer une intersection, & que par conséquent les intersections des deux courbes proposées seront contenues dans cette équation :

$$(Ps - pS)^3 + 2(Qp - qP)(Rs - rS)(Ps - pS) - (Qp - qP)(Qs - qS)^2$$

$$+ (Rp - rP)(Qs - qS)(Ps - pS) + (Rs - rS)(Rp - rP)^2 = 0.$$

$$+ (Qp - qP)(Qr - qR)(Rs - rS)$$

Donc dans le cas de deux lignes courbes du troisieme ordre, les coefficients

coefficients P & p seront constants ; Q & q des fonctions de x d'une dimension comme $\alpha + \beta x$; R & r des fonctions de x de deux dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; & S & s des fonctions de x de trois dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Par conséquent les facteurs, qui se trouvent dans cette équation seront des fonctions de x :

$$\begin{array}{l|l} P s - p S \text{ de } 3 \text{ dim.} & Q s - q S \text{ de } 4 \text{ dim.} \\ Q p - q P \text{ d'une dim.} & Q r - q R \text{ de } 3 \text{ dim.} \\ R s - r S \text{ de } 5 \text{ dim.} & R p - r P \text{ de } 2 \text{ dim.} \end{array}$$

d'où il est évident, que l'équation, qui indique les intersections sera de 9 dimensions, & que par conséquent, en général deux lignes du 3^e ordre se peuvent couper en 9 points.

XIII. Ces mêmes équations choisies :

$$P y^3 + Q y^2 + R y + S = 0$$

$$p y^3 + q y^2 + r y + s = 0$$

peuvent aussi montrer le nombre des intersections dans une infinité d'autres cas. Car que la première équation exprime une ligne de l'ordre m , & la seconde équation une ligne de l'ordre n , ce qui arrivera, quand les coefficients seront des fonctions rationnelles entières de x : savoir

$$\begin{array}{l|l} P \text{ de } m - 3 \text{ dimens.} & p \text{ de } n - 3 \text{ dim.} \\ Q \text{ de } m - 2 \text{ dim.} & q \text{ de } n - 2 \text{ dim.} \\ R \text{ de } m - 1 \text{ dim.} & r \text{ de } n - 1 \text{ dim.} \\ S \text{ de } m \text{ dim.} & s \text{ de } n \text{ dim.} \end{array}$$

Alors les facteurs, qui constituent l'équation, qui ne contient plus la variable y , seront des fonctions de x :

$$\begin{array}{l|l} P s - p S \text{ de } m + n - 3 \text{ dim.} & R p - r P \text{ de } m + n - 4 \text{ dim.} \\ Q p - q P \text{ de } m + n - 5 & Q r - q R \text{ de } m + n - 3 \\ R s - r S \text{ de } m + n - 1 & Q s - q S \text{ de } m + n - 2 \end{array}$$

Et partant le nombre des intersections de ces deux courbes sera $= 3m + 3n - 9$; qui est toujours plus petit que mn si m & n sont plus grand que 3. Car soit : $m = 3 + \alpha$ & $n = 3 + \beta$, le nombre des intersections sera $= 9 + 3(\alpha + \beta)$ au lieu que $mn = 9 + 3(\alpha + \beta) + \alpha\beta$

$\alpha \beta$. Mais on voit bien que cette diminution du nombre des intersections vient de ce que les équations choisies n'expriment pas généralement les courbes des ordres m & n , mais seulement des espèces de ces ordres; d'où il n'est pas surprenant, que le nombre des intersections a été trouvé plus petit, que la proposition demande.

XIV. Comme l'élimination de l'inconnuë y des deux équations cubiques, dont j'ai fait le calcul, a conduit à une équation trop haute, qui n'a été conduite au juste degré que par la division d'un facteur, dont on pouvoit bien voir qu'il ne renfermoit aucune intersection: ainsi dans les équations, où y a plus de dimension, on parviendra par l'élimination de y à une équation encore plus élevée, qui en vérité admettra un diviseur, mais cette méthode, qui seroit d'ailleurs impracticable dans de plus hautes équations, ne nous mettra pas en seureté, si l'on trouvera toujours un tel diviseur, qui ne regarde point les intersections, & encore moins, si après la division l'équation sera justement d'autant de dimensions, que la proposition générale marque; c. à d. si le nombre des dimensions ne sera jamais plus grand que mn , si les deux équation proposées ont été des ordres m & n . Cette circonstance prouve donc encore davantage la nécessité de démontrer la proposition générale dans toute son étendue, puisque sans cela on auroit bien de la raison de douter de sa vérité.

XV. C'est donc principalement de l'ouvrage de l'élimination, que dépend la démonstration de notre proposition générale, où il faut prendre garde, que par l'élimination on ne parvienne à une équation, qui renferme des racines inutiles. Car deux équations étant proposées, dont chacune contient une même variable y , qui doit être éliminée, on voit aisément que l'élimination se peut faire d'une infinité de manières différentes, selon qu'on multiplie l'une & l'autre équation par une quantité arbitraire. Il s'agit donc de bien fixer l'idée de l'élimination, & de diriger cette opération, en sorte que l'équation, à laquelle on arrive, ne contienne d'autres racines, que telles, qui marquent des intersections; & qu'on puisse être assuré, qu'elle ne renferme des facteurs superflus, dont on pourroit douter s'ils indiquent des intersections, ou non?

XVI. Soient

XVI. Soient donc proposées deux équations quelconques :

$$y^m - P y^{m-1} + Q y^{m-2} + R y^{m-3} - S y^{m-4} + \&c. = 0$$

$$y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} + r y^{n-3} - s y^{n-4} + \&c. = 0$$

lesquelles il faille combiner, en sorte qu'il en résulte une équation qui ne contienne plus la lettre y . Or d'abord on voit que la valeur de y , qui résulte d'une de ces équations doit être égale à la valeur de y , qui résulte de l'autre. Donc si l'une & l'autre équation donne plusieurs valeurs de y , les deux équations proposées pourront subsister ensemble, si une valeur quelconque de y de l'une sera égale à une valeur quelconque de y de l'autre. Supposons que toutes les racines de la première équation soient :

$A, B, C, D, E, F, G \&c.$

& les racines de l'autre équation :

$a, b, c, d, e, f, g \&c.$

Cela posé, il est clair que chacune des deux équations proposées aura lieu dans tous les cas, qu'une des racines de la première équation sera égale à une des racines de l'autre.

XVII. Le nombre des racines $A, B, C, D \&c.$ de la première équation sera $= m$, & le nombre des racines de l'autre équation sera $= n$; donc les équations proposées pourront être représentées sous ces formes :

$$(y - A)(y - B)(y - C)(y - D)(y - E) \&c. = 0.$$

$$(y - a)(y - b)(y - c)(y - d)(y - e) \&c. = 0.$$

A présent il est clair que si $A = a$, la valeur $y = A = a$ satisfera à l'une & à l'autre équation; la même chose arrivera si $A = b$; ou $A = c$; ou $A = d$; ou $A = e$; &c. de plus la valeur $y = B$ satisfera à l'une & à l'autre, si $B = a$, ou $B = b$; ou $B = c$; ou $B = d$; ou $B = e$; &c. & la valeur $y = C$ satisfera à toutes les deux équations si $C = a$, ou $C = b$; ou $C = c$; ou $C = d$; ou $C = e$; &c. & ainsi des autres. Et il est évident, que toutes ces combinaisons ensemble représentent tous les cas possibles, où les deux équations proposées pourront subsister à la fois.

XVIII. Donc puisque l'équation, qu'on cherche par l'élimination, doit contenir tous les cas possibles, où la même valeur mise pour y satisfait à l'une & à l'autre équation à la fois, il est clair qu'elle doit contenir tous les cas marqués, & partant elle sera composée de tous ces facteurs.

$$\left. \begin{aligned} & (A-a) (A-b) (A-c) (A-d) (A-e) \&c. \\ & (B-a) (B-b) (B-c) (B-d) (B-e) \&c. \\ & (C-a) (C-b) (C-c) (C-d) (C-e) \&c. \\ & (D-a) (D-b) (D-c) (D-d) (D-e) \&c. \\ & (E-a) (E-b) (E-c) (E-d) (E-e) \&c. \end{aligned} \right\} = 0.$$

Donc, puisque la quantité y ne se trouve plus dans cette équation, elle sera la même qu'on cherche par l'élimination, & qui montre tous les cas, où les deux équations proposées peuvent avoir la même racine. Mais comme les racines $A, B, C, D \&c. a, b, c, d \&c.$ sont souvent impossibles d'être assignées, il s'agit d'exprimer cette équation par les coefficients $P, Q, R, S \&c. p, q, r, s \&c.$ dont le rapport aux racines est connu.

XIX. Parceque, comme nous avons vu, le produit de tous ces facteurs $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)(y-e) \&c.$ est égal à l'expression $y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \&c.$ si nous substituons successivement pour y les valeurs $A, B, C, D \&c.$ l'équation, qui doit résulter par l'élimination, sera composée de ces facteurs :

$$\left. \begin{aligned} & (A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - rA^{n-3} + sA^{n-4} - \&c.) \\ & (B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - rB^{n-3} + sB^{n-4} - \&c.) \\ & (C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - rC^{n-3} + sC^{n-4} - \&c.) \\ & (D^n - pD^{n-1} + qD^{n-2} - rD^{n-3} + sD^{n-4} - \&c.) \\ & (E^n - pE^{n-1} + qE^{n-2} - rE^{n-3} + sE^{n-4} - \&c.) \end{aligned} \right\} = 0.$$

&c.

où

où le nombre de ces facteurs est $= m$, selon le nombre des racines de la première équation. D'où est-il évident aussi que changeant les équations, l'équation, qui résulte par l'élimination, peut être représentée aussi sous cette forme :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & a^m - Pa^{m-1} + Qa^{m-2} - Ra^{m-3} + Sa^{m-4} - \&c.) \\ (b) \quad & b^m - Pb^{m-1} + Qb^{m-2} - Rb^{m-3} + Sb^{m-4} - \&c.) \\ (c) \quad & c^m - Pc^{m-1} + Qc^{m-2} - Rc^{m-3} + Sc^{m-4} - \&c.) \\ (d) \quad & d^m - Pd^{m-1} + Qd^{m-2} - Rd^{m-3} + Sd^{m-4} - \&c.) \\ (e) \quad & e^m - Pe^{m-1} + Qe^{m-2} - Re^{m-3} + Se^{m-4} - \&c.) \end{aligned} \right\} = 0.$$

&c.

où le nombre des facteurs est $= n$.

XX. Quoique les expressions des racines A, B, C, D &c. & a, b, c, d &c. soient pour la plupart fort irrationnelles, & souvent telles, qu'on ne les peut pas assigner; on fait pourtant que la somme de toutes les racines A, B, C, D &c. est $= P$

la somme des produits de deux à deux $= Q$

la somme des produits de trois à trois $= R$

la somme des produits de quatre à quatre $= S$

&c.

Et par ces valeurs P, Q, R, S &c. on est en état d'exprimer toutes les expressions, dans lesquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles composées de P, Q, R, S &c. Or on voit aisément, que si l'on multiplie les facteurs mentionnés actuellement, on parviendra toujours à de semblables expressions, qui renferment toutes les racines également, & au lieu desquelles on pourra mettre des fonctions rationnelles des coefficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c. Cela est aussi clair par la double forme de cette équation du §. preced. Car s'il restoit dans la première forme quelque irrationalité, ce seroit une irrationalité de la première équation, mais

par la seconde forme nous voyons, qu'il n'y peut y avoir une irrationalité de la première équation. D'où il s'enfuit, que l'une & l'autre forme doit conduire à la même expression rationnelle, qui ne renferme que les coefficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c.

XXI. Si nous réfléchissons maintenant, que dans les équations proposées

$$y^m - P y^{m-1} + Q y^{m-2} - R y^{m-3} + S y^{m-4} - \&c. = 0$$

$$y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - r y^{n-3} + s y^{n-4} - \&c. = 0$$

entant qu'elles expriment des lignes des ordres m & n les coefficients P & p marquent des fonctions du premier degré de x comme $\alpha + \beta x$; les coefficients Q & q des fonctions du second degré $\alpha + \beta x + \gamma x x$; les coefficients R & r des fonctions du troisième degré $\alpha + \beta x + \gamma x x + \delta x^3$ &c. Donc la somme des racines A, B, C, D &c. ou a, b, c, d, e &c. sera exprimée par une fonction de x d'un degré. La somme des produits de deux à deux de ces racines par une fonction du second degré: la somme des produits de trois à trois racines par une fonction du troisième degré, & ainsi de suite. C'est pourquoi dans la composition de toutes ces racines dans la première forme (§. XVII.) on pourra regarder chaque racine comme une fonction d'une dimension de x : & partant cette forme étant composée de $m n$ facteurs simples, elle montera à $m n$ dimensions de x & désignera par conséquent $m n$ intersections des deux courbes proposées.

XXII. S'il y a dans cette démonstration encore quelque obscurité, cela vient de la grande universalité: & tous les doutes qu'on en pourroit avoir évanouiront entièrement, dèsqu'on fera l'application à quelques cas particuliers, d'où l'on reconnoitra d'abord, que tout ce que je viens d'avancer sur les dimensions de chaque partie, doit avoir lieu non seulement dans ces cas, mais aussi en général. Je commencerai par deux équations du second ordre, qui soient

$$\begin{array}{l} y y - P y + Q = 0 \\ y y - p y + q = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Les racines} \\ A, B \\ a, b \end{array}$$

donc

donc, puisque $m = 2$ & $n = 2$, l'équation, où l'élimination doit conduire, sera :

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0$$

qui étant développée, donnera :

$$A^2 B^2 - pAB(A+B) + q(A^2 + B^2) + ppAB - pq(A+B) + qq = 0$$

Or ayant $AB = Q$ & $A+B = P$, il sera $AA + BB = PP - 2Q$:

par conséquent l'équation cherchée sera :

$$Q^2 - pPQ + qPP - 2Qq + ppQ - pqQ + qq = 0$$

dont chaque terme sera de quatre dimensions de x pourvu que P & p renferment une dimension de x , & Q & q deux.

XXIII. Soient les deux équations proposées du troisiemeordre :

Les racines étant

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0 \quad \left| \quad A, B, C \quad \& \quad m = 3 \right.$$

$$y^3 - py^2 + qy - r = 0 \quad \left| \quad a, b, c \quad \& \quad n = 3 \right.$$

Donc l'équation cherchés par l'élimination de y sera :

$$(A^3 - pA^2 + qA - r)(B^3 - pB^2 + qB - r)(C^3 - pC^2 + qC - r) = 0$$

qui par le developpement deviendra :

$$\begin{aligned} & A^3 B^3 C^3 - pA^2 B^2 C^2 (AB + AC + BC) + qABC(A^2 B^2 + A^2 C^2 + B^2 C^2) - r(A^3 B^3 + A^3 C^3 + B^3 C^3) \\ & + p^2 A^2 B^2 C^2 (A + B + C) - pqABC(A^2 B + AB^2 + A^2 C + AC^2 + B^2 C + BC^2) - p^3 A^2 B^2 C^2 \\ & + q^2 ABC(A^2 + C^2 + C^2) + pr(A^3 B^2 + A^2 B^3 + A^3 C^2 + A^2 C^3 + B^3 C^2 + B^2 C^3) + q^3 ABC \\ & + r^2 (A^3 + B^3 + C^3) - qr(A^3 B + AB^3 + A^3 C + AC^3 + B^3 C + BC^3) - r^3 \\ & + p^2 qABC(AB + AC + BC) + pqr(A^2 B + AB^2 + A^2 C + AC^2 + B^2 C + BC^2) \\ & - p^2 r(A^2 B^2 + A^2 C^2 + B^2 C^2) - q^2 r(AB + AC + BC) \\ & - pqrABC(A + B + C) + q^2 r^2 (A + B + C) \\ & - pr^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 0 \end{aligned}$$

où il faut remarquer que :

$$A + B + C = P$$

$$AB + AC + BC = Q$$

$$ABC = R$$

d'une dimension de x

de deux dimensions

de trois dimensions.

XXIV. Pour les autres expressions on les trouvera formées des coefficients P, Q, R en sorte :

$$A^2 + B^2 + C^2 = P^2 - 2Q \text{ de 2 dimensf.}$$

$$A^2 B + AB^2 + A^2 C + AC^2 + B^2 C + BC^2 = PQ - 3R \text{ de 3 dimensf.}$$

$$A^3 + B^3$$

$$A^3 + B^3 + C^3 = P^3 - 3PQ + 3R \text{ de 3 dim.}$$

$$A^3B + AB^3 + A^3C + AC^3 + B^3C + BC^3 = P^2Q - PR - 2Q^2 \text{ de 4 dim.}$$

$$A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 = Q^2 - 2PR \text{ de 4 dim.}$$

$$A^3B^2 + A^2B^3 + A^3C^2 + A^2C^3 + B^3C^2 + B^2C^3 = PQ^2 - 2P^2R - QR \text{ de 5 dim.}$$

$$A^3B^3 + A^3C^3 + B^3C^3 = Q^3 - 3PQR + 3RR \text{ de 6 dim.}$$

d'où l'on voit clairement, puisque $p, q, \& r$ sont des fonctions d'une, 2 & 3 dimensions de x , que tous les termes renferment le même nombre de dimensions de x , & que ce nombre est $= 9$, comme l'énoncé de la proposition exige. Or cette substitution donnera l'équation suivante par l'élimination de la variable y :

$$\begin{aligned} &+R^3 - pQR^2 + qQ^2R - 2qPR^2 - rQ^3 + 3rPQR - 3rR^2 \\ &-r^3 + qr^2P - q^2rQ + 2pr^2Q + q^3R - 3pqrR + 3r^2R \\ &+p^2PR^2 - pqPQR + 3pqRR + prPQ^2 - 2prP^2R - prQR + q^2P^2R \\ &-pr^2P^2 + pqrPQ - 3r^2PQ - pq^2PR + 2p^2rPR + qrPR - p^2rQ^2 \\ &\quad +rrP^3 - 2qqQR - qrP^2Q \\ &\quad -p^3R^2 + 2grQQ + ppqQR = 0. \end{aligned}$$

XXV, Cet exemple servira à nous convaincre en général, si les deux équations proposées sont :

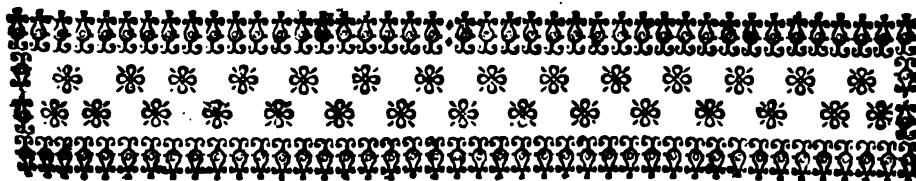
$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} \dots \pm V = 0$$

$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} \dots \pm v = 0$$

où $P \& p$ sont des fonctions d'une dimension de x ; $Q \& q$ de deux; $R \& r$ de trois &c. & les derniers termes V de m dimensions & v de n dimensions: que le premier terme, que l'équation du §. XIX. résultante par l'élimination fournit, sera $A^m B^n C^m D^n \&c. = V^m$

& partant de mn dimensions de x , & puisqu'on voit aussi clairement, que tous les autres termes pouvant être exprimés par les lettres $P, Q, R \&c.$ & $p, q, r \&c.$ doivent contenir le même nombre de dimensions de x , il est incontestablement démontré, que l'équation, à laquelle on parvient par l'élimination de la lettre y , sera de mn dimensions de x : tout comme la proposition générale avance.

SUTTE



SUITE DES RECHERCHES SUR LE CALCUL INTEGRAL.

PAR M. D'ALEMBERT.

TROISIEME PARTIE

DES DIFFERENTIELLES QUI SE RAPPORTENT

A LA QUADRATURE DES LIGNES

DU TROISIEME ORDRE.

PROBLEME L



L.

trouver l'integrale de $\frac{dx}{x^n \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$,
étant un nombre entier positif.

Si on prend la difference de $x^{-q} \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}$,
on trouvera que cette difference est égale à la quantité suivante ;

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \cdot \begin{matrix} -q-1 & -q & -q+1 & -q+2 \\ (-2aqx & -2bqx & -2cx & -2fx \\ +bx & +2cx & +3fx & \end{matrix}$$

d'où il s'ensuit 1°. que si l'on fait $q = \frac{1}{2}$, l'integrale de $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$

$\frac{dx}{x^2 \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$ dépendra de celle de
 $\frac{dx}{x \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$, de celle de $\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$
 & de celle de $\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$. Or ces deux dernières se
 rapportent à la rectification des sections coniques, comme nous l'a-
 vons fait voir dans la seconde partie: donc la différentielle
 $\frac{dx}{x^2 \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections
 coniques, & de l'intégration de $\frac{dx}{x \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$
 2°. On prouvera de la même manière, en faisant $q = 2$, que
 $\frac{dx}{x^3 \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$ dépendra de $\frac{dx}{x^2 \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$,
 de $\frac{dx}{x \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$,
 d'où il s'ensuit qu'elle dépendra des sections coniques, & de la diffé-
 rentielle $\frac{dx}{x \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$; & par conséquent il est facile
 de voir qu'en général $\frac{dx}{x^q \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$ dépend de la
 rectification des sections coniques, & de la différentielle
 $\frac{dx}{x \sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3)}}$. Or cette dernière différentielle ne
 peut se réduire, du moins par la méthode présente, à la rectification
 des sections coniques, parcequ'en faisant $q = 0$, on a $2q x^{-q-1} = 0$.
 Nous enseignerons dans le problème suivant, laquelle est la quadra-
 ture la plus simple à laquelle elle paroisse pouvoir se réduire.

C O R O L L. I.

II. Au reste il est bon de remarquer qu'il y a des cas où la différentielle $\frac{d x}{x^n \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$ se rapporte uniquement à la rectification des sections coniques. Ce sont les cas, où les coefficients a, b, c, f , & l'exposant n sont tels, que le coefficient qui affecte $\frac{d x}{x \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$ est $= 0$. Par exemple $\frac{d x}{x^3 \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & des intégrales de $\frac{3 b d x}{-2 a x^2 \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$ & de $\frac{3 c d x}{-2 a x \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$; or l'intégrale de $\frac{d x}{x^3 \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de $\frac{b d x}{-2 a x \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$, donc l'intégrale cherchée dépend de la rectification des sections coniques, & de $\left(\frac{3 b b}{4 a a} - \frac{3 c}{2 a} \right) \cdot \frac{d x}{x \sqrt{(a + b x + c x^2 + f x^3)}}$. D'où il s'ensuit que la différentielle proposée est absolument dépendante de la rectification des sections coniques, si $b b = 2 c a$.

On verra de même que $\frac{d x}{x^2 \sqrt{(a + c x^2 + f x^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, parceque $b = 0$, & ainsi des autres.

C O R O L L. II.

III. Si b & $c = 0$, c'est à dire si la différentielle proposée est $\frac{d x}{x^n \sqrt{(a + f x^3)}}$; En ce cas elle se réduira toujours à la rectification

des sections coniques. Car $\frac{dx}{x\sqrt{(a+fx^3)}}$ se change en une fraction rationnelle, en faisant $x^3 = u$ & $a + fu = z$; d'où il s'ensuit qu'elle s'intègre, ou par des arcs de cercle, ou par les logarithmes, c'est à dire, par des arcs de cercle, ou de parabole. Donc &c.

COROLL. III.

IV. De là il s'ensuit que la différentielle $x^{\pm p} dx. (a + bx^3)^{\pm \frac{n}{3}}$, dans laquelle p & n représentent des nombres entiers quelconques, se rapporte toujours à la rectification des sections coniques: car si on fait $a + bx^3 = z^3$, on aura une transformée de cette forme $\frac{z^{\pm q}}{z} dz (e + gz^3)^{\pm \frac{r}{3}}$, q & r marquant des nombres entiers positifs. Or cette dernière quantité se rapporte à la rectification des sections coniques, car 1°. si on a $a + \frac{r}{2}$, on multipliera le haut & le bas par $\sqrt{(e+gz^3)}$ & on aura une transformée, dont les différens termes seront de la forme $\frac{z^{\pm k}}{\sqrt{(e+gz^3)}} dz$, & par conséquent se rapportent à la rectification des sections coniques. 2°. Si on a $-\frac{r}{2}$, on pourra toujours réduire l'intégration de la différentielle proposée à celle de $\frac{z^{\pm k}}{\sqrt{(e+gz^3)}} dz$. Car la différentielle de $\frac{z}{(e+gz^3)^{\frac{m}{2}}}$ est $\frac{z^{s-1} dz}{(e+gz^3)^{\frac{m}{2}}} - \frac{3mgz^{s+1} dz}{2(e+gz^3)^{\frac{m+1}{2}}}$; d'où l'on voit qu'en général

l'intégration

L'intégration de $z^{\frac{+q}{2}} dz (e + g z^3)^{\frac{-r}{2}}$ dépend de celle de $z^{\frac{+q-3}{2}} dz (e + g z^3)^{\frac{-r}{2}}$ & ainsi de suite, & que par conséquent l'intégration de la différentielle proposée se réduit à celle de

$\frac{z^{\frac{+q}{2}} dz}{V(e + g z^3)}$. Or comme cette dernière se réduit à la rectification des sections coniques, il s'ensuit &c.

C O R O L L. IV.

V. De ce que $z^{\frac{+q}{2}} dz (e + g z^3)^{\frac{-r}{2}}$ se réduit à la rectification des sections coniques, il s'ensuit, en faisant $z = u^{\frac{1}{3}}$, que $u^{\frac{+q}{2}} du (m + p u^3)^{\frac{-r}{2}}$ s'y réduit aussi, n & r étant des nombres positifs & entiers.

C O R O L L. V.

VI. Il est donc évident, tant par ce que nous avons dit dans la seconde partie, que par les Coroll. précédens, qu'en général

$z^{\frac{q}{2}} dz (e + g z^3)^{\frac{m}{2}}$ se réduit à la rectification des sections coniques, m étant $= 2$ ou $= 3$; q étant égale à la moitié d'un nombre entier positif ou négatif, & n étant égale à la moitié d'un nombre entier positif ou négatif, ou même encore au tiers d'un nombre entier positif ou négatif, lorsque $m = 2$. Ou enfin, lorsqu'on a $m = 2$; $q =$ à un nombre entier positif ou négatif, & $n =$ au quart d'un nombre entier positif ou négatif. Or soit proposé d'intégrer $z^{\frac{p}{2}} dz (a + b z^3)^{\frac{r}{2}}$, & soit fait $a + b z^3 = u^2$, on aura pour transformée une quantité de cette forme $u^{\frac{p}{2} + \frac{r}{2} - 1} du (f + g u^3)^{\frac{p-1-r}{2}}$; d'où il

s'enfuit que la proposée est réductible à des arcs de sections coniques

1o. si $r = 2$, $2s + 1 = \pm \frac{n}{2}$ & $\frac{p+1-r}{r} = \pm \frac{q}{2}$ ou $\pm \frac{q}{3}$

n & q exprimant des nombres entiers. 2o. si $r = 3$, $3s + 2 = \pm \frac{n}{2}$,

& $\frac{p+1-r}{r} = \pm \frac{q}{2}$. 3o. si $r = 2$, $2s + 1 = \pm n$, & $\frac{p+1-r}{r}$

$= \pm \frac{q}{4}$.

PROBLEME II.

VII. Trouver l'intégrale de $\frac{dx}{x \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$.

On commencera par supposer $x = u^{-1}$, ce qui donnera pour transformée $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. Or je dis que l'intégration de cette dernière différentielle dépend de celle de $\frac{du \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ qui est l'élément d'un espace curviligne du 3e ordre, dont l'équation seroit $u y y = k + lu + mu^2 + nu^3$. Pour le démontrer, je suppose, qu'on ait à intégrer $\frac{du \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$; je mets d'abord cette quantité sous

la forme suivante $\frac{k du}{\sqrt{u} \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{l du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{mu du \sqrt{u} + nu^2 du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$, or de ces trois quantités la première se rapporte à des arcs de sections coniques, en faisant $u = z^{-1}$. De plus on trouvera que

$$\frac{nu^2 du \sqrt{u} + mu du \sqrt{u} + l du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = d \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{2} \right) \\ + \frac{l du \sqrt{u}}{2 \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{m}{4n} \cdot d(u^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}) \\ - \frac{m m du \sqrt{u}}{8n \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{m}{4n} \cdot \frac{k du \cdot u^{-\frac{1}{2}} - \frac{k n u}{m} du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}.$$

Or en faisant $u = z^{-1}$, on verra facilement que

$$\frac{k du \cdot u^{-\frac{1}{2}} - \frac{k n u}{m} du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} \text{ se rapporte à des arcs de sections coniques, d'où il s'ensuit que la différentielle } \frac{du \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$$

dépend de la rectification des sections coniques, & de $\left(\frac{l}{2} - \frac{m m}{8 n} \right)$

$$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}. \text{ Donc réciproquement } \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} \text{ dépend de } \frac{du \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}. \text{ Ce qu'il falloit trouver.}$$

REMARQUE 1^{re}.

VIII. Il n'y a qu'un seul cas où la démonstration précédente puisse souffrir quelque difficulté, c'est celui où $\frac{l}{2}$ sera égal à $\frac{m m}{8 n}$; car alors les deux différentielles $\frac{d \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ & $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$

$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ne dépendroient plus l'une de l'autre. Je feray voir dans la suite, qu'en ce cas, l'une & l'autre différentielle se rapporte à la rectification des sections coniques ; mais je me contenteray de faire voir pour le présent, que la différentielle

$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ peut se réduire à une autre qui dépende de la quadrature d'une courbe du 3^e ordre. Pour le démontrer, soient $au+b$, $cu+e$, $gu+f$, les trois racines de $k+lu+mu^2+nu^3$, dont deux peuvent être imaginaires ; la condition de $4ln=mm$, donnera $2baecgg+2bfccag+2faacge=bbccgg+aaeeeg+ffaacc$. Faisons maintenant $au+b=x$, la différentielle proposée se changera en

$$\frac{x dx - b dx}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-b)}} \cdot \left(\frac{cx - cb + ae}{a} \right) \cdot \left(\frac{gx - gb + af}{a} \right).$$

Or la seconde partie

$$\frac{-b dx}{\sqrt{x} \sqrt{(ax - ab)}} \cdot \left(\frac{cx - cb + ae}{a} \right) - \left(\frac{gx - gb + af}{a} \right),$$

s'integre par des arcs de sections coniques, en faisant $x=z$: à l'égard de la première partie, elle s'intégrera par le Probleme précédent, pourvu que $3ccggbb-2baecgg-2afccbg$ ne soit point $=aaeeeg-2aaegfc+aaffcc$. Or cette équation étant combinée avec l'équation $2baecgg+2bfccag+2faacge=bbccgg+aaeeeg+ffaacc$ donne $ccggbb-aebcgg-bccagf=0$, d'où l'on tire $cbg=0$, ou $cgb=ae g-ac f=0$ dans le 1^{er} cas on aura $k=0$ ou $n=0$, & la différentielle proposée se réduira à des logarithmes ou à des arcs de cercle, ou à des arcs de sections

sections coniques; dans le second cas on aura $egb = aeg + acf$ & $ggccbb + aaeegg + aaecff = 2ggbcae + 2ccafgb - 2aaegcf$; & cette équation étant combinée avec la première équation, qui résulte de la condition $4ln = mm$, on aura $aaegcf = 0$; donc a ou g ou e , ou c , ou $f = 0$, & par conséquent on a encore $k = 0$ ou $n = 0$ & la proposée se réduit à des logarithmes, ou à des arcs de cercle, ou à des arcs de sections coniques. Donc si $4ln = mm$, on pourra toujours réduire la différentielle proposée à la quadrature d'une courbe du 3. ordre, à moins que $3ccggbb - 2baecgg - 2faccbg$ ne soit $= aaeegg - 2aaefc + aaffcc$, auquel cas elle s'intégrera par des arcs de sections coniques, c'est à dire par des arcs, de cercle, ou de parabole, ou d'ellipse, ou d'hyperbole.

REMARQUE II.

IX. Je n'ai pu parvenir jusqu'à présent à m'assurer, si la différentielle $\frac{du Vu}{V(k+lu+mu^2+nu^3)}$ pouvoit en général se réduire à des arcs de sections coniques; mais j'ai trouvé un très grand nombre de cas où elle peut en effet s'y réduire, & je crois qu'il ne sera pas inutile d'en parler icy.

En premier lieu, je dis que si $4ln = mm$, la différentielle est toujours réductible à des arcs de sections coniques. Pour le démontrer, je remarque que suivant les calculs de l'art. 7 on a

$\int \frac{du Vu}{V(k+lu+mu^2+nu^3)}$ egal à une fraction dont le denominateur est $\frac{mm}{8n} - \frac{l}{2}$ & dont le numerateur est

$$\frac{\int du V(k+lu+mu^2+nu^3)}{Vu} + V' + \int \frac{\left(\frac{k-kn}{4m}\right) u^{-\frac{1}{2}} du + \frac{kmu}{4n} u^{-\frac{1}{2}} du}{V(k+lu+mu^2+nu^3)}$$

V' marquant une fonction finie de n , & lorsque $mm = 4ln$, le nu-

numérateur & le dénominateur de cette fraction deviennent égaux à zéro. Il faut donc pour avoir alors la valeur de cette fraction, en différentier le haut & le bas suivant les règles connues, en faisant varier une des quantités l, m, n , à volonté, par exemple l & faisant tout le reste constant. Or en faisant cette différentiation, on aura suivant

les règles connues des Geometres, la différence de $\frac{m}{8n} - \frac{l}{2} = -$

$$\frac{dl}{2} \text{ celle de } \int \frac{du \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}{\sqrt{u}} = dl$$

$\int \frac{du \sqrt{u}}{2 \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}$ celle de $V' = V'' dl$, V'' exprimant une fonction finie de u , & enfin celle du terme suivant $= -$

$$\frac{dl}{2} \int \frac{\frac{3}{4} k u^{\frac{1}{2}} du + \frac{k m}{4 n} u^{-\frac{1}{2}} du}{(k + lu + mu^2 + nu^3)^{\frac{3}{2}}} \text{ laquelle se réduira aisément}$$

à des arcs de sections coniques en faisant $u = z^{-1}$. On aura donc

$$\int \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} = \Phi dl + dl \int \frac{du \sqrt{u}}{2 \sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} - \frac{dl}{2},$$

Φ étant une quantité en partie intégrable, & en partie réductible.

des arcs de sections coniques donc $\int \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}} = \frac{\Phi}{2}$ donc &c. Ce q. f. D.

REMARQUE III.

X. Nous avons fait voir dans l'art. 8 que la différentielle

$$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} \text{ ou } \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)} \cdot \sqrt{(cu+e)} \cdot \sqrt{(gu+f)}}$$

se réduisoit à la différentielle

$$\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(ax-ab)} \cdot \sqrt{\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right)}}. \text{ Or la I}^{re}.$$

différentielle est réductible à des arcs de sections coniques (art. 8 & 9) lorsque $2baecgg + 2bfccag + 2faacge = bbbccgg + aaecgg + aaffcc \dots (A)$. Donc si on fait $-ab = b'$, $\frac{c}{a} = c'$,

$$-\frac{cb+ae}{a} = c', \frac{g}{a} = c', \frac{-gb+af}{a} = f', \text{ la II}^{de} \text{ \& la I}^{re},$$

différentielle se réduiront à des arcs de sections coniques, toutes les fois que $2b'a'e'c'g'g' + 2b'f'c'a'g'g' + 2f'a'a'c'g'e' = b'b'c'c'g'g' + a'a'e'c'g'g' + a'a'f'f'c'c'$; c'est à dire toutes les fois que $2baecgg + 2aefccg - 2aaecgfc = 3ccbbgg - aaecgg - aaffcc$.

De plus on a vu cy-dessus que $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k+nu^3)}}$ étoit toujours réductible à des arcs de sections coniques; d'où il s'ensuit que chacune des deux différentielles précédentes est réductible à des arcs de sections coniques toutes les fois que l'on a $-3cbg + aeg + afc = 0$ & $-3bbcg - 2aebg - 2afcb + aafe = 0$; ou $-3c'b'g' + a'e'g' + a'f'c' = 0$ & $-3b'b'c'g' - 2a'e'b'g' - 2a'f'c'b' + a'a'f'e' = 0$.

REMARQUE IV.

XI. On peut encore trouver beaucoup d'autres cas, où la différentielle

$$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)} \cdot \sqrt{(cu+e)} \cdot \sqrt{(gu+f)}} \text{ est réductible à}$$

K k 2

des

des arcs de sections coniques. Pour les déterminer, je me propose, au lieu de cette différentielle, celle-cy qui revient au même (art. 7)

$$\frac{dx \sqrt{x}}{x \sqrt{mx+n} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}, \text{ \& que j'écris ainsi}$$

$$\frac{-m dx}{n \sqrt{mx+n} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{\sqrt{mx+n} \cdot dx}{nx \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}$$

\& dont la première partie s'intègre par des arcs de sections coniques.

Pour intégrer la seconde, je fais $\frac{mx+n}{(a+bx+cx^2)} =$

$$\frac{1}{Bz + \frac{a}{n}}; \text{ je tire de cette équation } x = -\frac{b}{2c} + \frac{am}{2nc}$$

$$+ \frac{Bmz}{2c} \pm \sqrt{\frac{(nb-am)^2}{4nnc}} + \frac{Bmz(am-bn)}{2ncc} + \frac{BBmmz}{4cc};$$

$$+ \frac{nBz}{c}$$

substituant une de ces valeurs de x dans la différence proposée, \& multipliant le haut \& le bas de la fraction par l'autre valeur de x , on aura une transformée, dont une partie des termes s'intégrera par des arcs de sections coniques, \& l'autre se réduira à l'intégration de la différentielle suivante

$$\frac{(bn-am) dz}{\frac{nBz}{c} \sqrt{(Bz + \frac{a}{n}) \sqrt{\frac{(bn-am)^2 + 2Bmz(am-bn) + 4n^3cBz + BBmmnzz}{4nnc}}}}$$

Je suppose pour abréger $B = m'$, $\frac{a}{n} = n'$, $\frac{(bn-am)^2}{4nnc} = a'$,

$$\frac{2mm'n(am-bn) + 4n^3cm'}{4nnc} = b', \frac{m'm'mmn}{4nnc} = c'; \text{ \& il}$$

est



est evident que la differentielle proposée $\frac{d x}{x \sqrt{m x+n} . \sqrt{a+b x+c x x}}$

se réduira à la differentielle $\frac{d z}{z \sqrt{m' z+n'} . \sqrt{a'+b' z+c' z z}}$.

De même en faisant $\frac{a'}{n'} = n'', \frac{(b' n' - a' m')^2}{4 n' n' c' c'} = a'$ &c.

cette dernière differentielle se reduira à la differentielle

$\frac{d z}{z \sqrt{m'' z+n''} . \sqrt{a''+b'' z+c'' z z}}$; & ainsy de suite; d'où il

résulte que la differentielle proposée sera intégrable par des arcs de sections coniques, toutes les fois qu'une des differentielles transformées le sera.

Or 1^o. les differentielles transformées seront réductibles à des arcs de sections coniques, toutes les fois que a', a'', a''' &c. seront égaux à zero. Ainsy pour avoir les cas où la proposée est réductible à des arcs de sections coniques, il faut d'abord supposer $a' = 0$, c'est à dire $b n - a m = n$, ensuite $b' n' - a' m' = 0$, & substituer dans cette dernière équation les valeurs de b', n', a', m' en m, n, a, b, c , ce qui donnera une nouvelle équation: pour en avoir une troisième, en substituant dans cette dernière m' , ou sa valeur à la place de m , n' à la place de n , a' à la place de a &c. Ainsy pour avoir en général toutes les équations que ce cas peut fournir, il faudra prendre pour première équation $a = 0$; d'où l'on tirera une seconde équation en mettant $(b n - a m)^2$ au lieu de a ; & cette seconde en donnera untroisième,

en y substituant $(b n - a m)^2$ au lieu de a , $\frac{a}{n}$ au lieu de n , m' à la place de m (& cette dernière quantité disparaîtra toujours) $m' m' m m$ à la place de c & $2 m' m n (a m - b n) + 4 n n c m'$ à la place de b . &c.

II^o. La differentielle transformée $\frac{d z}{z \sqrt{2 m'+n'} . \sqrt{a'+b' z+c' z z}}$

est réductible à des arcs de sections coniques, lorsque le produit de $m'z + n'$ par $a' + b'z + c'zz$ n'a que deux termes $A + Bz^3$ ce qui donne deux équations entre les coefficients m', n', a', b', c' , & ces deux équations en donneront plusieurs autres, en substituant au lieu de m', n', a', b', c' , leurs valeurs, comme on a fait dans l'art. précédent.

III°. La transformée est intégrable par des logarithmes, ou des arcs de cercle, lorsque le produit de $m'z + n'$ par $a' + b'z + c'zz$ a deux racines égales, & cette condition fournit encore de nouvelles équations.

IV°. Enfin si on fait $z = u^{-1}$ on trouvera encore (art. 10) d'autres cas où la transformée sera intégrable, & d'où l'on tirera encore des équations de condition entre les coefficients a, b, c &c.

REMARQUE V.

XII. Reciproquement, si la différentielle proposée est intégrable par des arcs de sections coniques, toutes les transformées le seront aussi; de sorte que si on a une différentielle

$$\frac{dx}{x \sqrt{(Mx+N)} \cdot \sqrt{(A+Bx+Cxx)}}, \text{ \& qu'on fasse } \frac{a}{n} = N,$$

$$\frac{(bn-am)^2}{4n^2c^2} = A, \frac{2mMn(am-n^2) + 4n^3cM}{4n^2c^2} = B,$$

$$\frac{m^2M^2n^2}{4n^2c^2} = C, \text{ l'intégration de la différentielle proposée se re-}$$

duira à celle de la différentielle $\frac{dx}{x \sqrt{(mx+n)} \cdot \sqrt{(a+bx+cxx)}}$
c'est à dire de la différentielle

$$\frac{dx}{x \sqrt{\left(\frac{n}{B-2\sqrt{CA}} + \frac{2nx\sqrt{C}}{B-2\sqrt{CA}}\right)} \sqrt{\left(\frac{N\sqrt{C}+M\sqrt{A}}{B-2\sqrt{CA}} + \frac{nMxx}{B-2\sqrt{CA}}\right)}};$$

ainsi la différentielle proposée sera intégrable toutes les fois que cette dernière

dernière le fera ; ce qui donnera encore de nouvelles équations de condition entre les coefficients A, B, C, M, N ; & chacune de ces équations en donnera plusieurs autres, en substituant successivement n à la place de N , $\frac{2n\sqrt{C}}{B-2\sqrt{CA}}$ à la place de M , nN à la place de A &c.

REMARQUE VI.

XIII. On voit par là qu'en combinant ensemble les différentes

transformations dont la différentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)} \cdot \sqrt{(a+bx+xx)}}$ est susceptible, & les différens cas dans lesquels cette différentielle ou ses trans formées sont réductibles à des arcs de sections coniques, on trouvera un grand nombre d'équations de condition entre les coefficients a, b, c, m, n ; qui rendront la différentielle intégrable par des arcs de sections coniques ; & si la proposée étoit donnée sous la forme $\frac{dx}{x\sqrt{(p+qx+rx^2+sx^3)}}$. Il faudroit mettre dans les équations de condition, au lieu de m, n, a , &c. leurs valeurs en p, q, r , &c. qu'on trouveroit facilement. Mais en voilà assez sur cette recherche, que je laisse à d'autres à pousser plus loin.

REMARQUE VII.

14. De plus si $a \pm bx + cx^2$ a ses racines imaginaires, ce qui n'arrivera que quand a & c seront positifs & que b^2 sera $< 4ac$ on pourra toujours transformer la différentielle proposée en d'autres de même forme, & dans les quelles les racines du binôme seront réelles.

Pour cela il suffira de supposer $x \pm \frac{b}{2c} = z$ & $z + \sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})} = e$; ou (si on a $-bx$ & que $\frac{b}{2c}$ soit $> x$) $\frac{b}{2c} - x = z$ & $\sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})}$

& $V\left(zz + \frac{a}{c} - \frac{b}{4cc}\right) - z = u$. Ainsi quand je diray dans la suite qu'une différentielle est réductible à la quadrature des courbes du III^e ordre, j'entendray toujours les courbes qui ont pour équation $xyy = p + qx + rx^2 + sx^3$, le second membre ayant toutes les racines réelles.

PROBLEME III.

XV. Trouver l'intégrale de $(Kx+c)^p \cdot (f+gx)^{\frac{n}{2}} dx (a+bx+cx^2)^{\frac{m}{2}}$
p, n, m, exprimant des nombres entiers positifs ou négatifs.

I^o. Si *p* est un nombre entier négatif, on pourra toujours (en faisant $f + gx = z$) changer la proposée en une quantité dont cha-

que terme aura cette forme $\frac{qz^k dz}{(hz+c)^p \cdot z^{\frac{r}{2}} (a+bx+\delta x^2)^{\frac{s}{2}}}$;

on divisera z^k par $(bz+c)^p$ tant que cela se pourra faire, & chacune des parties du quotient étant multipliée par $\frac{dz}{z^{\frac{r}{2}} (a+bx+\delta x^2)^{\frac{s}{2}}}$

s'intégrera par des arcs de sections coniques.

II^o. Lors qu'on sera enfin parvenu à avoir $k < p$, on commencera par mettre la quantité restante sous cette forme,

$$\frac{qz^k \cdot z^{\frac{s}{2}} dz}{(hz+c)^p \cdot z^{\frac{r+s}{2}} (a+bx+\delta x^2)^{\frac{s}{2}}} \text{ \& ensuite sous celle-cy}$$

$$\frac{Pdz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{(hz+c)^p (a+bx+\delta x^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{Qdz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{z^{\frac{r+s}{2}} (a+bx+\delta x^2)^{\frac{s}{2}}} \quad \text{P \& Q}$$

P & Q étant des fonctions de z , rationnelles & sans diviseur. Cela posé, on remarquera que la II^{de}. de ces deux quantités s'intègre par des arcs de sections coniques, à l'égard de la I^{re}, on supposera

$\frac{z}{a + bz + dz^2} = \frac{1}{y}$ d'où l'on tire $z = Ay + B \pm \sqrt{(G + (Ay + B)^2)(& bz + c = bAy + bB + c \pm b\sqrt{G + (Ay + B)^2})}$. substituant ces valeurs, & multipliant le haut & le bas de tous les termes par $bAy + bB + c \pm b\sqrt{G + (Ay + B)^2}$ on aura une transformée, dont les termes les plus difficiles à intégrer seront de cette

forme $\frac{y^{\frac{n}{2}} dy}{(Ky + H)^p \sqrt{(M + Ny + Ryy)}}$, qu'on peut toujours

réduire à la forme $\frac{u^{\frac{q}{2}} du}{(Pu + L)^p \sqrt{(D + Fu + Gu^2)}}$, q étant

un nombre entier positif, parceque si n est négatif, il n'y a qu'à faire $y = u^{-1}$ & qu'on aura pour transformée

$\frac{R u^{\frac{n}{2} - 1 + p} du}{(Ps + L)^p \sqrt{(D + Fu + Gu^2)}}$.

Pour trouver maintenant l'intégrale de

$\frac{y^{\frac{n}{2}} dy}{(Ky + H)^p \sqrt{(M + Ny + Ryy)}}$, n & p étant des nombres entiers positifs, je suppose $Ky + H = s$ pour avoir une transformée de

cette forme, $\frac{dt \cdot (\gamma t + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}}{t^p V(\mu + \nu t + \omega t^2)}$ qui pourra encore être dé-

veloppée en differens termes de la forme $\frac{t^{\pm q} dt V(\gamma t + \varepsilon)}{V(\mu + \nu t + \omega t^2)}$.

Or 1o. si on a t^q , l'integrale n'a aucune difficulté, & se réduit à des arcs de sections coniques. 2o. Si q est negatif, on multipliera le haut & le bas par $V(\gamma t + \varepsilon)$ pour avoir deux differentielles de cette forme,

$\frac{dt}{t^k V(a + bt + ct^2 + t^3)}$ qui (art. 1. & suiv.) se réduiront à la quadrature d'une courbe du III^e. ordre.

C O R O L L. I.

XVI. Donc le produit de $(f + gx)^{\frac{n}{2}} dx \cdot (a + bx + cxx)^{\frac{m}{2}}$ (n & m étant des nombres entiers positifs ou negatifs) par une fonction rationnelle quelconque de x , pourra s'integrer par le Problème precedent, pourvuque l'on puisse partager le dénominateur de la fonction (si elle est une fraction) en des quantités simples $(x + b)^p$, p étant un nombre entier quelconque, c'est à dire, pourvu que le dénominateur de la fonction, s'il y en a un, ait toutes ses racines réelles.

C O R O L L. II.

XVII. Donc on pourra integrer encore par le Probleme precedent le produit de $dx (e + fx)^{\frac{n}{2}} \cdot (g + kx)^{\frac{m}{2}} \cdot (a + bx + cxx)^{\frac{s}{2}}$ par une fonction rationnelle de x , qui ait les conditions marquées dans l'art. 16. Pour le bien voir, il n'y a qu'à écrire $(g + kx)^{\frac{m+n}{2}} (e + f$

$\left(\frac{e+fx}{g+kx}\right)^{\frac{n}{2}}$ au lieu de $(e+fx)^{\frac{n}{2}} (g+fx)^{\frac{m}{2}}$ & supposer en suite

$$\frac{e+fx}{g+kx} = z.$$

COROLL. III.

XVIII. Le produit d'une fonction rationnelle de x , qui ait toujours les mêmes conditions, par $dx (a+bx+cx^2)^{\pm \frac{n}{2}}$ peut toujours se développer en divers termes de cette forme

$$\frac{K x^q dx}{(lx+n)^r (a+bx+cx^2)^{\frac{q+s}{2}} \left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{Q dx}{(lx+n)^r \left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2}\right)^{\frac{s}{2}}} + \frac{P dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q+s}{2}} \left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2}\right)^{\frac{s}{2}}}, \text{ P \& Q étant}$$

des fonctions de x rationnelles & sans diviseur.

$$\text{Or si on fait } \frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2} = \phi + \frac{gx+\delta}{a+bx+cx^2}$$

$= \phi + \frac{1}{z}$, qu'on tire de la deux valeurs de x en z , & qu'après avoir substitué l'une de ces valeurs dans la différentielle donnée, on multiplie le haut & le bas par les valeurs de $(lx+n)^r$ & de $(a+bx+cx^2)$ ou $(\gamma x + \delta) z$ qui résulteroient de l'autre valeur de x , on aura une transformée, dont les différentes parties seront intégrables par le Corol. precedent.

REMARQUE I.

XIX. Il est presque inutile d'avertir qu'il y aura des cas, où par la destruction mutuelle des coefficients, les différentielles se réduiront à des arcs de sections coniques. On peut même démontrer qu'elles s'y réduiront toujours, lorsque la différentielle proposée fera

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}; \text{ \& comme la démon-}$$

stration que nous avons à en donner, est assez singulière, nous croyons devoir l'exposer icy avec quelque étendue. Supposons d'abord que l'un des deux facteurs du dénominateur, par exemple $(a+bx+cx^2)$ ait ses racines réelles, comme $mx+n$, $rx+p$, il est certain

qu'en faisant $mx+n=z$ & $z=u^{-1}$, la différentielle proposée se

$$\text{changera en une autre de cette forme } \frac{q+s-2}{u} \frac{du}{(Au+B)^{\frac{q}{2}} (C+Du+Eu)^{\frac{s}{2}}}$$

qui sera réductible à des arcs de sections coniques.

$$\text{Or si l'on fait } \frac{e+fx+gxx}{a+bx+cx^2} = \phi + \frac{\gamma x + \delta}{a+bx+cx^2}$$

$$= \phi + \frac{1}{z} = \phi + \frac{u}{m} \text{ on verra facilement par la methode du}$$

Corol. précédent que la différentielle proposée se réduira à l'intégration de la différentielle

$$\frac{du}{u \sqrt{(\phi + \frac{u}{m}) \sqrt{(\frac{\gamma^2 m^2}{bb-4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mnu}{bb-4ac} + u^2)}}$$

ou à la rectification des sections coniques, si le coefficient qui doit affecter cette dernière différentielle, est $= 0$.

Cela

Cela posé, 1o. si ce coefficient est égal à zero, il le sera toujours, soit que $a + bx + cxx$ ait ses racines réelles, ou non : car la condition que $a + bx + cxx$ ait ses racines réelles, n'empporte aucune équation entre les coefficients a, b, c , mais seulement la condition que $bb > 4ac$, donc si le coefficient est $= 0$ dans le cas des racines réelles, cela ne vient point de ce que les coefficients ont entr'eux un certain rapport, mais de ce qu'ils se détruisent mutuellement dans le coefficient. Donc ils se détruiront également, quand $a + bx + cxx$ aura ses racines imaginaires : donc la différentielle proposée sera intégrable dans ce 1er. cas par des arcs de sections coniques, soit que les racines de $a + bx + cxx$ soient réelles, ou non.

2o. Si le coefficient de la différentielle n'est pas $= 0$, alors il sera toujours possible de réduire la différentielle . . .

$$\frac{du}{dx} = \frac{V(\Phi + \frac{u}{m}) \cdot V(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + m^2)}{(a + bx + cxx)^{\frac{\gamma}{2}} \cdot (e + fx + gxx)^{\frac{\delta}{2}}}$$

à la rectification des sections coniques, & à l'intégration de la différentielle . . .

ayant ses racines réelles, c'est à dire, qu'on pourra toujours réduire à la rectification des sections coniques toute différentielle

$$\frac{du}{dx} = \frac{V(\Phi + \frac{u}{m}) \cdot V(\alpha + \delta u + uu)}{\alpha \text{ etant positif. [Il n'y auroit$$

qu'un cas qui pût faire de la difficulté ; ce seroit celui où le coefficient de la différentielle

$$\frac{du}{dx} = \frac{V(\Phi + \frac{u}{m}) \cdot V(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + u^2)}{\text{seroit égal à zero, en vertu d'un certain rapport entre les coefficients } a, b, c,}$$

γ, δ : mais alors on prouveroit que la différentielle se réduiroit encore à des arcs de sections coniques, par une methode parfaitement semblable à celle par laquelle on a prouvé dans l'art. 9. cy-dessus que

$\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(k + lu + mu^2 + nu^3)}}$ se réduiroit à des arcs de sections coniques, lorsque $4ln = mm.$

III. Si la différentielle étoit $\frac{du}{u \sqrt{(\phi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(\pm A + Bu - uu)}}$

on commenceroit par supposer cette différentielle

$$= - \frac{du}{m \phi \sqrt{(\phi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(-A + Bu - uu)}} + \frac{du \sqrt{(\phi + \frac{u}{m})}}{\phi u \sqrt{(-A + Bu - uu^2)}}$$

dont la 1^{re}. partie s'integre par des arcs de sections coniques, & dont

la 2^e. se réduit (en faisant $\phi + \frac{u}{m} = \frac{1}{Bz + \frac{A}{\phi}}$) à des

arcs de sections coniques, & à l'integration de la différentielle

$$\frac{dz}{z \sqrt{(Bz + \frac{A}{\phi})} \cdot \sqrt{(\alpha + \beta z + \gamma z^2)}}$$

(art. 11). Or cette dernière différentielle se réduit (n. 2. art. pres.) à des arcs de sections coniques. Donc la différentielle

$$\frac{du}{u \sqrt{(\phi + \frac{u}{m})} \cdot \sqrt{(\pm A + Bu - uu)}}$$

s'y réduira aussi.

IV. Or lorsque $a + bx + cx^2$ a ses racines imaginaires, c'est à dire, lorsque $bb < 4ac$, la différentielle

dx

$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ se réduit à la différentielle

$$\frac{du}{u \sqrt{\left(\phi + \frac{u}{m}\right) \cdot V\left(\frac{\gamma^2 m^2}{4ac - bb} - \frac{2b\gamma mu + 4c\delta mu}{4ac - bb} - u^2\right)}}$$

c'est à dire $\frac{du}{u \sqrt{\left(\phi + \frac{u}{m}\right) \cdot V(\pm A + Bu - u^2)}}$. Donc la différen-

tielle proposée se réduira à des arcs de sections coniques, même dans le cas où $a + bx + cxx$ aura ses racines imaginaires. C. q. f. D.

REMARQUE II.

XX. Nous avons fait voir dans la seconde partie que lorsque $a + bx + cxx$ a ses racines réelles, la différentielle

$\frac{(lx+n)^p dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q}{2}} (e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ se réduit à des arcs de sections coniques, pourvu que $q + s - 2 - p$ ne soit pas < 0 . Or on prouvera de la même manière que dans l'article précédent, que cette même différentielle se réduit à des arcs de sections coniques, lorsque $a + bx + cxx$ a ses racines imaginaires.

REMARQUE III.

XXI. De plus, il est bon d'observer que si le coefficient qui affecte la différentielle

$$\frac{du}{u \sqrt{\left(\phi + \frac{u}{m}\right) \cdot V\left(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + u^2\right)}}$$

n'est pas égal à zero, on pourra, suivant la démonstration donnée dans

dans l'art. 19, réduire toujours à des arcs de sections coniques la différentielle $\frac{d u}{u \sqrt{(A u + C) \cdot \sqrt{(B + G u + H u u)}}$, A, C, B, G, H étant des quantités constantes quelconques ; & ainsi toutes les quantités que nous avons appris à réduire à la quadrature des courbes du III. ordre, se réduiroient à des arcs de sections coniques. Mais comme on ne peut s'assurer que par un calcul très pénible, si le coefficient dont il s'agit est égal à zero, ou s'il ne l'est pas ? nous abandonnons cette recherche à d'autres, nous contentant d'indiquer icy l'utilité qu'on en pourroit tirer.

PROBLEME IV.

XXII. *Trouver la quadrature de toutes les courbes du 3. ordre.*

Une courbe quelconque du 3. ordre étant donnée avec son équation rapportée à un axe quelconqué, on commencera par changer les coordonnées, de manière que son équation devienne une des quatre que M. *Newton* a assignées pour toutes les lignes de cet ordre ; & on aura pour l'élément de l'aire, $p y d x$, en supposant que p soit le sinus des ordonnées y avec les abscisses x , en prenant y & x pour les coordonnées nouvelles. Or l'intégrale de $p y d x$ étant trouvée il n'y aura plus que des espaces rectilignes à ajouter ou à soustraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives : toute la difficulté se réduit donc à trouver l'intégrale de $y d x$ dans les quatre équations de M. *Newton*. Or la I^{re}. de ces équations donne $y d x =$

$$-\frac{e d x}{2 x} \pm \frac{d x}{2 x} \cdot \sqrt{(4 a x^4 + 4 b x^3 + 4 c x^2 + 4 d x + e e)}$$

qui s'intègre par l'art. 18. La II^{de}. & la III^{de}. donnent $y d x \cdot x = \frac{d x}{x}$ $(a x^3 + b x^2 + c x + d)$ & $y d x = (a x^3 + b x^2 + c x + d) d x$; ce qui n'a aucune difficulté.

Enfin la IV. donne $y d x \&c. = d x \sqrt{(a + b x + c x^2 + e x^3)}$ qui s'intègre par des arcs de sections coniques.

Done

Donc toutes les lignes du 3^e. ordre sont quarrables, ou absolument, ou par logarithmes, ou par des arcs de sections coniques, ou enfin par la quadrature de la courbe, qui a pour équation $x^p y' y = a + bx + cx^2 + fx^3$, le II. membre ayant toutes ses racines réelles.

COROLLAIRE.

XXIII. Si on propose d'intégrer $(bx + l)^p dx (a + bx + cx^2 + ex^3)^{\frac{n}{3}}$, p étant un nombre entier positif, & n un nombre entier, cette différentielle sera toujours intégrable par la quadrature d'une courbe du III^e. ordre. Car soit $x = qu + ry + a'$ & $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + ex^3)} = b' + ku + my$, a', b', k, m, r, q , étant des constantes indéterminées, il est certain qu'on aura une transformée en u & en y , qu'on pourra toujours réduire à l'une des 4 équations de M. Newton, puisque $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + ex^3)}$ est l'ordonnée d'une courbe du III^e. ordre dont x est l'abscisse. On aura donc une valeur de x en u ou en y , qui étant substituée dans la différentielle proposée, la rendra intégrable par l'art. 18.

Si l étoit $= 0$, & que p fut négatif, on pourroit encore se servir alors de la même méthode, pourvu que $p - 2 + n$ ne fut pas plus petit que zéro.

On pourra de même réduire à la quadrature d'une courbe du III^e. ordre $(bx + l)^p dx Y^n$, Y étant l'ordonnée d'une courbe quelconque du III^e. ordre, & n, p , des nombres entiers positifs.

REMARQUE I.

XXIV. Il y a encore d'autres différentielles plus compliquées, qu'on peut, du moins en certains cas, réduire à la quadrature des courbes du III^e. ordre. Par exemple si on a la différentielle $P dx$.

$(a + bx + cxx)^{\frac{1}{2}} \cdot (e + fx + gxx)^{\frac{1}{2}}$, Pour une fonction rationnelle de x , on pourra toujours, en suivant la méthode de l'art. 18. réduire cette différentielle en différens termes, dont les plus compliqués seront de la forme

$$\frac{x^k dx}{(xz + px + q)^r} \cdot \frac{Vz}{V(\alpha + \beta z + \delta z^2)}. \text{ Or faisant } \frac{z}{V(\alpha + \beta z + \delta z^2)} = -\frac{1}{u}$$

$$\text{on aura } z^2 + pz + q = zu - \frac{\beta z}{\delta} + pz - \frac{\alpha}{\delta} + q; \& z = \frac{u - \beta}{2\delta} \pm V(-\frac{\alpha}{\delta} + \frac{(u - \beta)^2}{4\delta^2}). \text{ D'où l'on conclura aisément que}$$

si $q = \frac{\alpha}{\delta}$, la proposée est réductible à la quadrature d'une courbe du III^e. ordre, parcequ'on peut alors réduire $zu - \frac{\beta z}{\delta} + pz$ en diviseurs simples z , & $u - \frac{\beta}{\delta} + p$.

REMARQUE II.

XXV. Toutes les différentielles que nous avons appris à intégrer dans les trois différentes parties de ces recherches, soit par logarithmes, soit par des arcs de sections coniques, soit enfin par la quadrature des courbes du III^e. ordre, pourroient encore s'intégrer par les mêmes méthodes, si on y substituoit $x^{n-1} dx$ au lieu de dx , & x^n au lieu de x .



QUATRIÈME PARTIE

METHODES POUR INTEGRER QUELQUES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES.

Je supposerai toujours dans les propositions suivantes $z = \frac{dx}{dy}$,
 $u = \frac{dz}{dy}$, ou $\frac{d^2x}{dy^2}$, $k = \frac{du}{dy}$ ou $\frac{d^3x}{dy^3}$ &c.

PROBLÈME I.

XXVI. Trouver l'intégrale d'une équation différentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de dx & de dy , & dans laquelle x & y se trouvent, pourvu qu'ils ne soient ny multipliés ou divisés l'un par l'autre, ny élevés à aucune puissance plus grande que l'unité.

Il est visible que ces sortes d'équations pourront toujours être représentées par la formule $x = y \phi z + \Delta z$, ϕz & Δz marquant des fonctions quelconques de z , c'est à dire de $\frac{dx}{dy}$. Or différentiant cette formule, & mettant pour dx sa valeur $z dy$ on aura $z dy = d y \phi z + y d(\phi z) + d(\Delta z)$ équation; d'où l'on tirera facilement la valeur de y en z , & par conséquent aussi celle de x , puisque $x = \int z dy$.

COROLL. I.

XXVII. On prouvera de la même manière que l'on peut intégrer toute équation réductible à la forme $z = y \phi u + \Delta u$, ou $u = y \phi k + \Delta k$ &c. d'où il s'ensuit qu'en général toute équation qui renfermera y & $d^n x$ lineaires, avec telle fonction qu'on voudra de $d^{n+1} x$ & de dy , sera intégrable par la méthode du présent problème.



C O R O L L. I.

XXVIII. Si $x = y \phi z$, c'est le cas des équations homogenes connu depuis longtems.

Si $x = y z + \Delta z$, l'équation appartient alors en même tems à une ligne droite, & à une ligne courbe. Car la differentiation donne $(y + \Gamma z) dz = 0$, d'où l'on tire, ou bien $dz = 0$ qui appartient à une ligne droite, ou $y = -\Gamma z$ qui est à une ligne courbe.

On peut aussi observer en passant que l'équation dx

+ $\frac{ax + by + c}{gx + hy + f} dy = 0$, sur laquelle plusieurs Geometres se sont exercés, est un cas particulier de notre Problème.

P R O B L E M E II.

XXIX. Trouver les conditions d'integrabilité de l'équation $x^m y^n z^r = \phi(x^q y^s z^t)$ dans laquelle m, n, r, q, s, t , marquent des nombres quelconques, & $\phi(x^q y^s z^t)$ une fonction quelconque de $x^q y^s z^t$.

On supposera $x^q y^s z^t = u$, ce qui donnera $x = u^{\frac{1-s-t}{q}} y^{\frac{1-s}{q}} z^{\frac{1-t}{q}}$
 & $x = (\phi u)^{\frac{1}{m}} y^{\frac{1-n}{m}} z^{\frac{1-r}{m}}$; d'où l'on tire $y = (\phi u)^{\frac{q}{qn-ms}}$
 $u^{\frac{-m}{qn-ms}} z^{\frac{-rq+tm}{nq-ms}}$ & $x = (\phi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}}$
 $z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}}$

: or $dx = z dy$. C'est pourquoy si on substitué les valeurs de dx & de dy dans cette dernière équation, on trouvera qu'elle est integrable dans tous les cas suivans, sçavoir I. $t m - r q = 0$.
 II.

II. $rs - nt = 0$. III. $1 + \frac{tm - rq}{nq - ms} = \frac{rs - nt}{nq - ms}$; c'est à dire
 $nq - ms + tm - rq = rs - nt$.

S C O L I E I.

XXX. Il est à remarquer qu'on ne retrouveroit que les mêmes équations de condition, soit qu'on tirât de l'équation différentielle donnée, les valeurs de y & de z , ou de x & de z .

De plus on observera que la I^{re}. équation $tm - rq = 0$, donne $x^m z^n = \phi(y^s x^p z^r)$ & qu'ainsi on a $x^m z^n = \Delta y^s$ ce qui donne une équation facile à intégrer. Mais la Methode que nous proposons icy, a cet avantage, qu'elle donne le moyen d'intégrer ces sortes d'équations différentielles, sans chercher la valeur de $x^m z^n$ en y , ce qui seroit souvent impossible de trouver. Il en est de même du cas où $rs - nt = 0$, qui donne $y^n z^r$ égale à une fonction de x .

S C O L I E II.

XXXI. Si $nq - ms = 0$, on aura pour lors $x = u^{\frac{1-s-r}{q}} y^{\frac{1-s}{q}} z^{\frac{1-r}{q}}$ &
 $\frac{m}{q} x^{\frac{m}{q}} y^{\frac{1-s}{q}} z^{\frac{1-r}{q}} = \phi(u)$; & l'équation proposée sera intégrable dans le cas où $-s = q$ & $n = -m$, ce qui revient au cas des équations homogenes.

S C O L I E III.

XXXII. Si on fait $t = 0$, $r = 1$, on aura au lieu de la III. équation de condition $nq - ms = q + s$. Donc toute équation de cette forme $dx = x^p y^q dy \phi(x^q y^s)$ sera intégrable si $-sq + ps = q + s$.

Mm 3

Par

Par exemple l'équation $ax = \frac{a x}{y} dy \phi(x^q y^s)$ est intégrable, parceque $-sq + ps = q + s$; de même l'équation $dx = dy \frac{\phi(xy)}{s+1}$; & ainsi de plusieurs autres; le cas des équations homogènes est renfermé dans l'équation générale $-sq + qs = q + s$.

SCOLIE IV.

XXXIII. On peut déterminer par là les conditions d'intégrabilité de l'équation $dx = a x^m y^n dy + p x^e y^h dy + f x^g y^l dy + \&c.$ car soit $x^b y^a = u$, a & b étant deux indéterminées, on aura une transformée intégrable, toutes les fois que l'on aura $-\frac{a}{b} - 1 = -\frac{m a}{b} + n = -\frac{e a}{b} + h = -\frac{g a}{b} + l$ &c. c'est à dire lorsque l'on aura $\frac{n+1}{m-1} = \frac{h+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

SCOLIE V.

XXXIV. Si dans toutes les équations précédentes, on met $\frac{d^{\frac{n}{n}} x}{d y}$ au lieu de x , & $\frac{d^{\frac{n+1}{n}} x}{d y}$ au lieu de z ou $\frac{dx}{dy}$, elles seront encore intégrables dans les mêmes cas qui ont été déterminés art. 29 & suiv.

PROBLEME III.

XXXV. Trouver les conditions d'intégrabilité de l'équation $x = y^k z^r \phi(y^p z^n) + \Delta(y^p z^n)$.

I. Soit $y^p z^n = u$, on aura $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$ & $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$; & enfin $y^k z^r = u^{\frac{k-rp}{n}}$; d'où l'on voit que la proposée sera intégrable si $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{pr}{n}$.

II. Si on fait encore $y^p z^n = v$, on aura $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$; d'où l'on voit que l'équation proposée sera intégrable, si $-\frac{n}{p} + 1 = \frac{nk}{p} + r$; ce qui revient à la condition précédente.

SCOLIE I.

XXXVI. Si l'on avoit $x = y^k z^r \phi(y^p z^n) + y^{k'} z^{r'} \Delta(y^{p'} z^{n'}) + y^{k''} z^{r''} \Gamma(y^{p''} z^{n''})$ &c. on trouveroit que cette équation seroit intégrable, lorsque l'on auroit $\frac{p}{n} \Rightarrow \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien lorsque k' & r' , ou k'' & r'' &c. seroient égaux à zero.

SCOLIE II.

XXXVII. Si au lieu de x on met $\frac{d^n x}{dy^{n+1}}$, & au lieu de z , d^{n+1}

$\frac{d}{n+1} z$ dans les équations précédentes, elles feront encore intégrables dans les mêmes conditions.

PROBLEME II.

XXXVIII. Trouver l'intégrale de l'équation $x + Z + a = yz \frac{dz}{dZ} + \frac{z}{2} \frac{dZ}{dz}$ (a marquant une constante & Z une fonction de z).

Je ne donne icy la solution de ce probleme, que parce qu'elle me conduira à des formules plus générales. On mettra donc l'équation proposée sous la forme suivante $x - yz + Z + a = (y - \frac{dZ}{dz})$

$\frac{z}{2} \frac{dZ}{dz}$; d'où l'on tire $(y - \frac{dZ}{dz}) \cdot V \frac{z}{2} \frac{dZ}{dz} = V(x - yz + Z + a)$ or on a $dx - z dy = 0$ & par conséquent $dx - z dy - y dz + dZ + y dz - dZ = 0$; & par conséquent $\frac{dx - z dy - y dz + dZ}{V(x - yz + Z + a)} =$

$\frac{-dz (y - \frac{dZ}{dz})}{(y - \frac{dZ}{dz}) V \frac{z}{2} \frac{dZ}{dz}}$; dont l'intégrale est $V(x - yz + Z + a) =$

$\frac{1}{2} \int -dz V \frac{2}{z} \frac{dZ}{dz}$; cette équation combinée avec l'équation donnée, on en tirera la valeur de x ou de y en z, & ensuite l'équation $dx = z dy$, donnera la valeur de y ou de x en z.

SCOLIE I.

XXXIX. Si on divise le premier membre $dx - z dy - y dz + dZ$ de l'équation différentielle par $\Phi(x - yz + Z + a)$, & le second mem

membre $y dz - dz$ par la même quantité, on verra facilement que ce second membre, & par conséquent l'équation, est intégrable, si $\frac{y dz - dz}{\Phi(x - yz + Z + a)}$ est égal à $dz \Delta z$; donc on pourra intégrer toutes les équations dans lesquelles $x - yz + Z + a$ est égale à une fonction de $(y - \frac{dz}{dz}) \cdot \Gamma z$.

Si on fait $Z = 0$, on aura $x - yz = \Phi(y \Delta z)$, équation qui renferme comme un cas particulier le problème proposé par Mons. Bernoulli en 1692, qui consistoit à trouver des courbes dans lesquelles la recte $x - yz$ fût en raison donnée avec la tangente $y \sqrt{(zz+1)}$.

SCOLIE II.

XL. Nous remarquerons icy en passant à l'occasion de ce dernier problème, que si on proposoit de trouver des courbes, dans lesquelles la recte fut proportionnelle au produit d'une puissance quelconque de l'abscisse par une fonction quelconque de l'ordonnée & par une fonction quelconque de l'abscisse divisée par l'ordonnée, on auroit pour équation $dx - \frac{x dy}{y} = Y x^n dy \frac{x}{y}$, Y étant une fonction de y . Or cette équation peut s'intégrer aisément en faisant $x = y u$. Il en est de même de l'équation

$$dx - \frac{x dy}{y} = \frac{dy \Delta \frac{x}{y}}{\Phi \frac{x}{y} + y^p \Gamma \frac{x}{y}}$$

SCOLIE III.

XLI. Soit encore $dx - z dy = 0$; on multipliera cette équation par X que je suppose être une fonction de x , & on aura $X dx - X z dy - y X dz - z y dX + y X dz + z y dX = 0$; multipliant en

ensuite les quatre premiers membres par une fonction de leur intégrale $\int X dx - y X z$, on trouvera que l'équation est intégrable, $\int X dx - y X z$ est égal à une fonction de $y \Delta X z$. Ainsi l'équation $\int X dx = p y X z + q y X z + a$, p , q , & a étant des constantes, peut être intégrée par ce Théorème, ainsi que plusieurs autres.

En général tout l'artifice de la méthode que nous proposons ici pour découvrir des équations intégrables, consiste à préparer l'équation $dx - z dy = 0$, de telle manière qu'on puisse la diviser en deux parties, dont l'une soit intégrable, ou puisse au moins être rendue telle, & dont l'autre soit une différentielle exacte multipliée par quelque quantité que ce soit, ou au moins soit le produit d'une quantité quelconque, par une quantité infiniment petite, qui puisse être rendue aisément une différentielle exacte; après cette préparation, on multipliera la première partie par une fonction de son intégrale; & on supposera ensuite que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la différentielle dans la II^e partie, soit égal à une fonction de l'intégrale de la différentielle contenue dans la II^e partie; par là on aura l'équation de condition; qui rend la proposée intégrable.

De plus, au lieu d'écrire $dx - z dy = 0$, on peut écrire $d\left(\frac{dx}{z}\right) = 0$, & mettant dans les équations de condition y pour x , x pour y , & $\frac{1}{z}$ pour z , on en trouve de nouvelles. Par exemple $x - yz = \varphi(y \Delta z)$ donne $y - \frac{x}{z} = \varphi(x \Delta z)$ où $x - yz = z \varphi(x \Delta z)$ & ainsi des autres.

Enfin ces mêmes équations de condition auroient lieu, si à la place



place de x , on mettoit $\frac{d^n x}{dy^n}$ & à la place de z ou de $\frac{d x}{d y}$,

$$\frac{d^{n+1} x}{(dy)^{n+1}}.$$

PROBLEME V.

XLII. On propose de trouver l'intégrale des deux équations

$$dx + (Cx + Dy) dz = 0$$

$$dy + (Kx + Ly) dz = 0.$$

On multiplierà la II^{de}. de ces équations par un coefficient indéterminé v , ensuite on les ajoutera ensemble, ce qui donnera : $dx + vdy + dz((C + Kv)x + (D + Lv)y) = 0$. Ensuite on fera en sorte que $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ soit un multiple quelconque de $x + vy$, ce qui donnera $\frac{C + Kv}{1} = \frac{D + Lv}{v}$; équation d'où

On tirera $v = -\frac{C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L - C)^2 + 4DK}}{2K}$. On sup-

posera ensuite $x + vy = u$, & l'on aura $du + (C + Kv)u dz = 0$;

dont l'intégrale est $u = g e^{-(C + Kv)z}$, g étant une constante & e le nombre dont le logarithme est 1.

Cela posé soient p, p' les deux valeurs de v , trouvées par l'équation précédente, & soit $x + py = u, x + p'y = u'$, on aura $u = g e^{-(C + Kp)z}$; $u' = g' e^{-(C + Kp')z}$; $y = \frac{u - u'}{p - p'}$;

$x = \frac{p' u - p u'}{p' - p}$; & on déterminera les constantes g & g' par les

valeurs que x & y doivent avoir, lorsque z est $= 0$, ou est égal à que grandeur connue.

SCOLIE I.

XLIII. Cette solution ne peut souffrir de difficulté que dans le cas où l'équation $Kvv + Cv - Lv - D = 0$ ne donne point de valeurs de v , ce qui arrivera si $K = 0$ ou $D = 0$, & dans le cas où deux valeurs de v sont égales.

Or I^o. si $D = 0$, une des valeurs de v est $= 0$, & l'autre est $\frac{L - C}{K}$, c'est pourquoy il n'y aura qu'à supposer dans les formules précédentes $p' = 0$ & l'on aura les valeurs de y & de x .

II^o. Si $K = 0$, au lieu de le supposer absolument nul, on le supposera infiniment petit, ce qui revient au même, & alors une des valeurs de v fera $\frac{D}{C - L}$ & l'autre fera $\frac{L - C}{K}$; on aura donc

$$g e^{-(C + \frac{K D}{C - L})z} = g e^{-Cz}; u' = g' e^{-(Lz)}$$

$$y = \frac{K(u - u')}{C - L}; x = u - \frac{p u'}{p'} = u + \frac{D K u'}{(C - L)^2}.$$

III^o. Enfin si les valeurs de p & de p' sont égales, au lieu de supposer telles, on supposera $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$, α étant une quantité infiniment petite, & on aura $u = g e^{-(C + K \alpha)z}$

$$-K g \alpha z e^{-(C + K \alpha)z}; u' = g' e^{-(C + K \alpha)z} + K g' \alpha z e^{-(C + K \alpha)z}$$

$$y = \frac{u' - u}{2 \alpha}; x = \frac{a u - a u' - a u - a u'}{2 \alpha}; \text{ de sorte que si } g =$$

$$\text{on a } y = -K g z e^{-(C + K \alpha)z}; \& x = -K g' z e^{-(C + K \alpha)z}.$$

SCOLIE II.

XLIV. Les methodes que je viens de donner dans le Scolie précédent pour trouver les valeurs de x & y , lorsque v n'a pas deux valeurs inégales, sont principalement remarquables par l'usage que nous en ferons dans des cas plus composés. Car on pourroit s'en passer icy, puisque K ou D étant $= 0$, une des deux équations est integrable, & que l'integration de l'autre se reduit à l'integration de la formule $dz + bz dt + T dt = 0$, b étant une constante, & T une fonction de t ; & si les deux valeurs de v sont égales, on prendra arbitrairement une de ces valeurs; & après avoir résolu l'équation $du = -dt (C + Kv)u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u , c'est à dire en t , & cette valeur étant mise dans une des deux équations données, on verra que son integration se réduit à celle de la formule $dz + bz dt + T dt = 0$. On aura donc les valeurs de x & de y en t .

SCOLIE III.

XLV. Si les valeurs de v étoient imaginaires, le probleme se résoudroit toujours de la même manière. Car les exponentielles imaginaires se réduiroient toujours à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant réelles, & si les valeurs de y & de x devoient être réelles, les imaginaires en disparoitraient. Voyez le Traité des Vents art. 79.

SCOLIE IV.

XLV. Si les équations proposées étoient

$$T' dx + T'' dt (Cx + Dy) + \theta dt = 0$$

$$T' dy + T'' dt (Kx + Ly) + t dt = 0$$

le probleme n'auroit gueres plus de difficulté; car T' , T'' , θ , t , étant des fonctions quelconques de t , on auroit, en suivant la même methode que dans l'art. 42, $T' du + T'' u dt (C + Kv) + (\theta + tv) dt = 0$. Or cette équation s'intégrera par des methodes connus des Geometres.

S C O L I E V.

XLVII. Il n'est pas plus difficile de trouver l'intégrale des équations

$$T' A dx + T' B dy + T'' dt (Cx + Dy) + \theta dt = 0$$

$$T' F dx + T' G dy + T'' dt (Kx + Ly) + t dt = 0$$

Car on peut très aisément réduire ces équations à deux autres dont la 1^{re}. ait $T' dx$ pour 1^{er}. terme sans renfermer dy , & dont la 2^{de}. ait $T' dy$ pour 1^{er} terme, sans renfermer dx . Il est vrai que cette réduction ne pourra se faire, lorsque $B F - A G$ sera $= 0$; mais on remarquera que le problème devient alors beaucoup plus simple. Car il se réduit alors à une équation finie

$$T'' dt (CFx + DFy) + F\theta dt = T'' dt (KAx + LAy) + t A dt$$

& à une des deux équations différentielles, qui s'intègre par la formule $dz + bz dt + T dt = 0$.

P R O B L E M E IV.

XLVIII. On propose d'intégrer les équations

$$dx + (ax + by + cz) dt = 0.$$

$$dy + (ex + fy + gz) dt = 0.$$

$$dz + (hx + my + nz) dt = 0.$$

On multiplierà la seconde de ces équations par une indéterminée v , la 3^{de}. par une indéterminée μ , & ensuite on les ajoutera ensemble

$$\text{puis on supposera } a + ev + b\mu = \frac{b + fv + m\mu}{v} = \frac{c + gv + n\mu}{\mu}$$

afin qu'en faisant $x + vy + \mu z = u$, on ait $du + (a + ev + b\mu) u dt = 0$. Cela posé, on aura la valeur de μ en v , & une équation du 3^{de}. degré, qui donnera trois valeurs de v , que j'appelle p, p', p'' . Or soient m, m', m'' , les trois valeurs correspondantes de μ , on aura

$$x + py + mz = g E^{-r(a+ep+bm)}, \text{ E étant le nombre dont}$$

$$\text{le logarithme est l'unité; } x + p'y + m'z = g' E^{-r(a+ep'+bm')};$$

$$x + p''z = g'' E^{-r(a+ep''+bm'')};$$

$x + p''y + m''z = g''E^{-(a+ep''+bm'')}$; de ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z , & on déterminera les constantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z , lorsque $t = 0$, ou est égal à une constante donnée.

SCOLIE I.

XLIX. Si l'équation en v n'a pas trois racines inégales, on pourra toujours, pourvu que cette équation ait au moins une racine, réduire le problème présent au cas de l'art. 47. car soit p la valeur de v & m la valeur de μ , on fera $x + my + pz = gE^{-(a+ep+bm)}$, & l'on réduira les trois équations données à deux, en faisant évanouir par le moyen de cette dernière équation une des indéterminées, par exemple z .

Mais il peut se faire que l'équation en v n'ait aucune racine, ce qui arrivera si les coefficients qui affectent les différentes puissances de v sont égales à zéro; en ce cas si le terme tout connu de l'équation s'en va aussi, c'est une marque que l'on peut donner à v telles valeurs qu'on voudra, & le problème devient alors plus simple, si le terme tout connu de l'équation ne s'en va pas, on augmentera, ou on diminuera à volonté un des coefficients a, b, c, e , &c. d'une quantité infiniment petite pour rétablir un des termes de l'équation, & on aura pour lors par la règle du Parallelogramme de Mons. *Newton* une valeur infinie de v , qui servira à résoudre le problème.

SCOLIE II.

L. Au reste sans réduire le problème présent au cas de l'art. 49. on peut toujours supposer que toutes les valeurs de v soient inégales. Il n'y a qu'à augmenter tous les coefficients a, b, c &c. d'une quantité infiniment petite α , ou seulement l'un de ces coefficients, alors on aura des valeurs de v , toutes inégales entr'elles, & dans lesquelles entrera la quantité α , & ces valeurs étant substituées à la place de p, p', p'' &c. on aura après la fin du calcul des valeurs de x, y, z , dans lesquelles

quelles la quantité α ne se trouvera plus. Pour avoir ces valeurs de v , on se servira de la règle du Parallelogramme de Mons. *Newton*, ou de la règle pour trouver les tangentes aux points multiples des courbes. Car on peut regarder l'équation en v comme l'équation d'une courbe dont v est l'ordonnée, & dont une des constantes, par exemple a , considérée comme variable est l'abscisse; or dans le cas présent cette courbe sera du III. degré; & lorsque la valeur de a sera telle que pour une même abscisse on n'ait pas trois valeurs inégales de v , alors imaginant que l'abscisse a soit augmentée d'une quantité infiniment petite α , on doit trouver par les règles dont nous venons de parler trois valeurs différentes de v , répondantes à l'abscisse $a + \alpha$ ou $a - \alpha$; & il n'importe que deux ou plusieurs de ces valeurs soient imaginaires, pourvu qu'elles soient différentes entr'elles.

SCOLIE III.

LI. Il est facile d'intégrer par ce problème trois équations qui contiendront les indéterminées x, y, z , multipliées par des constantes, & par une fonction quelconque de x , avec leurs différences aussi multipliées par des constantes & par une fonction de x , & de plus un terme quelconque $t dx, \theta dx, \theta' dx$, qui ne renferme que des constantes avec x . Voyez les art. 46 & 47.

SCOLIE IV.

LII. Si avec les trois équations de l'art. 48, on en proposoit une IV. il faudroit multiplier cette quatrième par une nouvelle indéterminée π , & après avoir trouvé l'équation en v & l'équation qui donne la valeur de μ en v en mettant dans cette dernière π au lieu de μ , & au lieu de b, m, n , les coefficients qui leur répondroient dans la IV. équation, & réciproquement b, m, n , au lieu de ces coefficients; après quoy on résoudroit le problème par une méthode entièrement semblable à celle de l'art. 48.

SCOLIE V.

LII. De là & des articles précédens il est facile de conclure que si on a un nombre n d'équations différentielles qui renferment n indé-

déterminées, x, y, z, u , &c. multipliées par des constantes & par une même fonction de t , avec leurs différentielles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}$,

$\frac{dz}{dt}$, &c. aussi multipliées par des constantes & par une fonction de t , qui soit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque t, θ, θ' &c. de la variable t , on pourra toujours intégrer ces équations par la méthode que nous venons d'exposer.

SCOLIE VI.

LIII. Par la même raison, si on a un nombre p d'équations différentielles qui contiennent p variables x, y, z, u , &c. multipliées par des constantes & par une fonction quelconque T de t , avec leurs différences $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ &c. aussi multipliées par des constantes & par T ,

& les différences secondes $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ &c. aussi multipliées

par des constantes, & par T , & les différences troisièmes $\frac{d^3x}{dt^3}$,

$\frac{d^3y}{dt^3}$ &c. aussi multipliées par T & par des constantes, & ainsi de

suite, jusqu'aux différences $\frac{d^qx}{dt^q}$ &c. de tel degré q , qu'on voudra;

& que de plus chacune de ces équations contienne, si l'on veut, une fonction quelconque t, θ, θ' &c. de la variable t , on pourra toujours

les intégrer par le scolie précédent. Car en faisant $d^{q-1}x = x'$

$d^{q-1}y = y'$ &c. $d^{q-1}x = x'' d^{q-2}$ &c. $d^{q-1}y = y'' d^{q-2}$ &c.

$d^{q-2}x = x''' d^{q-3}$ &c. on changera les équations données en d'autres

équations qui seront au nombre de $p + p(q-1) = pq$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z, u &c. x', x'' &c. y', y'' &c. avec leurs 1^{res}. différences seulement dx, dy, dz , &c. dx', dx'' , &c. dy', dy'' &c. & ces équations s'intégreront par l'art. 52.

SCOLIE VII.

LIV. On peut quelquefois abréger cette méthode : par exemple, si les équations données étoient

$$ddx + (Cx + Dy) dt^2 = 0$$

$$ddy + (Kx + Ly) dt^2 = 0$$

on les réduiroit, en suivant la méthode de l'art. 42, à l'équation $d\frac{dx}{dt} + (C + Kv)u dt = 0$, qui est facile à intégrer. De même si on avoit les équations $d^4x + Mx dt^4 = 0$, $ddu + (Fx + Gu) dt^2 = 0$, on les changeroit, en supposant $ddx = p dt^2$, dans les trois équations $ddx = p dt^2$, $ddp = -Mx dt^2$, & $ddu + (Fx + Gu) dt^2 = 0$ qui par la méthode de l'art. 48 se réduiroient à une équation de cette forme $ddx + Kx dt^2 = 0$.

SCOLIE VIII.

LV. On pourroit aussi intégrer les équations dont nous avons parlé depuis l'art. 42, par une autre méthode qui revient au même dans le fond, que celle que nous avons déjà exposée. Pour en donner une idée, soit supposée dans l'art. 42. $x = mu + nz$, $y = pu + qz$, m & n étant deux indéterminées ainsi que p & q , on aura $mdu + ndz + dt((Cm + Dp)u + (Cn + Dq)z) = 0$. & $pdu + qdz + (Km + Lp)u + (Kn + Lq)z = 0$. Or faisant $m = 1$ & $p = 1$ supposant de plus $\frac{Cn + Dq}{n} = \frac{C + D}{1}$; & $\frac{Kn + Lq}{q} = \frac{K + L}{1}$

on déterminera n & q à être telles que les deux transformées se réduisent chacune à une différentielle de cette forme $ds + Ns dt = 0$ mais la méthode que j'ai donnée dans les articles précédens parait encore plus simple, & j'ai cru devoir l'expliquer le plus succinctement qu'il m'a été possible, à cause de l'utilité dont elle peut être non seulement

lement dans l'Analyse, mais encore dans plusieurs problemes Physico-mathematiques. J'en avois même déjà donné quelque idée dans l'art. 101. de mon Traité de Dynamique, que dans l'art. 79 de mon Traité des vents: j'espère donc que les Geometres pourront tirer quelque utilité de mon travail, & que les différentes branches de cette methode seront même applicables à d'autres Problemes. Je me contenterai d'en donner un exemple; on sçait que l'integrale de

$$\frac{dx}{(x+a)(x+b)} \text{ est } \frac{1}{b-a} \text{ Log. } \frac{x+a}{x+b}; \text{ \& lorsque } x+a=$$

$x+b$, c'est à dire lorsque $b=a$, cette integrale devient $\frac{0}{0}$. Pour la

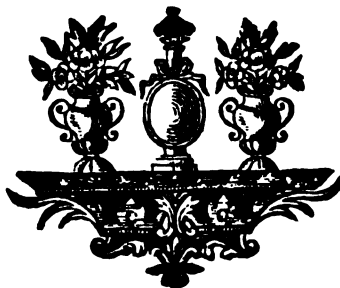
Determiner je suppose $b=a+\alpha$; & j'ay $\frac{1}{\alpha} \text{ Log. } (1 - \frac{\alpha(x+a)}{(x+a)^2})$

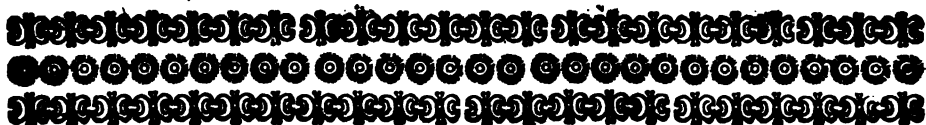
$= -\frac{1}{x+a}$, comme elle est en effet. C'est encore par une methode

peu prés semblable que j'ay déterminé cy-dessus l'integrale de

$$\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(k+lx+mx^2+nx^3)}} \text{ dans le cas où } 4l^3n = m^3.$$

ce 13 Avril 1747.





OBSERVATION DE L'ECLIPSE PARTIALE

DE LA LUNE 1748 LE 8^{me} Août

PAR M. KIES.

Suite des Observations :		Tems vrai		
Le commencement étoit	à	11 ^h	6'	56"
L'ombre touche <i>mare humorum</i>		11	59	
<i>Tycho</i>		19	59	
<i>Grimald</i>		24	5	
<i>Ricciol.</i>		27	26	
<i>Alpetragius</i>		41	0	
<i>Sinus maris nubium</i>		44	36	
<i>Fracastorius</i>		55	29	
<i>mare Nectaris</i>		58	34	
emersion de <i>Grimald</i>	12	6	56	
<i>Alpetrag.</i>		33	48	
<i>Bulliald</i>		37	38	
<i>Fracastor.</i>		56	8	
<i>Tycho.</i>		57	34	
La fin arrivoit.	13	19	42	

La pendule étoit corrigée par plusieurs hauteurs correspondantes que je pris le 9 Août.

ME.

Fig. 1.



Fig. 2.

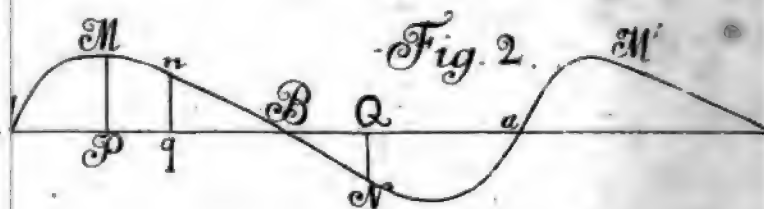
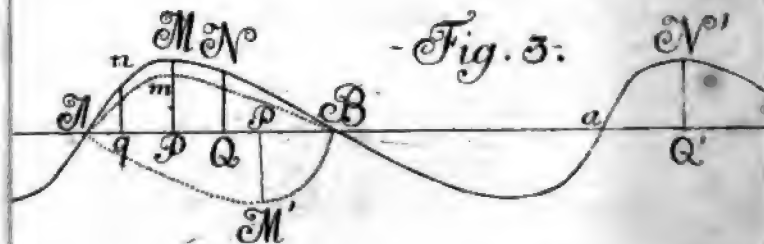
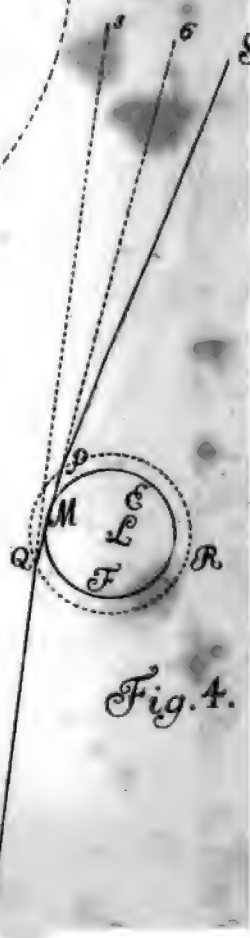
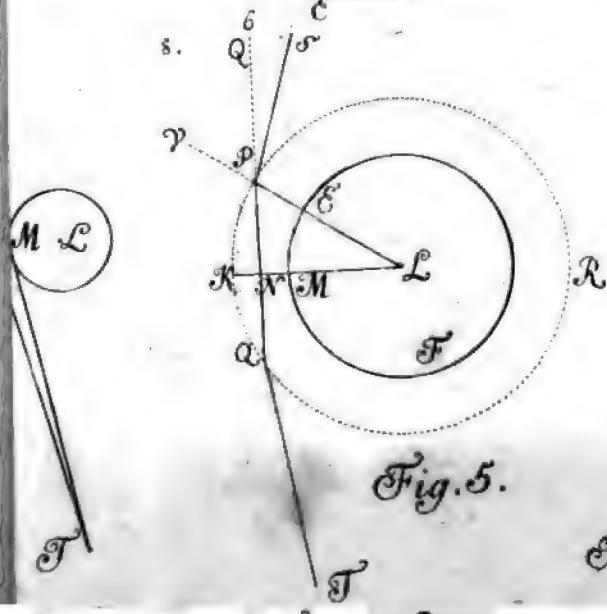
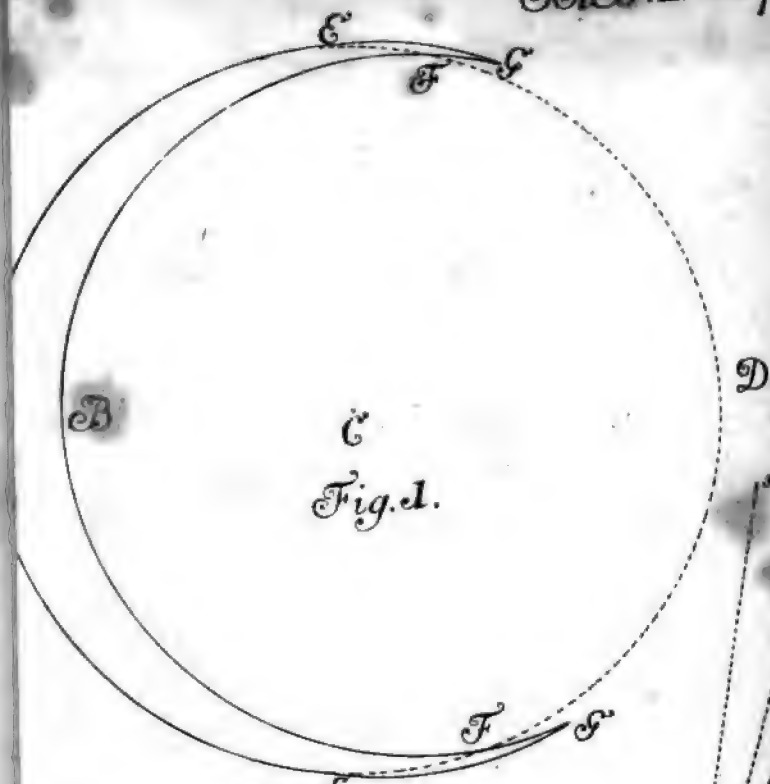


Fig. 3.









TAb. III. ad p.

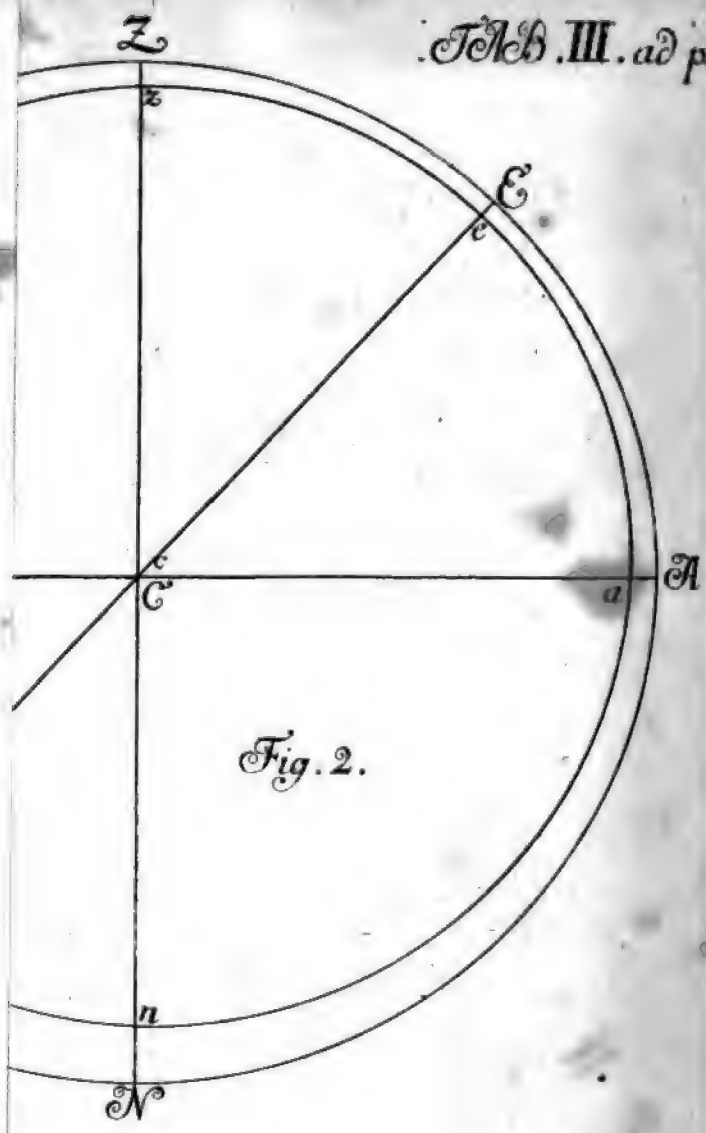
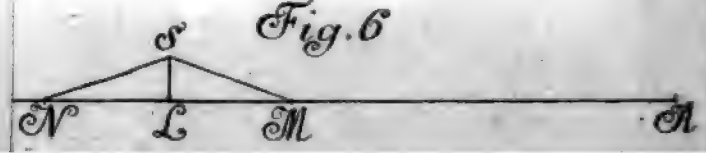
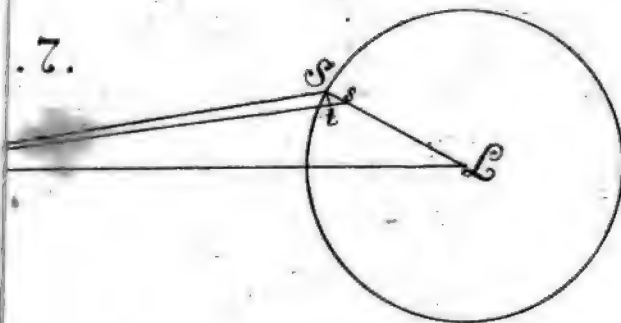


Fig. 6





.7.



TAB. V. ad p.

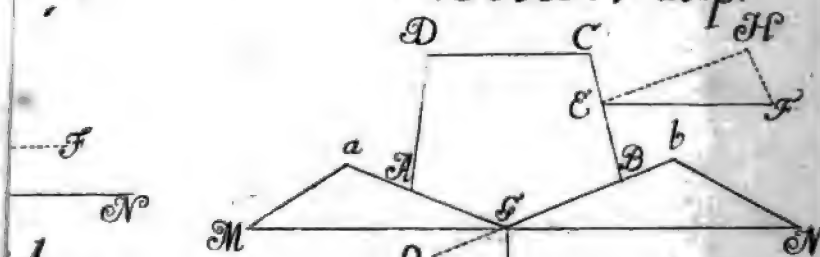


Fig. 2.

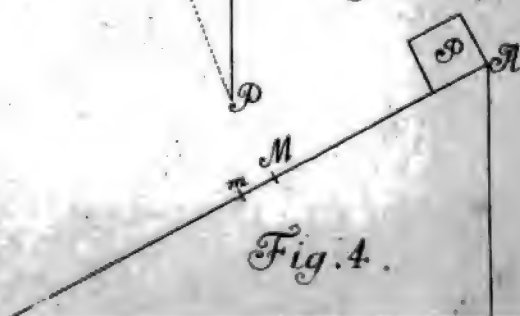


Fig. 4.



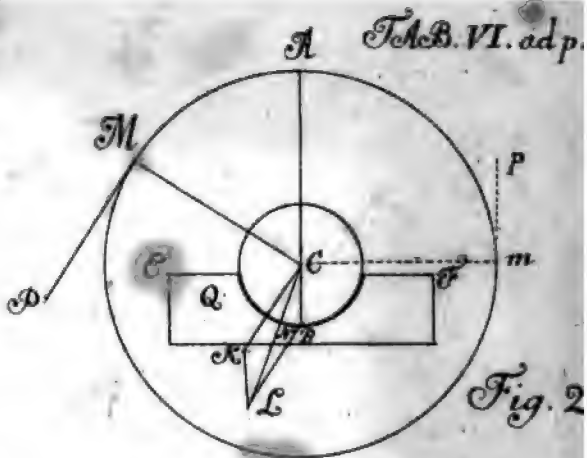


Fig. 2

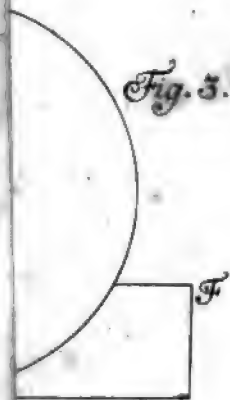


Fig. 3.

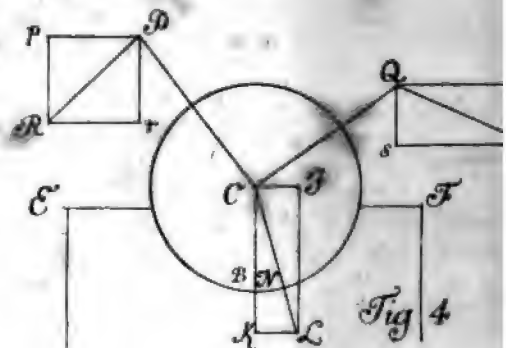


Fig 4

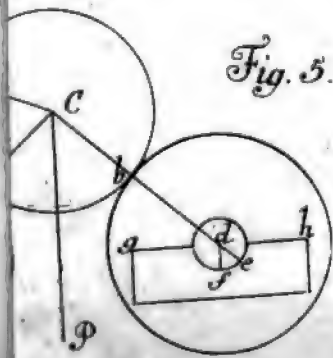
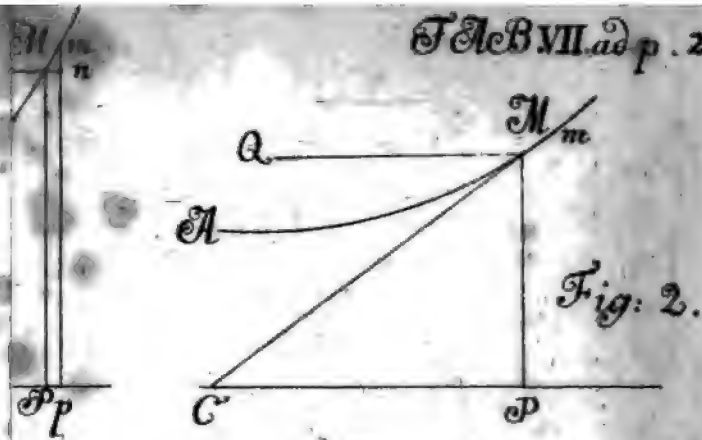


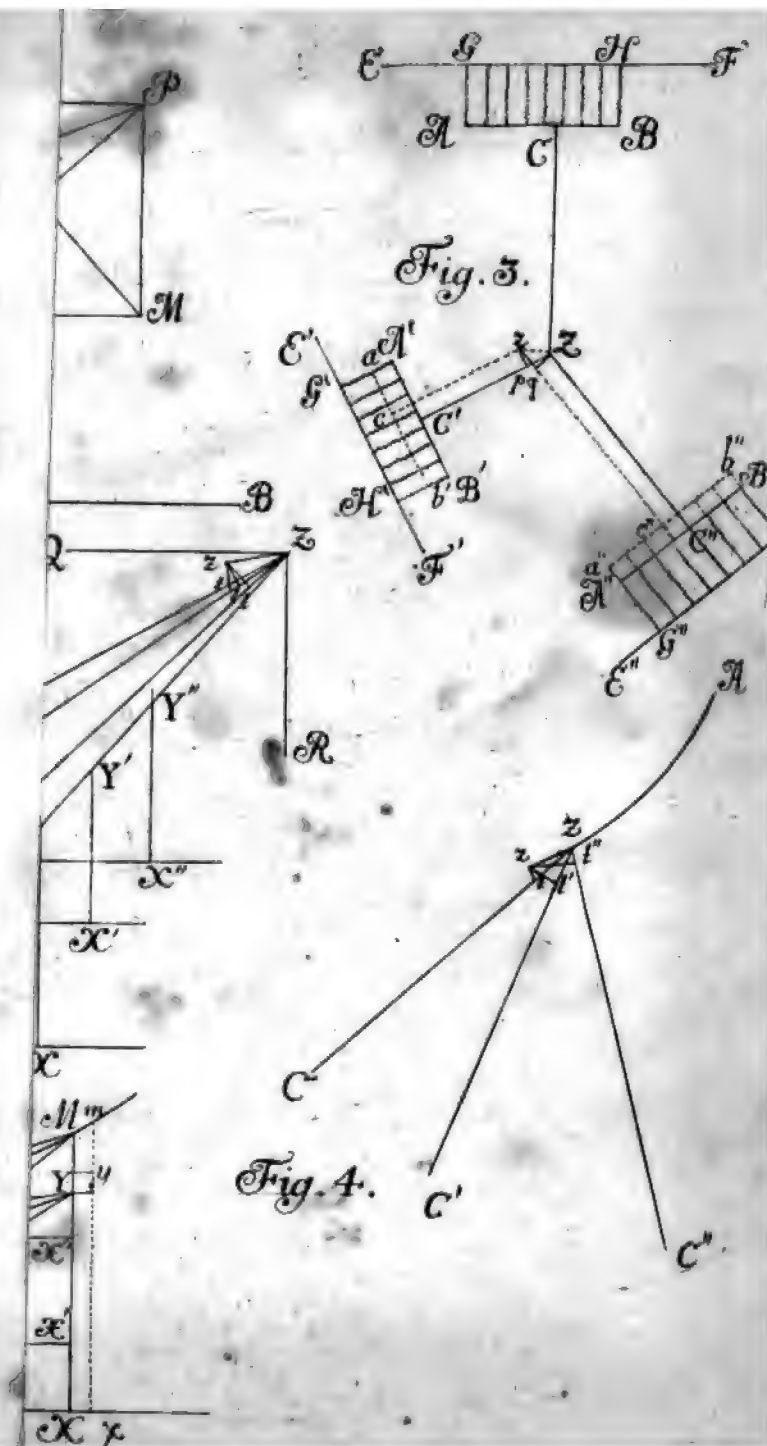
Fig. 5.



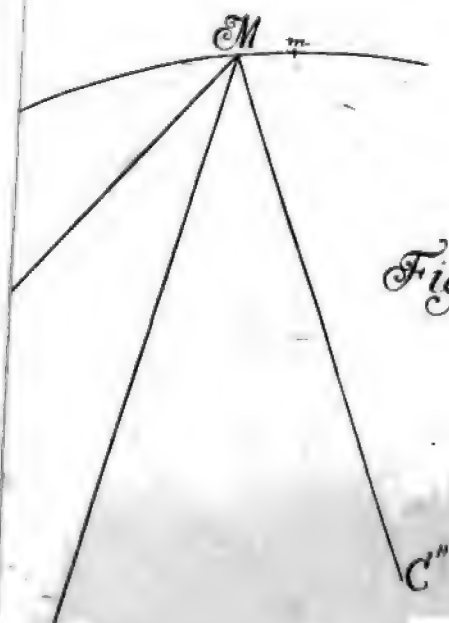
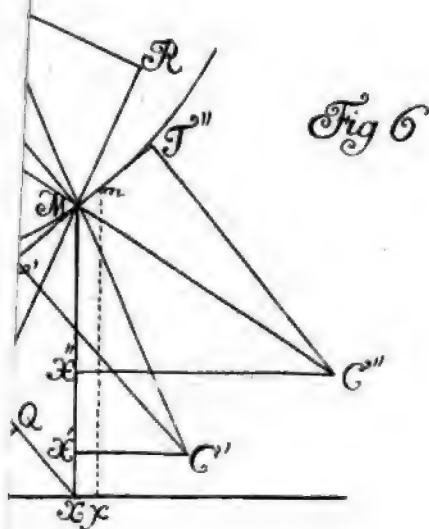


m
p
p'
p''











MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

*CLASSE DE PHILOSOPHIE
SPECULATIVE.*



THE ROYAL

SCOTLAND

OF THE

OF THE



DISSERTATION
SUR LE PHILOSOPHE CLITOMACHUS,
SUCCESSEUR DE CARNEADE DANS
L'ACADEMIE,
PAR M. HEINIUS.

Traduit du Latin.



I.

CLITOMACHUS, un des plus célèbres Maitres de l'Ecole Académique, a rendu de si grands services à la Philosophie, qu'il nous a paru digne de la peine que nous allons prendre pour le tirer en quelque sorte de la poussière, & le faire connoître au Monde savant, en rapportant à cette illustre Assemblée tout ce qui le concerne. Il résulte une grande utilité des travaux que l'on consacre à l'examen de la vie & des actions des anciens Philosophes. Cela fournit l'occasion de démasquer diverses erreurs, de peser les différentes opinions de dissiper les doutes, & de tirer la lumière de la vérité du consentement des plus savans hommes, dont le témoignage se réunir en sa faveur. On auroit tort de s'imaginer que cette occupation est une peine superflue, depuis que tant d'habiles Critiques s'y sont livrés, & en particulier, depuis la publication de l'excellente Histoire de la Philosophie, dont nous sommes redevables à Mr. *Brucker*. Malgré l'abondante moisson que ce docte Ecrivain a faite, il reste toujours à glaner. En
con-

construisant un si vaste édifice, il n'a pû prendre garde à tout; & enfin, les méprises mêmes sont inévitables dans un aussi vaste travail. Les bornes que nous nous sommes prescrites dans cette Dissertation, sont telles qu'en nous y renfermant, nous n'omettrons rien de tout ce qu'il y a d'intéressant à savoir au sujet de Clitomachus.

II. Commençons par rechercher dans quel tems il a vécu. Il n'y a point d'Auteur qui soit exact là dessus que *Jonsius**. Personne ne conteste que Clitomachus ait succédé à Carneade dans l'Ecole Académique. Et pour la mort de Carneade, voici ce qu'en dit *Diogene Laërce*; „*Apollodore* rapporte dans ses Chroniques, que Carneade mourut la quatrième année de la CLXII Olympiade, à l'âge de LXXXV ans., La *Description des Olympiades*, qui se trouve dans l'Ouvrage Chronologique de Scaliger, remarque sur cette année: *qu'il arriva une Eclipsé de Lune, & que le Philosophe Carneade mourut le même jour.* (*) *Suidas* & *Hesychius* rapportent la même Eclipsé d'après *Diogene Laërce*. Voilà donc trois témoins, *Apollodore*, l'Auteur Anonyme de la *Description des Olympiades*, & *Diogene Laërce*, qui déposent l'année de la mort de Carneade, & par conséquent celle où Clitomachus lui succéda. Il est vrai que *Petau*, & quelques autres Savans, ont formé sur cette année une controverse, dans laquelle nous n'entrons point ici, parce qu'elle est tout à fait étrangère à notre but. Ceux qui veulent en savoir davantage là dessus, peuvent recourir aux Ouvrages de *Jonsius*, & de Monsieur *Brucker*. † La quatrième année de la CLXII Olympiade répond à l'an 625. de Rome, & 127. avant N. S.

III. Ainsi Clitomachus fleurissoit vers la fin du VI. Siècle, depuis la fondation de Rome, & au commencement du VII. Cet espace de tems est le plus beau & le plus heureux, dont ait jouï la République: & le seul mot de Scipion Emilien le prouve assez évidemment. Comme il étoit Censeur un peu avant l'année 625. & que faisant un sacrifice solennel, le Greffier marchant suivant la coutume

(*) Εὐλείφης σελήνης, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἡμέρᾳ Καρνεάδης ὁ Φιλόσοφος τὸν βίον μετέλλαξε.

me devant lui avec les Régistres publics, faisoit le voeu, par lequel on prioit les Dieux, d'augmenter la prospérité du Peuple Romain; Notre prospérité, dit-il, est assez grande; je prie seulement les Dieux qu'ils nous y maintiennent. Et il ordonna sur le champ que les Régistres publics fussent corrigés suivant cette formule. C'est dans ce tems-là que Rome a été le plus féconde en grands hommes; on y vit tant de beaux génies, d'Orateurs, de Philosophes, de Jurisconsultes, de Poëtes, d'Historiens, qu'il y a lieu de s'étonner avec *Velleius Paterculus* (*) qu'un même Siecle ait rassemblé tant de génies propres, & aux Sciences speculatives, & aux Arts utiles.

IV. Carthage étoit la Patrie de Clitomachus; nous en avons pour garans *Diogene Laërce*, *Denys Periegetes*, *Plutarque* & *Etienne de Byzance*. C'est ce qui a engagé *Maxime de Tyr* à l'appeller Libyen, *Λιβυς*, dans sa XXIX. Differtation, où il en parle avec éloge, & le met à coté d'*Aristote* & de *Cbryssippe*. Etant donc Phénicien d'origine & de Nation, il reçut aussi le nom Phénicien d'*Asdrubal*, ou si vous prononcez comme les Grecs, *Asdrubas*. C'est ce que nous lisons dans *Plutarque*; „Nous admirons, dit-il, la force persuasive de Carneade, qui fit embrasser les moeurs & les coutumes des Grecs (**) à Clitomachus, Carthaginois de naissance, & qui avoit porté auparavant le nom d'*Asdrubal*.“ Lorsqu'il arrivoit aux Anciens de changer de Nation & de moeurs, ils avoient aussi coutume de changer de nom. Les Ecrivains Sacrés nous en fournissent des exemples, que *Grotius*, *Huet*, *Le Clerc*, & d'autres Savans ont rassemblés. Nous ne nous engagerons pas plus avant dans cette discussion. Soit donc par attachement pour Carneade, soit pour se rendre plus agréable aux Grecs, il quitta son nom barbare d'*Asdrubal*, pour prendre celui de Clitomachus. Là dessus on demande, comment le nom Grec répond au nom Phénicien? Nous ne copierons point ici tout ce que *Bochart*,
ce

(*) *Saculi ingeniorum similitudines congregantis, & in studium par, & in emolumentum*. Lib. I.

(**) Ἑλληνίζειν ἐποίησε. Orat. I. de fortuna Alexandri. Cap. VI.

ce grand appui de la Litterature Phenicienne, a dit dans son Canaan pour répandre du jour sur cette question. Il suffira d'indiquer en peu de mots notre propre sentiment. *Clitomachus*, en Grec Κλειτόμαχος, veut dire *illustre à la guerre*. Or *Asdrubal*, chez les Hebreux, ou si vous l'aimez mieux, chez les Pheniciens, Ἰσχυριώ, est un *Soldat armé, & prêt pour le combat*. Car *Baal* signifie également un Seigneur legitime, & un possesseur quelconque, qui est pourvu d'une certaine chose, & qui en fait un usage, soit bon, soit mauvais. Ainsi le mot Grec *Clitomachus* rend exactement le sens du mot Phenicien *Asdrubal*. *Bochart* fait aussi une Observation remarquable sur le Père de *Clitomachus*, qu' *Etienne de Byzance* nomme *Diognete*, ce que l'on peut fort bien exprimer en Phenicien par *Mabar-bal*, c'est à dire, *filz de Jupiter*.

* *Geogr. S.*
P. 744.

V. Rapportons à présent ce qu' *Etienne* dit de *Clitomachus*, au mot, Καρχηδών: „ *Clitomachus* étoit aussi de Carthage; c'étoit „ un Sage distingué, filz de *Diognete*, & qui avoit porté auparavant „ le nom d' *Asdrubas*. Etant ensuite devenu Philosophe de la *Seconde* „ *Academie*, il succéda dans l'Ecole à *Carneade* de *Cyrene*. Etant „ déjà âgé de XXVIII. ans, il alla à *Athenes*, sans avoir aucune teinture „ des Lettres; & pour s'instruire, il devint Auditeur de *Carneade*. „ (*) *Eusebiius* dit la même chose dans son Commentaire sur *Denys Periegete*. Si nous en croyons donc *Etienne*, & après lui *Jonstius*, *Clitomachus* vint à *Athenes* dans l'ignorance des premiers Eléments „ αμειρος τῶν πρώτων σοιχείων. Ce témoignage heurte de front celui „ de *Diogene Laërce*, qui dit; „ que *Clitomachus* avoit déjà étudié „ la Philosophie dans sa Patrie, & dans sa langue maternelle. „ (**) *Strabon* „ s'est conformé là dessus à *Diogene Laërce*. Dans cette opposition „ de ré-

(*) Καρχηδόνιος ἦν, σόφος μέγας, Κλειτόμαχος ὁ Διογνήτης, ὃς (καὶ) ἐκαλεῖτο Ἀσδρῦβας, Φιλόσοφος Ἀκαδημικός, διάδοχος Καρνεάδου τῆ Κυρηναίης σχολῆς, ὃς κῆ ἔτει ἐλθὼν Ἀθηναίῃ, ἀμειρος ἦν τῶν πρώτων σοιχείων καὶ τὰυτα μαθηθῶν, ἠκροάσατο Καρνεάδου.

(**) Τῇ ἰδίᾳ Φωνῇ κατὰ τὴν πατρίδα ἐφιλοσόφει.

de récits, il faut voir, s'il n'y a point quelque moyen de conciliation. Mr. Brucker en a essayé un. „ Etudier la Philosophie, dit-il, *Φιλοσοφία*, signifioit chez les Barbares s'attacher à tous les genres de littérature, qui peuvent préparer l'esprit à la Philosophie; & c'est dans ce sens que Diogene Laërce peut avoir dit de Clitomachus, qu'avant que de venir à Athenes, il s'étoit imbu dans sa Patrie des principes de la Philosophie. Assurément on a tout sujet de croire qu'il n'étoit pas entièrement sans lettres, si l'on fait attention que dans ces tems-là l'érudition Grecque fleurissoit généralement en Asie. Cela ne leve pourtant pas la difficulté, fondée sur ce qu'Esienne dit positivement, qu'Asdrubal n'avoit aucune teinture des Lettres. Examinons donc la chose de plus près. Un homme dénué de toutes connoissances, ne doit pas se mettre fort en peine des Academies, des Savans & de leurs disputes. Le vulgaire de nos Artisans s'inquiete-t-il de ce qu'ont pensé Descartes, ou Leibnitz, demande-t-il quelles matieres on agite dans l'Université de Leyde, ou quels sont les Professeurs les plus renommés de celle de Göttingen? Sur ce principe nous sommes persuadés, que si les Lettres avoient été entièrement inconnues à Clitomachus, il n'auroit jamais pensé à faire le Voyage d'Athenes. On ne desire point ce qu'on ne connoit point. Dans cet état le bruit de l'Academie, ni le renom de Carneade, n'auroient jamais frappé ses oreilles. Je crois donc que l'expression d'Esienne ne signifie autre chose, sinon que Clitomachus n'avoit pas encore les élémens de la Langue Grecque; c'est ce qu'il entend par *πρῶτα σοιχῆαι*. Mais d'ailleurs *τῇ ἰδίᾳ Φωνῇ ἐφιλοσόφει*, il s'étoit appliqué dans sa langue aux Lettres & à la Philosophie, & il avoit eu des Maîtres Phéniciens.

VI. L'esprit ne manquoit point aux Phéniciens, & l'Afrique pleine de la renommée des Philosophes Grecs, avoit elle-même produit des Savans, qui lui faisoient honneur. Cicéron dit, „ que Clitomachus, comme Phénicien, avoit beaucoup de pénétration, & qu'il étoit avec cela fort studieux & appliqué. (*) Eustathius le

P p 2

„con-

(*) *Est acutum, ut Poenum, & valde studiosum ac diligentem.* Acad. Quæst. IV. 31.

confirme, en assurant que, par sa pénétration naturelle, οὐρανὸν φέ-
 „εως, & par l'assiduité de son travail, il parvint à une grande con-
 „noissance de la Philosophie. „ Mais écoutons le témoignage avan-
 „ Lib. XVI. tageux que Strabon * rend aux Pheniciens. „ Les Sidoniens, dit-il
 „ 77. „ passent pour les Auteurs de la plupart des Arts, & des plus beaux,
 „ comme Homere l'a infinué. Ils sont de plus fort versés dans l'Astro-
 „ nomie & dans l'Arithmetique . . . qu'ils croient certainement
 „ être passées d'eux aux Grecs. A' présent on peut puiser avec abon-
 „ dance dans ces Villes, (Tyr & Sidon) la connoissance de tout le reste
 „ de la Philosophie. Si nous en croyons même Posidonius, l'ancien
 „ dogme des Atomes est de Moschus Sidonien, qui a vécu avant la
 „ guerre de Troye. Mais laissons l'Antiquité. Sidon a eu de nos
 „ jours des Philosophes distingués. Tels étoient Boëthus, qui s'est as-
 „ socié au travail de mes Commentaires sur la Philosophie d'Aristote,
 „ & Diodote son frere. Antipater étoit Tyrrien, aussi bien qu'Apol-
 „ lonius, qui vivoit un peu avant nous, & duquel nous avons une
 „ Table des Ecrits de Zenon, & une liste des Philosophes qu'il a for-
 „ més. „ Ainsi s'exprime Strabon. Or personne n'ignore que Cartha-
 „ ge étoit une Colonie, & pour ainsi dire, une Fille de Tyr.

VII. Au reste, il n'étoit pas possible que la Littérature Greque
 fût inconnue dans l'Afrique, ni à Carthage, depuis que Battus avoit
 fondé Cyrene, qu' Alexandre avoit poussé ses victoires dans ces con-
 trées, & que le Royaume des Ptolemées s'y étoit établi ; d'où avoient
 résulté des liaisons, & un commerce perpetuel, entre les Africains &
 „ L. XX. les Grecs. On peut rapporter ici ce passage de Justin : † Du tems de
 „ Denys l'Ancien, Tyran de Syracuse, un Phenicien découvrit en tra-
 „ hison aux Siciliens l'arrivée de l'armée Phénicienne, qu'il leur écri-
 „ vit en Grec ; mais les Lettres ayant été interceptées, le traître fut
 „ condamné, & le Senat rendit un arrêt, portant défense à tout Car-
 „ thaginois, d'apprendre à l'avenir la Langue, ou l'Ecriture Grecque,
 „ afin que désormais personne ne pût avoir commerce avec l'ennemi,
 „ soit de bouche, soit par écrit, sans interprète. „ Mais cette Loi paroît
 avoir été bientôt abolie par l'utilité, ou même par la necessité. Car,
 „ pendant

pendant la premiere Guerre Punique, Regulus ayant vaincu les Phéniciens en Afrique au pied des murs de Carthage, les Carthaginois envoyerent en Grece, pour y lever des troupes à leur folde. Et Annibal, ce foudre de guerre, la terreur des Romains, eut pour Maître dans les Lettres Grecques *Sofile* de Lacedemone ; ce qui fait dire à *Cornelius Nepos*. „Ce grand homme, continuellement occupé du métier de la guerre, ne laissoit pas de donner quelque tems aux Lettres. Car on a quelques Livres de sa façon, écrits en Grec. „*Plutarque*, dans la Vie de *Romulus*, fait mention d'un Savant Carthaginois, & rapporte ; „que *Sextius Sylla*, Carthaginois, favorisé par les Muses & par les Graces, lui avoit dit, qu'à l'enlèvement des Sabines le mot que *Romulus* avoit donné à ses soldats, étoit celui de „*Talassus*.„ Je laisse à d'autres à examiner, si ce *Sextius* est le même que *Sextus Empiricus*, qu'on a coutume d'appeller *Libyen*, & *Africain*. Au reste, tant que l'Afrique fut sous la domination des Romains, elle abonda en hommes doctes, parmi lesquels on compte d'illustres Défenseurs de l'Eglise, les *Tertulliens*, les *Minutius*, les *Cypriens*, & d'autres.

VIII. Le desir d'apprendre, dont l'esprit de *Clitomachus* étoit tout rempli, ne lui permettant donc pas de se borner aux Maîtres Carthaginois, il se rendit à Athenes, qui étoit comme une Foire des beaux Arts ; & nous pouvons inferer d'un endroit de *Cicéron*, * *Tusc. Quest. V. 37.* qu'il ne revit plus sa Patrie. Son principal but étoit de devenir Auditeur de *Carneade*, qui jouissoit dans ce tems-là d'une haute réputation, & d'un grand crédit, dans les Lettres. Il y a une dispute au sujet de l'année de son départ. *Diogene Laërce* dit, qu'il vint à Athenes étant déjà âgé de 40. ans, & qu'il y fut auditeur de *Carneade*. „ (*) *Etienne*, & *Eustatbius* qui n'a fait que le copier, s'expriment autrement, & ne lui donnent que vingt huit ans, lorsqu'il vint fréquenter à Athenes l'Ecole de *Carneade*. (**) Quel est ici le té-

P p 3

moïn

(*) 'Ελθὼν εἰς Ἀθήνας ἤδη τετταράκοντα ἔτη γεγονώς, ἦκουσε Καρνεάδου

(**) Οὗς κή ἔτει ἐλθὼν Ἀθήναζε . . . ἠκροάσατο Καρνεάδου.

moins le plus digne de foi, & à qui donnerons-nous la préférence ? *Cassaubon* dit, que le Texte d'*Etienne* est fautif ; tandis que *Vossius* soutient, qu'il faut corriger *Diogene Laërce* sur *Etienne* & *Eustathius*. *Vossius* se range à ce dernier avis. Pour nous, à dire vrai, nous ne savons la chose tout à fait incertaine, & impossible à décider, puisque nous ne savons, ni l'année de la naissance de *Clitomachus*, ni combien de tems il fut Auditeur de *Carneade*. Je serois pourtant plus disposé à m'en fier à *Diogene Laërce*, parce qu'il a écrit tout du long τετραράκοντα ἔτη, au lieu qu'*Etienne* a mis vingt-huit en chiffres κη, & que le μ qui marque 40, étant mal écrit, peut fort bien avoir été changé dans ces deux lettres.

IX. Aussi-tot qu'*Asdrubal* fut arrivé, il alla trouver *Carneade*. „Celui-ci, dit *Diogene Laërce*, remarquant son ardeur pour le travail, „le reçut fort bien, il prit soin de le faire instruire dans la Langue „Grecque, & ensuite de l'exercer dans toutes les Sciences.” (*) Il répondit si bien à ces soins, qu'il devint le plus illustre, ἐλλογμώτατος, des disciples de *Carneade*, comme *Diogene Laërce* le remarque ailleurs. * *Cicéron*, qui fait souvent mention de *Clitomachus*, nous instruit là dessus avec plus d'étendue. „Ceux, dit-il, qui fréquentèrent l'Ecole de *Carneade*, se distinguèrent beaucoup, & *Clitomachus* „fut un de ceux qui montra le plus de génie, qualité par où il excelloit, comme *Carneade* par l'Eloquence, & *Melanthius* de *Rhodes* „par la douceur.” (**) Les leçons des meilleurs Maîtres peuvent demeurer sans effet, si l'application & les talens des Disciples ne les secondent. *Eustathius* remarque que *Clitomachus* ne manqua point de

(*) Κακῆνος ἀποδεξάμενος αὐτῷ τὸ φιλόπονον, γράμματά τε ἐποίησε μαθεῖν, καὶ συνήσκει τὸν ἄνδρα.

(**) Qui *Carneadem* audierunt, admodum floruerunt ; e quibus industria plurimum in *Clitomacho* fuit, ingenii non minus in hoc, quam in *Carneade* eloquentia, in *Melanthio Rhodio* suavitatis. Quæst. Acad. IV. 6.

coté là, &, qu'il atteignit le comble de la Philosophie par la
 éducation de son génie, & par la force de son application., (*)

X. Quoique personne ne contestât à Athenes le premier rang à
 Carneade, qui se l'étoit acquis par la beauté de son génie, & par la
 force de son éloquence, qui le mettoient en état de se faire écouter,
 sur toute matiere qu'il traitât; Clitomachus, en s'attachant princi-
 plement à lui, ne méprisoit pourtant, ni le Portique, ni l'Ecole Pe-
 ripateticienne, où enseignoient alors *Diogene*, & *Critolaus*, deux
 philosophes très célèbres. Il se proposoit par là d'être mieux instruit
 des opinions des autres Sectes, ce qui contribua beaucoup à la solidité
 de son savoir. *Diogene Laërce* s'en exprime ainsi: „ Il s'attacha princi-
 pement à trois sectes, savoir des Academiciens, des Peripateticiens,
 & des Stoïciens., (**) Cependant il suivoit surtout Carneade, avec
 lequel il fut *jusqu'à la vieillesse*, comme le dit *Cicéron*. Cette expres-
 sion étant équivoque, il y en a qui la rapportent à Clitomachus, mais
Brucker l'entend avec plus de raison de Carneade, qu'on peut
 le voir au nombre des Vieillards célèbres, puisqu'il n'est mort qu'à
 un grand âge. Comme Carneade ne mettoit rien par écrit, Clitomachus
 composa plusieurs Ouvrages, où il donnoit l'exposition de sa doctrine, &
 qu'il rendit très célèbre par là, comme le témoigne *Diogene Laërce*, à
 l'article de son nom. (***)

XI. Sa renommée prenant ainsi tous les jours de nouveaux ac-
 croissements, les Atheniens lui donnerent le droit de Bourgeoisie,
 que ils l'avoient donné à son Maître Carneade. Nous tenons cer-
 tainement de *Symmachus*, Consul, & l'un des Orateurs les plus
 célèbres de son Siècle, qui la rapporte dans une de ses Lettres en ces
 termes. „ *L'assemblée* des Atheniens jugea Carneade de Cyrenien, &
 Clito-

*) Ὁξύτητι Φύσεως καὶ ἀκρὰ μελέτη εἰς πολὺ σοφίας ἐληλα-
 κώς.

*) Ἄνθρωπος ἐν ταῖς τρισὶν αἰρέσεσι διατρίψας, ἐν δὲ τῇ Ἀκαδημαικῇ,
 καὶ Περιπατητικῇ, καὶ Στωικῇ.

**) Καὶ τὰ Καρνεάδου μάλιστα διὰ τῶν συγγραμμάτων ἐφωτίσθη.

„Clitomachus le Phenicien, dignes du droit de Bourgeoisie ; honneur que les Romains ont fait de même à Zaleucus, Legislateur des Locriens.,” (*) *Diogene Laërce* remarque expressément, qu’ après la mort de Carneade, Clitomachus lui succéda dans l’Ecole, qui fut très florissante sous lui. (**) *Cicero* dit dans l’*Orateur* de *Cicéron* : „En revenant de ma Questure de Macedoine je passai à Athenes, où j’entendis de très grands hommes, l’Academie étant alors florissante, ce qu’on attribuoit à ce qu’elle étoit sous Charmides, Clitomachus & Eschine.,” (***) *L. Licinius Crassus*, l’homme le plus éloquent de son tems, exerça sa Questure l’an de Rome 1064, longtems après la mort de Carneade. C’est donc par erreur, qu’on trouve dans quelques Exemplaires *Carneades*, au lieu de *Charmides*. Ce dernier, aussi bien qu’Eschine, avoit été disciple avec Clitomachus. Au reste, s’il est vrai, comme d’habiles gens le pensent, que *Philon* ait succédé à Clitomachus dans l’Academie, l’an de Rome 1064, cela prouve que celui-ci a gouverné l’Ecole pendant trente ans. En effet Carneade mourut l’an 1033, & Clitomachus l’ayant aussi tôt remplacé, il s’est écoulé trente ans jusqu’à l’an 1063. *Scobellus* va nous apprendre, de quelle maniere il termina sa vie. „Clitomachus, dit-il, étant devenu malade, tomba en léthargie ; & ensuite ayant

(*) Nam & Carneadem Cyrenaeum, & Panum Clitomachum Atheniensis Curia civitate dignata est : iidem ut nostri Zaleucum, Legum Locrensiū conditorum, civitate donarunt. Symm. Epist. 65. Lib. X. Par Curia, Mr. Fabricius étend l’Ecole, dans sa *Bibl. Græc.* Lib. III. p. 56. Il a tort, ce me semble. *Curia*, *Kuria*, ή *kuria* ’Εκκλησία, c’est l’assemblée Républicaine du peuple Athenien, où l’on étoit de l’élection des Magistrats, du droit de Bourgeoisie. L’expression de Symmachus ne peut signifier autre chose.

(**) Numenius dit, dans *Euseb. Præf.* L. XIV. p. 739. Διάδοχος Καρνεάδου ή διατριβής καθίσταται Κλειτόμαχος. *Eusebe* avoit dit plus haut p. 726. qu’après Arcefilas, avoient paru Carneade & Clitomachus, qui rejettant les opinions de leurs prédécesseurs, avoient fondé la troisième Academie.

(***) *Audivi summos homines, cum Questor ex Macedonia venissem Athenas, florentes Academicam, ut temporibus illis ferebatur, quod eam Charmides, & Clitomachus. & Eschine* obtinebant.

recouvré l'usage de ses sens, il dit: *Je ne serai pas la dupe de l'amour de la vie.* Et là dessus il se procura une mort volontaire. „ (*) Il voit puisé ces principes dans la doctrine des Stoïciens. *Diogene* le Synique, & les Philosophes des autres Sectes, ont aussi donné de grands loges au meurtre de soi-même ; & c'est ainsi que *Democrite* & *Isochore* ont fini leurs jours. Les Chrétiens ont pensé tout autrement, moins ces paroles de Lactance : „ Il ne sauroit y avoir une action plus criminelle. Car si un homicide est coupable, parce qu'il fait périr un homme, celui qui se tuë lui même, commet un crime égal, puisqu'il détruit un homme. „ (**)

XII. Passons présentement aux Ecrits de Clitomachus, ou plutôt aux fragmens, & aux petites pièces détachées de sa doctrine, qui ont échappé à l'injure des tems. *Diogene Laërce* témoigne qu'il peut être mis à juste titre au rang des Auteurs *Polygraphes*. „ Il étoit si laborieux, dit-il, qu'il a écrit plus de quatre cens Volumes. „ (***) *Cicéron* appuie ce témoignage du sien. „ Clitomachus avoit beaucoup de talent. C'est ce que prouve la multitude de ses Livres. „ (****) Il parle entr'autres d'un Ouvrage de Consolation, dont il étoit l'auteur. „ J'ai lû, ce sont ses termes, le livre, qu'écrit autrefois Clitomachus aux Carthaginois ses Concitoyens, pour les consoler tant sur la ruïne de leur commune patrie, que sur leur captivité. On y trouve une Dissertation entiere de son Maître Carneade, contre cette Proposition : *Que le Sage peut être touché d'affliction après la*

(*) Κλειτόμαχος νοσήσας, καὶ ληθαργῶ περιπεσὼν, ὡς ἀνένηψεν, ἔδέν με, ἔφη, ἐξαπατήσῃ ἡ Φίλοσώφια, καὶ ἐξήγαγεν ἑαυτὸν τῇ βίῃ.
Stob. Florileg. Cap VII.

(**) Nihil hoc sceleratius fieri potest. Nam si homicida nefarius est, quia hominis extinguitur est; eidem sceleri obstrictus est, qui se necat, quia hominem necat. Instit. L III. Cap. 18.

(***) Οἱ δὲ εἰς τοσούτον ἤλασεν ἐπιμελείας, ὥστε ὑπὲρ τὰ τετρακόσια βιβλία συνέγραψε.

(****) Industria plurimum fuit in Clitomacho. Declarat multitudo librorum.

Memoires de l'Academie Tom. IV.

la destruction de sa Patrie., (*) Diogene Laërce nous a appris c
 dessus, que Carneade n'avoit rien laissé par écrit. Clitomachus l
 avoit donc rendue même service, que *Platon & Xenophon* ont ren- du
 à Socrate, en réduisant ses discours en Livres. Il est constant que
 Carthage fut détruite par Scipion, l'an de Rome 107 VIII. dix-h zix
 ans avant la mort de Carneade. Il faut donc que Clitomachus ait
 quitté Carthage pour aller à Athenes avant la troisième Guerre Punique
 On ne sauroit douter que la ruine de Carthage, cette Ville si florissan-
 te, si superbe, rivale de Rome, n'ait causé une douleur incroyable
 ceux de ses Citoyens, qui lui ont survécu, & en particulier à ceux
 qui ont essuyé la honte, & les rigueurs de la captivité. C'est pour
 relever un peu leurs esprits accablés par ce terrible choc, que Car-
 neade écrivit le Traité de Consolation, dont nous venons de parler.
 Il y a bien lieu de regretter, que Cicéron, qui l'avoit entre les mains,
 ne nous en ait donné aucun extrait. Pour ce qui regarde le fonds
 même de la Question, Cicéron soutient au III. Livre des Tuscu-
 lanes; *Que le Sage n'est pas susceptible de chagrin.* Elle étoit propo-
 sée dans l'Ouvrage de Clitomachus en ces termes: *Que le Sage peut*
être touché d'affliction, après la destruction de sa Patrie. Carneade
 avoit avancé le contraire. Clitomachus permet l'affliction, comme
 une espèce de remède à de tels malheurs, mais Cicéron la désapprouve.
 „Or, continuë-t-il au même endroit, par les belles choses qu'y dit
 „ce grand Philosophe, pour fortifier les affligés contre une calamité
 „présente, on juge qu'elles ne sont pas même nécessaires contre une
 „calamité inveterée; & que si ce même livre avoit été envoyé aux
 „Carthaginois quelques années après, il auroit trouvé dans leurs coeurs
 „moins de playes à guérir, que de cicatrices à effacer. Car on fait
 „assez, que par un décroissement insensible, & imperceptible, la dou-
 „leur s'affoiblit d'elle-même en vieillissant. Non qu'il arrive aucun
 chan-

(*) *Legimus librum Clitomachi, quem illa eversa Carthagine misit consolandi gratia ad captivos civeque suos. In eo est disputatio scripta Carneadis, quam se ait in Commentarium retulisse. Cum ita positum esset, videri fore in egritudine sapientem, patria capta: que Carneades contra dixerit, scripta sunt.* Tusc. III. 22 Je me suis servi de la Traduction de l'Abbé d'Olivet. Tom. II. p. 60.

„changement à la chose qui en a fait le sujet. Mais c'est que l'expérience nous enseigne ce que la raison auroit dû nous apprendre ; „savoir, que les malheurs de la vie sont en effet beaucoup moins „grands, qu'il ne le paroissent d'abord.,” * Le dogme de la secte Cyrenai-
que étoit : *Que l'on pouvoit se laisser aller au chagrin, lorsqu'il surve-*
noit quelque accident inopiné. A cela Cicéron répondoit : *Qu'il ne*
faloit pas que rien parut inopiné au Sage. Et en parlant ainsi, il avoit
devant les yeux l'image de Socrate, dont *Élien* rapporte ces belles
particularités : „Xantippe avoit coutume de dire, que dans ce nom-
bre presque infini de révolutions, auxquelles la République fut ex-
posée, on vit toujours Socrate conserver le même visage, soit qu'il
sortit de la maison, soit qu'il y rentrât. Car il envisageoit tout du
même oeil, & conservoit même l'enjoüement de son humeur, tant
il étoit au dessus de tous les sujets de tristesse & de crainte.

* *Tuscul. de*
l'Abbé d'Oli-
vet. ub. sup.
p. 60. 61.

XIII. Clitomachus écrivit quatre Livres, *sur la suspension du ju-*
gement, περὶ ἐποχῆς. C'est Cicéron qui nous en instruit en ces ter-
mes. „Je n'avancerai rien qu'on puisse soupçonner être de mon in-
vention ; j'aurai pour garant Clitomachus, qui a vécu jusqu'à
la vieillesse avec Carneade, & qui avoit beaucoup d'esprit,
comme en ont les Phéniciens, & beaucoup d'application à l'e-
tude. On a quatre Livres de lui, *sur la suspension du jugement.* Ce
que je vais rapporter, est tiré du premier.” (*) Nous verrons plus
bas le passage que Cicéron tire de ce Livre premier, & nous l'exami-
nerons. Clitomachus a encore traité la même matière dans deux
autres Ouvrages, adressés l'un au Poète *Lucilius*, & l'autre au Consul
Censorinus. Recourons encore à Cicéron. „J'ai expliqué, dit-il,
peu auparavant, en suivant Clitomachus, comment Carneades s'ex-
primoit là dessus ; écoutez ce que Clitomachus lui-même en dit,
dans le Livre qu'il a adressé au Poète Lucile. Il avoit déjà écrit sur
le même sujet dans un Ouvrage adressé à L. Censorinus, celui qui a

Qq 2

été

(*) *Nec vero quicquam ita dicam, ut quisquam id fingi suspicetur : a Clitomacho sumam, qui usque ad senectutem cum Carneade fuit, homo & acutus, ut Pænus, & valde studiosus & diligens. Et quatuor ejus libri sunt, de sustinendis assensionibus. Hac autem qua jam dicam sunt sumpta de primo. Acad. IV. 31.*

„été Consul avec M. Manilius. Voici donc à peu près ses propres termes. “(*) Nous rapporterons ailleurs les paroles mêmes dont il s’agit, & nous les éclaircirons.

L. Marcius Censorinus, & *M. Manilius*, furent Consuls l’an de Rome 100v. après qu’on eut résolu la troisième guerre Punique, pour la conduite de laquelle les deux Consuls furent envoyés en 100vi. Le Poète Lucile, qui tient le premier rang parmi les Satyriques, avoit seize ans en 100xvi. & servoit alors comme Cavalier sous Scipion, dans la guerre de Numance. Mais on ne sauroit déterminer l’année dans laquelle Clitomachus dédia ses Livres au Poète, ou aux Consuls. La *Chronique de S. Jerome* met la mort de Lucile à l’an 100cl. Ces Observations répandent sur l’âge de Clitomachus un jour, dont *Jonfius* s’est déjà aperçu.

XIV. Peu s’en faut qu’on n’ait mis notre Philosophe dans le Catalogue des Athées*; mais il faut le laver de cette tache, que *Theophile*, Evêque d’Antioche a voulu lui imprimer. Voici l’endroit où il en parle. „Pythagore affirme que les Dieux ne prennent aucun soin des hommes; & combien de choses l’Académicien Clitomachus n’a-t-il pas avancées en faveur de l’Atheïsme?“ (**) Le savant *Reinesius* a examiné ce passage †, & sa Critique mérite de trouver place ici. „Nous ne nous arrêterons point, dit-il, à discuter si ce que *Theophile* dit de Pythagore est vrai. Il y a une infinité de témoins qui déposent que ce Philosophe avoit de tout autres sentimens sur le sujet de la Divinité. Vient ensuite la proposition interrogative concernant Clitomachus, qui est équivalente à une proposition affirmative: Combien de choses l’Académicien Clitomachus n’a-t-il pas avancées en faveur de l’Atheïsme?“

* Voy. *Reimann. Hist. A-theism.* p. 171.

† Voy. *Lib. III. Cap. 6.*

(*) Explicavi paulo ante Clitomacho autore, quomodo ista Carneades diceret; accipe quomodo eadem dicantur a Clitomacho in eo libro quem ad Caium Lucilium scripsit Poeta cum scripsisset isdem de rebus ad L. Censorinum, cum qui Consul cum M. Manilio fuit. Scripsit igitur his fere verbis. ubi. sup. 32.

(**) Φησί τε (ὁ Πυθαγόρας) τῶν πάντων θεῶν ἀνθρώπων μηδὲν φροντίζειν ὅποσα τε Κλιτόμαχος ὁ Ἀκαδημικός περὶ ἀθεότητος εἰσηγήσατο. *Theop. ad Autolyt. Lib. III.*

„a-t-il pas avancées en faveur de l'Atheisme? 'A Pythagore Athée
 „il joint Clitomachus, comme ayant pareillement douté de l'exi-
 „stence des Dieux, & bientôt après il associe à Clitomachus Critias,
 „Protagoras, & Euemerus de Tégée, ou de Messene, sur l'impiété
 „duquel on peut consulter Plutarque. Au reste on fait assez ce que
 „c'étoit que les ἀποφατικοὶ λόγοι, *negantes sermones*, au sujet des
 „Dieux. Mais, (continuë Reinesius, dans le Texte Latin duquel il
 „y a ici une faute d'impression à corriger,) mais, à l'égard de Clito-
 „machus Carthaginois, disciple de Carneade, & le plus distingué des
 „Philosophes de la nouvelle Academie, au jugement d'Athenée, j'ai
 „été longtems en suspens, s'il falloit lui imputer la même hérésie, jus-
 „qu'à ce qu'à la fin j'ai trouvé dans Sextus Empiricus, l'argument en
 „forme de Sorites, dont il se servoit pour nier l'existence des Dieux.
 „C'est celui que Theophile a en vûe dans ce passage, & j'ai admiré le
 „laborieux assortiment d'impiété & de folie, que ce raisonnement
 „rassemble.“ J'admire la précipitation de Reinesius à condamner Cli-
 „tomachus, lui qui a été si facile à excuser Pythagore. Le Sorites de
 „Clitomachus ne m'a point épouventé; & bien loin d'y voir l'Atheïs-
 „me, il m'a paru uniquement propre à détruire de fond en comble le
 „Polytheïsme, & à renverser la gloire des fausses Divinités. Mais rap-
 „portons l'endroit même de *Sextus Empiricus*. * „Carneade, dit-il, * Liv. IX
 „avoit aussi proposé quelques Argumens en formé de Sorites. Son Ch. 182.
 „Ami Clitomachus les a mis par écrit, comme étant d'une très grande
 „force; & voici comment ils sont construits. Si Jupiter est Dieu,
 „Neptune, entant que son frere, est aussi Dieu. Si Neprune est
 „Dieu, Achelous l'est aussi. Si Achelous l'est, le Nil l'est aussi. Si le
 „Nil l'est, chaque fleuve le fera. Si les fleuves le sont, il en fera de
 „même des ruisseaux; si les ruisseaux, cela nous mene aux torrens. Or
 „les torrens ne sont par des Divinités, donc Jupiter n'est pas Dieu.“
 „Tout va bien jusqu'ici; & personne d'entre nous ne pense autrement.
 „Mais ce qu'il ajoute, cloche furieusement. Si ces choses étoient des
 „Divinités, Jupiter seroit aussi Dieu. Ce ne sont donc pas des Divinités.
 „Raisonnement indigne d'un Philosophe! Mais allons plus loin, afin
 „de mieux approfondir son sentiment. L'Academicien *Costa* presse

le même Argument contre le Stoïcien *Balbus*, dans le Traité de *Cicéron de la Nature des Dieux*. „Si la Lune est une Divinité, il faut que l'Etoile du matin, que les autres Planètes, que toutes les Etoiles fixes soient de la même condition. Et pourquoi n'en fera pas l'Arc-en-Ciel les Nuées les Tempêtes Vous en

„ferez part (de cet honneur) aux Pluyes, aux Ondées, aux Orages, aux Tourbillons.“ * Mais toute cette longue & fatigante dispute est terminée d'un seul coup par cette sentence de *Cicéron*. „Ainsi raisonneoit *Carneade*, non dans la vue de saper l'existence des Dieux, (car qu'y auroit-il de moins convenable à un Philosophe?) mais pour montrer avec évidence que sur cette matière les Stoïciens ne disent rien de plausible.“ † C'est ce qui engage *Cotta* à terminer son discours par cette exclamation. „Pour apprendre donc l'existence des Dieux, & quels ils sont, je dois m'adresser à d'autres qu'à

vous, Stoïciens.“ * Au reste ce n'est point ici le lieu d'examiner les erreurs des Stoïciens sur la Divinité. Il y a un Traité de *Jacobus Thomassius*, qui peut suffire à ceux qui voudront en savoir davantage là dessus. (*)

XV. *Sextus Empiricus* nous apprend que *Clitomachus* étoit ennemi de la Rhetorique, comme les autres Académiciens. „*Critolaus*, dit cet Auteur, & les Académiciens, entr'autres *Clitomachus* & *Charmidas*, font ordinairement beaucoup d'objections contre la Rhetorique. Ils ne bannissent pas les Arts des Villes, reconnoissant qu'ils sont fort utiles à la vie ; tout comme nous ne chassons pas les Fermiers de nos métairies, ni les Bergers de nos troupeaux. Mais pour l'Art de parler (*ῥητορικὴν*) ils en sont les ennemis déclarés, ils le poursuivent en tous lieux ; & le chassent de par tout, comme le Législateur de *Crete*, qui a défendu l'entrée de son Ile à tous ceux qui se vantent d'éloquence, & sont arrogamment enflés de ce talent. *Lycurgue* Législateur de *Sparte*, & émule de *Thales* Législateur de *Crete*, a donné aux *Lacédémoniens* la même Loi.“ On peut lire le reste dans *Sextus*. Le passage suivant de *Stobée* doit peut-être se

(*) C'est celui de *Expositione Mundi Stoica*.

rapporter à ceci. „Clitomachus, dit-il, comparoit la Dialectique, que à la Lune, parce que, comme cet Astre, elle a des accroissemens & des décroissemens perpetuels.“ (*) Mr. *Brucker*, après avoir examiné le sens de ces mots, décide ainsi. * „Il semble avoir voulu désigner par cette comparaison la fortune de l'Academie, qui après avoir été fort brillante sous Arcefilas, dont les disciples furent en grand nombre, décrut, & reprit ensuite un nouvel éclat sous Carneade. Comme donc la Dialectique est ornée par les secours du génie & l'éloquence, de même l'Academie reçut ses accroissemens & les décroissemens.“ Mais avec la permission de cet Auteur si versé dans l'Histoire Philosophique, nous sommes d'un tout autre avis. Il ne s'agit là, ni de l'état florissant de l'Academie, ni de sa décadence; il est uniquement question de la Dialectique, cet Art de disputer, & de juger du vrai & du faux; Art, dont les Philosophes de ce tems-là faisoient un très fréquent abus par le moyen de la Rhétorique. Cela l'exposoit presque à un mépris universel; & *Stobée*, dans l'endroit que nous avons cité, allégué les temoignages de plusieurs Auteurs, qui jugeoient fort désavantageusement de la Dialectique. „Arcefilas avoit dit, que les Dialecticiens étoient semblables à ceux, qui jouent aux jeux de hazard, en ce que les tromperies sont fort de leur goût; & qu'ainsi on doit fuir la Dialectique, comme n'étant propre qu'à mettre tout en confusion. Carneade disoit que la Dialectique ressemble à un Polype, qui dévore ses pieds, lorsqu'ils se sont accrus; les Dialecticiens, quand ils se sont fortifiés dans leur Art, réfutant de même leurs propres opinions.“ Clitomachus ne s'écarta pas de la doctrine de son Maître, en comparant la Dialectique à la Lune. En effet comme la splendeur de cet-Astre, va tantôt en augmentant, tantôt en diminuant, de même il y a des tems où la Dialectique est considérée, d'autres où elle est plongée dans l'obscurité; des tems où on l'admire, d'autres où on la méprise; des tems d'élévation & d'abaissement; des tems

* *Hist. Ph*
Tom. I. p. 77

(*) Κλειτόμαχος ἔικαζε τὴν Διαλεκτικὴν τῇ Σελήνῃ. καὶ γὰρ ταύτην ἔπαύεσθαι φθίνεσαν καὶ αὐξάνειν. *Stob. Serm. LXXX.*
p. 473.

tems enfin où elle produit des fruits, & d'autres où elle les dévore. Carneade lui même en fournit un exemple, lorsqu'étant à Rome, il y déclama avec une force égale pour & contre la justice. C'est de Lactance que nous tenons cette Histoire. „Carneade, dit-il, ayant été „envoyé à Rome par les Athéniens, fit un discours fort étendu sur „la justice, en présence de Galba, & de Caton le Censeur, le plus „grands Orateurs de ce tems-là. Mais le lendemain il détruisit tout ce „qu'il avoit dit par un discours contraire, & fit main basse sur cette „justice à la quelle il avoit donné de grands éloges; en quoi il ne „montra pas la gravité d'un Philosophe, qui doit être d'un jugement „rassis, & ferme dans ses opinions. Mais c'étoit plutôt un simple „exercice Oratoire, qui lui laissoit la liberté de soutenir le pour & le „contre.“ Caton, au rapport de Pline, * fut d'avis qu'il falloit con-
 * VII. 30. gédier sur le champ un pareil homme, avec les raisonnemens duquel
 il étoit si difficile de parvenir à la connoissance de la Vérité.

XVI. Diogene Laërce, dans sa Vie d'Aristippe, cite les Livres de Clitomachus sur les Sectes, en ces termes. „Meleagre, dans son „second Livre des Opinions, & Clitomachus dans le premier qu'il „écrit des Sectes, leur attribuent (aux Philosophes Cyrenaïques) d'a- „voir également méprisé la Physique & la Dialectique.“ (*) Sur quoi Menage remarque fort bien; „qu'on ne sait qui étoit ce Meleagre, ni „quand il a vécu, & que les Livres de Clitomachus sur les Sectes ne „se trouvent cités en aucun autre endroit.“ Arbenée introduit aussi notre Philosophe sur la Scène, en lui donnant de pompeux éloges. „C'est pourquoi, dit-il, Clitomachus Carthaginois, l'un des plus „profonds dans la spéculation que la nouvelle Academie ait produit „a dit d'un Athlete Thebain de son tems, qui surpassoit tous les au- „tres hommes en force, que c'étoit parce qu'il se nourrissoit de vian- „de

(*) Μελέαγρος δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ περὶ δόξων, καὶ Κλειτόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ περὶ τῶν αἰρέσεων, Φάσιν, αὐτὸς (τῆς Κυρηναϊκῆς) ἄχρηστα ἡγεῖσθαι τὸδε φυσικὸν μέρος καὶ το διαλεκτικόν.
 Lib. II. § 92,

de de chevre." C'est encore de Clitomachus que Stobée a tiré les vers suivans :

*Dans le sein des plaisirs la fortune perfide
Détruit notre bonheur par un souffle rapide ;
Et les raffinemens de notre volupté
Sont, hélas ! le jouet de sa légèreté. (*)*

XVII. Tout ce qui nous reste à présent de la Philosophie de Clitomachus, est dû aux soins de Cicéron, qui rapporte ce passage remarquable, tiré des Livres adressés au Poète Lucile, & au Confesseur Censorin, sur la Suspension du jugement. „Voici à peu près, dit Cicéron, ce qu'a écrit Clitomachus. Car ses paroles me sont bien connues, parce que ce Livre renferme les premiers Elémens, & comme toute la doctrine des mêmes matieres dont nous traitons à présent. Mais revenons à ce qu'il a écrit, &c. “ (**) Mettons ici sous les yeux du Lecteur l'état de la Question, dont il s'agissoit. Le quatrième Livre des Questions Académiques contient une dispute de Cicéron avec Lucullus. Celui ci avoit affirmé, qu'il y a des choses d'une vérité incontestable. Il en appelle d'abord à l'expérience des sens. Il dit que les idées, ou les choses apperçues par les sens, sont

(*) *Ταῖς ἐν παθεῖν ἀντιπνεύσας ἡ τύχη,
Τὰ πάντα συγχέει, πάντα ναυαγῆν ποιεῖ,
Τὰ τῇ Φρονήσει καὶ λογισμοῖς ὁρθία
Εμπεπονῆσθαι δοκῶντα πρὸς τὸ ζῆν καλῶς.*

Ce que Grotius a rendu par ces Vers Latins :

*Fortuna resans prospere ventibus
Conturbat, afflictaque naufragio omnia,
Quæcumque vita condicte suaviter
Prudens repererat ingenî solertia.*

(**) *Scripti Clitomachus his fere verbis. Sunt enim mihi nota, propterea quod ipsarum earum rerum, de quibus agimus, prima institutio, & quasi disciplina illo libro continetur. Sed scriptum est ita. On trouvera plusbas la suite du passage, qui renferme la doctrine de Clitomachus, § XX.*

Memoires de l'Académie Tom. IV.

R r

font claires & certaines: Qu'il n'est pas possible, que celui qui ressent de la douleur, n'ait point de douleur; & qu'il n'y ait aucune différence entre un homme qui souffre, & un autre qui est dans la Volupté; Que des perceptions des sens naissent & se forment les notions, *évolus*, & de là les Arts, les Sciences, la Sagesse, la Vertu, qui par conséquent ne sont pas des choses fausses, mais doivent au contraire être regardées comme fixes & immuables. Cicéron prenant le parti opposé, & soutenant le sentiment des Academiciens, il s'efforce de répondre à Lucullus. Il prétend que celui qui donne son assentiment aux choses, qui lui paroissent véritables, tombe souvent dans l'erreur; qu'il ne faut point se fier aux sens; que la plupart des choses sont probables, mais qu'il n'y en a aucune de certaine: Que la probabilité suffit pour la vie humaine. Cicéron, qui étoit un grand partisan du doute, se sert donc ici de tout ce qui lui paroît propre à établir la doctrine des Academiciens, & il en appelle principalement au témoignage de Clitomachus. C'est ce qui nous oblige à y répondre encore quelque jour.

XVIII. C'est de Socrate que la plupart des Sectes Philosophiques, mais surtout l'Academie, tirent leur origine. Avant ce père de la Philosophie Morale, les études des Sages avoient principalement pour objet la Physique. Cicéron exprime avec beaucoup d'élégance les services que Socrate rendit à la Philosophie. „C'est lui, dit-il, comme tout le monde le reconnoit, qui a retiré la Philosophie de l'entée des profondeurs & des mystères de la Nature, à laquelle tous les Philosophes s'occupoient avant lui, & qui l'a appliquée à la vie commune, en s'attachant à l'examen des vertus & des vices, & de tout ce qui concerne le bien & le mal. Il croyoit que la recherche des choses, qui se passent au Ciel, étoit trop élevée au dessus de nos connoissances, & que, quand même nous y atteindrions, elle seroit inutile pour bien vivre. Dans tous les discours de Socrate, ajoute Cicéron, il n'affirmoit rien lui-même, mais il se bornoit à réfuter les autres.“ (*) *Turnebus* remarque fort bien à l'occasion de ce passage; que

(*) *Socrates mihi videtur, id quod constat inter omnes, primus a rebus occultis, &*

qu'il y avoit dans ce tems-là une prodigieuse quantité de Sophistes, qui se vantoient de tout savoir, & qui gâtoient l'esprit de la jeunesse par la persuasion d'une faulx science. C'est ce qui jetta Socrate dans la route opposée, & lui fit faire profession de ne rien savoir, afin de délivrer les hommes de leurs erreurs. Les Academiciens qui vinrent après Socrate, sous la conduite de Platon, réduisirent la Philosophie en art, ce que Socrate n'avoit point approuvé. Cicéron continuë donc au Chapitre suivant en ces termes. „On tient de Platon trois manieres differentes de philosopher ; la premiere a pour objet la vie & les moeurs ; la seconde traite des secrets de la nature ; la troisieme s'occupe à la dispute, & sert à juger du vrai & de faux, de ce qui est bon, ou mauvais dans le discours, de ce qui s'accorde avec nos idées, & de ce qui y répugne. “ (*) Cela nous apprend que la Philosophie de Platon étoit divisée en trois parties, la Morale, la Physique & la Dialectique.

XIX. Or le but de la Dialectique chez les premiers & les principaux Philosophes, tant de l'Academie, que de l'Ecole Peripateticienne, n'étoit pas de remplir l'esprit de doutes, & de le faire flotter dans l'incertitude ; au contraire ils la regardoient comme un moyen de déterminer avec plus de certitude le vrai & le faux. Cicéron nous le dit en termes exprés. „La troisieme partie de la Philosophie (la Dialectique) étoit traitée par les uns & les autres suivant ce principe ; c'est que le discernement de la verité, bien qu'il tire son origine des sens, n'appartient pourtant pas aux sens. Ils vouloient que l'Ame (*Mens*) soit le juge des choses, & croyoient qu'on ne pou-

Rr 2

voit

ipsa natura involutis, in quibus omnes ante eum Philosophi occupati fuerunt, advocavisse Philosophiam, & ad vitam communem adduxisse, ut de virtutibus & vitiis, omninoque de rebus bonis & malis quæreretur: cœlestia autem vel procul esse a nostra cognitione censeret, vel si maxime cognita essent, nihil tamen ad recte vivendum. Hic in omnibus fere sermonibus ita disputat, ut nihil affirmet ipse, refellat alios. Acad. Quæst. I. 4.

(*) Fuit ergo jam accepta a Platone philosophandi ratio triplex : una de vita & moribus ; altera, de natura & rebus occultis ; tertia de differendo, & quid verum, quid falsum, quid rectum in oratione pravumque, quid consensiens, quid repugnet judicando. lb. 5.

voit s'en rapporter qu'à elle, parce qu'il n'y a qu'elle qui apperçoit
 ve les choses d'une manière simple, unique, & telles qu'elles sont
 „ . . . Ils ne plaçoient la *Science* nulle part que dans les *notions* de
 „ l'Âme, & dans les raisonnemens. “ (*) Qui est-ce qui ne s'apperçoit
 pas que cette Dialectique est la même chose que la Logique de notre
 Philosophie moderne. Dans toutes les idées que nous formons par
 le secours des sens, il demeure quelque chose de confus, qui nous
 empêche de les bien distinguer, ou définir. C'est ce qui fait que les
 Corps eux-mêmes avec toutes leurs qualités & propriétés, sont si
 profondément cachés, qu'il faut se borner aux seules conjectures &
 aux opinions. Il en est tout autrement des notions, que nous acque-
 rons par la voye de l'Entendement: il n'y reste aucun doute, tout
 y est clair & distinct. Mais revenons à notre sujet. De savans hom-
 mes ont remarqué que Platon a marché à cet égard sur les traces de
 Socrate; que, pour confondre l'arrogance des Sophistes, il a sou-
 vent envelopé ses Dogmes, qu'il n'est pas aisé de démêler dans les
 disputes, où il les place, & qu'il n'a jamais rien décidé avec auto-
 rité en public, surtout à l'égard des choses, dont les sens nous procur-
 ent seuls la connoissance; en sorte qu'il ne levoit le voile que dans ses
 entretiens particuliers, & en faveur des Disciples, auxquels il vou-
 loit bien révéler les mystères de sa doctrine. Depuis, lorsque le cré-
 dit des Stoïciens se fut accru, & que les Dialecticiens abusant de plus en plus
 de leur art, eurent commencé à tenir une conduite tout à fait inso-
 lente, *Arcefilaüs*, pour confondre les uns & les autres, changea le
 plan de la Philosophie Academique, & enseigna à douter de tout. *Mr.*
Brucker ayant recherché & développé avec beaucoup d'exaëtitude les
 causes de cette espece de révolution, c'est à lui que nous renvoyons.
 * *Hist. Phil.* T. I. p. 352. Après la mort d'*Arcefilaüs*, qui joignoit beaucoup d'esprit à
 beaucoup de savoir, l'Academie devint décriée, sous prétexte
 qu'elle

(*) *Tertia Philosophia pars (Dialectica) sic tractabatur ab utrisque: quanquam oritur
 a sensibus, tamen non esse judicium veritatis in sensibus. Mentem volebant rerum
 judicem: solam censebant idoneam, cui crederetur, quia sola cerneret id, quod semper
 est simplex & unius modi, & tale quale esset. . . . Scientiam autem nusquam
 credebant, nisi in animi notionibus ac rationibus. Ac. Qu. IV. 8.*

qu'elle détruisoit toute Science, & qu'elle étoit ennemie de la Religion & du culte des Dieux. C'est ce qui engagea Carneade, successeur d'Arcefilaus, à adoucir ce que son prédécesseur avoit avancé de trop dur, pour ne pas encourir l'indignation du peuple & des Magistrats. Cicéron nous apprend comment il s'y prit ; ce fut, en avouant qu'il y avoit des choses certaines dans la Nature, mais en ajoutant que la foiblesse de l'entendement humain ne permettoit pas d'appercevoir & de comprendre les essences des choses ; qu'ainsi il n'y avoit point à la vérité de Science ; mais qu'il restoit l'opinion, dont les probabilités étoient l'objet. D'où il conclüoit, *qu'il ne falloit rien affirmer, ou nier à la légère ; que le Sage suivoit les ressemblances, & les probabilités, en se réglant sur leurs degres, & que c'est là dessus qu'il se gouvernoit dans tout les cours de sa vie* *.

* Acad.

XX. Après ces éclaircissémens, il sera facile de parvenir à l'intelligence du fragment de Clitomachus, que Cicéron nous a conservé ; & dont voici les termes : „Que le sentiment des Academiciens consiste à dire, que les choses different entr'elles de maniere qu'il y en a qui paroissent plus probables, & d'autres moins : mais que cela ne suffit pas, pour qu'on puisse dire des unes qu'elles peuvent être apperçues, & des autres qu'elles ne peuvent l'être, ou qu'il y a plusieurs choses probables qui se trouvent fausses ; & que rien de ce qui a été une fois apperçu & connu, ne peut être faux. *Il dit donc, que ceux-là se trompent beaucoup, qui prétendent, que l'Academie détruit le temoignage des sens, puisqu'elle n'a jamais avancé qu'il n'y ait, ni couleur, ni saveur, ni son : Que tout s'est réduit à soutenir, que les sens ne renfermoient point un caractère propre de vérité & de certitude, qui ne se trouvât nulle part ailleurs. A quoi Clitomachus ajoute ; qu'il y a deux sens dans lesquels on affirme que le Sage suspend son jugement ; l'un, par où l'on entend qu'il ne donne en effet son assentiment à rien ; l'autre, qui lui attribue seulement de s'abstenir de répondre, & de prononcer sur quoi que ce soit, pour approuver ou pour condamner, pour nier ou pour affirmer. Que cela étant ainsi, le premier jugeoit à propos de n'acquiescer jamais à rien ; au lieu que l'autre se déclaroit pour la probabilité, la*

„suivant partout où elle se trouvoit, & disant, *Oui*, ou *Non*, suivant qu'elle existoit, ou qu'elle manquoit. Mais, comme il faut que celui-là même, qui refuse son acquiescement à tout, agisse pourtant, & se mette en mouvement, il laisse subsister les représentations des choses, qui nous excitent à l'action; qu'il admet pareillement les cas, où étant interrogés, nous pouvons répondre pour & contre, en suivant uniquement pour règle que les choses nous paroissent ainsi, pourvu que nous nous gardions bien d'acquiescer en effet; & il pousse les précautions jusqu'à ne pas permettre qu'on se conforme en général aux idées sous lesquelles les choses se présentent à nous, mais seulement à celles qui ne souffrent aucune difficulté.“(*)

C'est là le précis de la doctrine de Clitomachus; après quoi Cicéron ^{* Académie.} rapporte une histoire de Carneade *, qui a moins de rapport à notre ^{Quest. IV. 45.} sujet. Il faut se rappeler encore ici un passage de *Sextus Empiricus*, où il s'efforce de faire sentir la différence qu'il y a entre la Philosophie Sceptrique, & celle de l'Académie. Il y attribue à Carneade, & à Clitomachus d'enseigner: *que la probabilité nous entraîne à l'acquiescement par une pente extrêmement forte.* (**)

XXI.

(*) *ACADEMICIS placere; esse rerum ejusmodi dissimilitudines, ut alia probabiles videantur, alia contra. Id autem non esse satis, cur alia percipi posse dicas, alia non posse; propterea quod multa falsa probabilia sint, nihil autem falsi perceptum & cognitum possit esse. Itaque AIT, vehementer errare eos, qui dicant ab Academia sensus eripi, a quibus nunquam dictum sit, aut colorem, aut saporem aut sonum nullum esse. Illud sit disputatum, non inesse in his propriam, qua nusquam alibi esset, veri ac certi notam: ADJUNGIT CLITOMACHUS: dupliciter dici ASSENSUS SUSTINERE Sapientem: uno modo, cum hoc intelligatur, omnino eum rei nulli assentiri: altero, cum se a respondendo, ut aut approbet quidpiam, aut improbet, sustineat, neque negat aliquid, neque ajat. Id cum ita sit: alterum placere, ut nunquam assentiatur; alterum tenere, ut sequens probabilitatem, ubicunque hac occurrat, aut deficiat, aut ETIAM, aut NON, respondere possit; nec ut placeat, eum qui de omnibus rebus contineat se ab assentiendo, moveri tamen, & agere aliquid, reliquit ejusmodi visa approbati, quibus ad actionem excitamur; item ea qua interrogati in utramque partem respondere possumus, sequentes tantum modo quod ita visum sit, dum SINE ASSENSU: neque tamen omnia ejusmodi visa approbati, sed ea qua nulla re impedirentur. Acad. Qu. IV. 32.*

(**) Πειθεσθαι καὶ πιθανὸν εἶναι μετὰ προσκλήσεως σφοδρᾶς, Hypotyp. Lib. I. c. 33.

XXI. Je ne ſçai ſi en examinant bien tout ce raisonnement de Clitomachus, & même toutes les *Questions Academiques* de Ciceron, on ne ſe convaincra pas que ce ſont de pures Logomachies. Les Academiciens ne détruiſent pas le témoignage des ſens. Ils ne nient point qu'en regardant la craye, nous ne voyons la couleur blanche. Mais ils ne veulent pas qu'on donne à cela le nom de certain & de vrai, ils aiment mieux celui de probable. Pourquoi ? C'eſt parce qu'il pourroit être, que la blancheur, quoiqu'elle paroiffe, n'exiſtât pas. Mais on peut éviter le même écueil par la ſimple circonſpection dans nos jugemens ; & ce moyen ſeul ſuffit pour nous guider dans la connoiſſance des choſes à un degré d'evidence, qui faſſe ſuccéder la certitude à la probabilité. Il y a plus ; les choſes que nous comprenons, non par les ſens, mais par l'entendement, en les déduiſant des principes inébranlables de l'Ontologie & de la Métaphyſique, du principe de Contradiction, & de celui de la Raiſon ſuffiſante, des définitions exactes, & des propositions identiques ; ces choſes, diſ-je, peuvent atteindre à un ſi haut degré de vérité, qu'il ne reſte plus aucun lieu à l'équivoque & au doute. C'eſt ce que paroît avoir reconnu S. Auguſtin, qui ſe déclare redevable de pluſieurs connoiſſances à la Dialectique. „Par elle, *dit-il*, je connois nombre d'autres vérités. Mais qu'il eſt grand ce nombre ; comptez-les, ſi vous le pouvez. S'il n'y a que quatre Elémens dans le monde, il n'y en a pas cinq. S'il n'y a qu'un Soleil, il n'y en a pas deux. La même Ame ne ſauroit être mortelle, & immortelle. L'homme ne ſauroit être tout à la fois heureux & miſérable. Le Soleil n'éclaire pas le même endroit, où la Nuit régné. Ou nous ſommes éveillés préſentement, ou nous dormons. Ce que je crois voir eſt un corps, ou n'en eſt pas un. C'eſt la Dialectique qui m'a appris que toutes ces choſes, & bien d'autres qu'il ſeroit trop long de rapporter ici, ſont des Vérités, de quelque manière que nos ſens ſoient diſpoſés. C'eſt d'elle que je tiens, qu'en poſant l'antécédent de l'une des choſes, dont je viens de montrer la liaiſon, le conſéquent en découle d'une manière

„re nécessaire.“ (*) Ainsi raisonne avec vérité ce saint Docteur, en qui se trouvoient au même degré la pénétration de l'esprit, & l'etendué du favior.

XXII. Mais, pour mieux nous assurer qu'il n'y avoit que Logomachie dans tout cela, écoutons encore Cicéron, qui porte son jugement en ces termes. „Pour moi, quoique je regarde comme un très grand effort, de ne pas tomber d'accord des choses qui s'offrent à nos sens, de résister aux opinions, & de suspendre un acquiescement auquel nous sommes si portés; quoique je convienne avec Clitomachus, que les travaux de Carneade peuvent être comparés à ceux d'Hercule, en ce qu'il a délivré nos esprits de l'acquiescement, c'est à dire, de celui qui est téméraire, & fonde sur la simple opinion, comme d'une bête féroce & cruelle: cependant, pour dire quelque chose en faveur du sentiment opposé, qu'est-ce qui pourroit empêcher la détermination de celui qui suit les probabilités, lorsqu'aucune difficulté ne les combat? Donc, de l'aveu de Clitomachus, Carneade condamnoit, non l'acquiescement même, mais la témérité de cet acquiescement: il permettoit de suivre la probabilité, quand rien n'y mettoit obstacle. Et qui empêche encore que de telles probabilités ne portent le nom de certitude & de vérité?“

(*) Per istam novi alia multa vera. Sed quam multa sint, numerate si potestis. Si quatuor in mundo elementa sint, non sunt quinque. Si Sol unus est, non sunt duo. Non potest una anima & mori, & esse immortalis. Non potest homo simul & beatus & miser esse. Non hic & Sol lucet, & nox est. Aut vigilamus nunc, aut dormimus. Aut corpus est quod videre videor, aut non est corpus. Hac & alia multa, qua commemorare longissimum est, per Dialecticam didici vera esse, quomodo sese habeant sensus nostri. Ipsa porro docuit me, si cuius eorum qua per connexionem modo proposui pars antecedens assumpta fuerit, trahere necessario id quod connexum est. August. L. III. contr. Acad. §. 29.

(**) Ego enim, etsi maximam actionem puto, repugnare visis, obistere opinionibus, assensus lubricos sustinere, credoque Clitomacho ita scribenti, Herculis quendam laborem exalatum a Carneade, quod ut feram & immanem belluam, sic ex animis nostris assensum, id est, opinionem & temeritatem extraxisset: tamen ut ea pars defensoris relinqueretur, quid impedit actionem ejus qui probabilia sequitur, nulla re impediens? Ergo, Clitomacho faciente, temeritatem assensus sustuleras Carneades, non assensum ipsum.

On trouve les mêmes idées dans ce passage des *Offic.* „ Il y a des gens doctes & éclairés; qui nous arrêtent ici pour nous demander, si nous sommes assez conséquens, lors qu'en'avançant d'un côté, que rien ne peut être connu, nous ne laissons pas de l'autre de traiter diverses matieres, & de donner même des préceptes sur nos devoirs. Je voudrois que ces gens-là fussent bien au fait de notre sentiment. Nous ne sommes assurément pas de ceux dont l'esprit se repaît volontairement d'erreur, & n'a jamais aucun principe qu'il digne suivre. Quel étrange caractère n'est-ce pas que celui-là, & quelle vie qu'une vie passée sans raisonnement, & même sans principes de conduite? Pour nous, au lieu de dire avec les autres, qu'il y a des choses certaines, & qu'il y en a d'incertaines, nous nous en éloignons, en nous bornant à reconnoître des choses qui sont probables, & d'autres qui ne le sont pas. Qu'est-ce donc qui pourroit m'empêcher de suivre les choses, qui me paroissent probables, & de désapprouver celles qui leur sont contraires. Par ce moyen j'évite également l'orgueil des décisions, & cette temerité légère, qui est fort différente de la sagesse. “ (*)

XXIII, Au reste Clitomachus, bien qu' Auditeur assidu de Carneade, ne paroît pas avoir suivi son Maître en tout; & cela paroît évi-

dem-

assensendam erat probabili, nulla re impediante. Quid autem obstat quominus quicquid probabile nomine certi ac veri appellatur. Acad. Quæst. IV. 34.

(*) *Occurritur autem nobis, & quidem a doctis & eruditis quærentibus, satim constanter facere videamur, qui cum percipi nihil posse dicamus, tamen & aliis de rebus dissertimus, & hoc ipso tempore præcepta officii persequamur. Quibus vellem scire, cogitaret nostra sententia. Non enim sumus ii, quorum vagetur animus errore, nec habeat unquam quid sequatur. Quæ enim esset ista mens, vel qua vita potius, non modo disputandi, sed vivendi ratione sublata? Nos autem et ceteri alia certa, alia incerta esse dicunt, sic ab his dissentientes, alia probabilia, contra alia non probabilia esse dicimus. Quid est igitur quod me impediat, ea quæ mihi probabilia videantur sequi, quæ contra improbare, atque afirmandi arrogantiam vitare, fugere temeritatem, quæ a sapiente diffidet plurimum. De Offic. II. 2.*

* Acad. Qu.
IV. 42

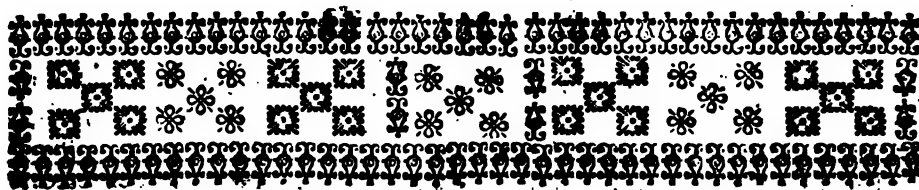
« Il étoit permis de former des opinions, sans les fonder sur aucune connoissance ; & l'on dit que Carneade l'a prouvé. Pour moi, je m'en rapporte plus à Clitomachus, qu'à Philon & à Métrodore, & je crois que Carneade à plutôt discoursu sur ce sujet, qu'il ne l'a prouvé. » (*) Et ailleurs ; « Duquel (il s'agit de Calliphon, qui regardoit * l'agréable & l'honnête comme la dernière fin) Carneade apportoit tant de soin à défendre le sentiment, qu'il sembloit le prouver. Malgré cela Clitomachus assuroit, qu'il n'avoit jamais bien pu découvrir, quelles étoient les véritables idées de Carneade. » (**) Mais, pour mettre des bornes à ce Memoire, nous croyons avoir suffisamment montré, qu'il y avoit plusieurs raisons de cette incertitude, dans laquelle les Academiciens sembloient se plaire à flotter. Car, ou bieu ils soutenoient le pour & le contre, pour cacher leur sentiment ; ou ils se proposoient de confondre la vanité des Sophistes & des Stoïciens ; ou ils vouloient faire parade de leur érudition & de leur esprit ; ou enfin ils étoient tombés dans cette incertitude, pour avoir négligé les véritables règles de la Dialectique & de la Logique, pour n'avoir pas assez observé la difference qu'il y a entre les divers objets de nos connoissances, & pour avoir surtout ignoré ces grands Principes de Métaphysique, qui donnent une force irrésistible à la vérité. A moins qu'on n'aime mieux faire de toute cette dispute Philosophique une simple Logomachie, ou aussi la prendre dans un sens favorable, & lui donner la meilleure interprétation, dont elle soit susceptible. Quoiqu'il en soit, c'est en vain que la cohorte des Sceptiques, ou amis du doute, provoque à l'Académie ; & les efforts de savant Evêque d'Avranches, dans son *Traité de la foiblesse de l'esprit humain*, sont

(*) *Licet nihil percipere, & tamen opinari: quod a Carneade dicitur probatum. Equidem Clitomacho, plusquam Philoni, aut Metrodoro credens, hoc magis ab eo disputatum quam probatum puto. Acad. Qu. IV. 24.*

(**) *Ejus (Calliphontis) sententiam Carneades ita studiose defendebat, ut eam probare etiam videretur. Quanquam Clitomachus affirmabat, nunquam intelligere se potuisse, quid Carneadi probaretur. Ibid. 45.*

343
 utiles, pour établir, comme il le prétend, que la seule Rai-
 sonneiroit donner une connoissance certaine de la verité, s'appuie
 sur le témoignage de notre *Clitornachus*, & regrettant la perte
 l'Ouvrage sur la suspension du jugement. Nous le regrettons
 bien persuadés qu'il serviroit de preuve à notre doctrine, &
 celle de Mr. *Huet*. Le savant Professeur de Zurich, Mr. *Zim-
 mer*, a d'ailleurs pleinement satisfait à toutes les difficultés de Mr.
 dans sa troisieme Dissertation contre les Incrédules, publiée
 1.





REFLEXIONS SUR L'ESPACE ET LE TEMS,

PAR M. EULER.



I.

Les principes de la Mécanique sont déjà si solidement établis, qu'on auroit grand tort, si l'on vouloit encore douter de leur vérité. Quand même on ne seroit pas en état de les démontrer par les principes généraux de la Métaphysique, le merveilleux accord de toutes les conclusions, qu'on en tire par le moyen du calcul, avec tous les mouvemens des corps tant solides que fluides sur la terre, & même avec les mouvemens des corps célestes, seroit suffisant pour mettre leur vérité hors de doute. C'est donc une vérité incontestable, qu'un corps étant une fois en repos restera perpétuellement en repos à moins qu'il ne soit troublé dans cet état par quelques forces étrangères. Il sera de même certain, qu'un corps étant une fois mis en mouvement, le continuera perpétuellement avec la même vitesse & selon la même direction, pourvu qu'il ne rencontre des obstacles contraires à la conservation de cet état.

II. Ces deux vérités étant si indubitablement constatées, il faut absolument qu'elles soient fondées dans la nature des corps : & comme c'est la Métaphysique, qui s'occupe à rechercher la nature & les propriétés des corps, la connoissance de ces vérités pourra servir de guide dans ces recherches épineuses. Car on sera en droit de rejeter

ter dans cette science tous les raisonnemens & toutes les idées, quelques fondées qu'elles puissent paroître d'ailleurs, qui conduisent à des conclusions contraires à ces vérités ; & on sera autorisé de n'y admettre, que de tels principes, qui pourront subsister avec ces mêmes vérités. Les premières idées, que nous nous formons des choses, qui se trouvent hors de nous, sont ordinairement si obscures & si peu déterminées, qu'il est extrêmement dangereux d'en tirer des conséquences, dont on puisse être assuré. C'est donc toujours une grande avance, quand on connoit déjà d'ailleurs quelques conclusions, auxquelles les premiers principes de la Metaphysique doivent aboutir : & ce sera sur ces conclusions, qu'il faudra régler & déterminer les premières idées de la Metaphysique.

III. Aussi les Metaphysiciens, bien loin de nier ces principes de la vérité desquels la Mécanique nous assure, ils tâchent plutôt de les déduire & de les démontrer par leurs idées. Mais ils reprochent aux Mathématiciens, qu'ils attachent ces principes mal à propos à des idées de l'espace & du tems, qui n'étoient qu'imaginaires & destituées de toute réalité. Il est bien possible, qu'un vrai principe, sans qu'il perde rien de sa vérité, peut être énoncé d'une manière incommode, & qui ne répond pas aux idées précises qu'on doit avoir des choses ; mais alors le Metaphysicien sera obligé de remédier à ce défaut, & de substituer dans l'énonciation de ces principes des idées réelles au lieu des imaginaires.

IV. Ce sera donc le cas de ces principes de la Mécanique, qui se trouvent enveloppés dans les idées de l'espace & du tems, qui suivant les Metaphysiciens n'ont aucune réalité : donc il faudra voir, s'il est possible d'en retrancher ces idées imaginaires, & de substituer à leurs places les idées réelles, dont nous nous sommes formés par voie d'abstraction ces idées imaginaires : de sorte pourtant que le sens & la force de ces principes n'en soit point altérée. Car il n'y a aucun doute, que les corps, en se réglant sur ces principes, ne se règlent point sur des choses, qui ne subsistent que dans notre imagination : il est plutôt certain, que ce sont des choses bien réelles,

auxquelles se rapportent les loix, que les corps suivent dans la conservation de leur état.

V. Il est donc certain, que s'il n'étoit pas possible de concevoir les deux principes allégués de la Mécanique, sans y mêler les idées de l'espace & du tems, ce seroit une marque sûre, que ces idées n'étoient pas purement imaginaires, comme les Metaphysiciens le prétendent. On en devroit plutôt conclure, que tant l'espace absolu, que le tems, tels que les Mathématiciens se les figurent, étoient des choses réelles, qui subsistent même hors de notre imagination ; puisqu'il seroit absurde de soutenir, que des pures imaginations pouvoient servir de fondement à des principes réels de la Mécanique.

VI. Pour entrer dans cette recherche, je commencerai par le premier principe qui régarde l'état de repos des corps. Dans la Mécanique on regarde l'espace & le lieu comme des choses réelles, & par ce principe on soutient, qu'un corps, qui se trouve en quelque lieu sans mouvement ; y demeurera perpétuellement, à moins qu'il n'en soit chassé par quelque force étrangère : dans ce cas donc ce corps demeurera toujours dans le même lieu par rapport à l'espace absolu. Je veux bien que les idées de l'espace & du lieu ne soient que des notions imaginaires ; mais qu'on m'indique les réalités, sur lesquelles les corps se régissent en obéissant à cette loi ; & au lieu desquelles les Mathématiciens se contentent de se servir des idées imaginaires de l'espace & du lieu.

VII. On me dira d'abord, que le lieu n'est autre chose que la relation d'un corps par rapport aux autres qui l'environnent. Substituons donc cette idée à la place de celle du lieu, & on sera obligé de dire, qu'en vertu de ce principe un corps se trouvant une fois dans une certaine relation avec les autres corps, qui l'environnent, il s'obstinera de demeurer toujours dans cette même relation. C'est à dire, on doit soutenir qu'un corps A étant environné des corps B, C, D, E &c. tâchera de se conserver perpétuellement dans ce même voisinage. Et partant quand le Mathématicien dit, qu'un corps en repos reste dans le même lieu, par rapport à l'espace absolu : le Metaphysicien dira, que ce corps

corps se conserve dans la même relation par rapport aux autres corps qui l'environnent.

VIII. Voyons si ces deux manieres de s'exprimer sont équivalentes, & si l'on peut toujours, sans tomber en erreur, substituer l'expression metaphysique au lieu de la mathématique, de la verité de laquelle nous sommes déjà convaincus. Supposons donc, pour mettre d'accord ces deux expressions, que tant le corps A, que ses voisins B, C, D, E &c. soient en repos ; & dans ce cas le corps A en se conservant dans le même voisinage des corps B, C, D, E &c. selon la règle metaphysique, demeurera aussi dans le même lieu selon la règle mathématique ; & dans ce cas on ne se trompera pas en substituant celle-là au lieu de celle-cy.

IX. Supposons, pour mieux fixer nos idées, que le corps A est dans une eau dormante, & pendant qu'il demeure au même lieu, il demeurera aussi dans le même voisinage des particules d'eau, qui l'environnent, & ce corps se réglera également sur la règle de mathématique que sur celle de metaphysique. Mais supposons à présent, que l'eau commence à couler, & selon la règle de mathématique le corps restera neantmoins dans le même lieu, à moins qu'il ne soit entraîné peu à peu par la force de l'eau. Or selon la règle metaphysique ce corps devroit d'abord suivre parfaitement le mouvement de l'eau, pour se conserver dans le voisinage des mêmes particules de l'eau, qui l'avoient environné auparavant. Dans ce cas donc la règle tirée de la Mathématique ne sera plus conforme à la verité.

X. Consultons là-dessus l'expérience, laquelle nous apprendra, qu'un corps ayant été en repos dans une eau dormante, sera mis en mouvement, dès que l'eau commence à couler, ce qui semble favoriser la règle conçue metaphysiquement. Mais la Mécanique nous fait voir très clairement, que le corps ne suit pas le courant d'eau, qu'entant qu'il est frappé par les particules de l'eau ; & que c'est par conséquent une force étrangere qui met ce corps en mouvement. Donc sans cette force le corps resteroit aussi bien en repos, dans l'eau courante, que dans la dormante, & partant le corps dans la conservation de son état de repos ne se règle point sur les corps, qui l'environ-

vironnent immédiatement. De là il s'ensuit, que ce qui est nommé *lieu* dans la Mécanique ne souffre pas l'explication de la Méta physique, par laquelle on veut, que le lieu ne soit autre chose, que la relation du corps par rapport aux autres corps, qui l'environnent.

XI. A cette qualité des corps, en vertu de laquelle ils tâchent de se conserver dans leur état, tant de repos que de mouvement, on donne le nom d'*Inertie*. Donc cette *Inertie*, comme nous venons de voir, ne se règle point sur les corps voisins ; mais il est bien sûr, qu'elle se règle sur l'idée du lieu, que les Mathématiciens regardent comme réelle, & les Méta physiciens comme imaginaire. N'étant donc pas permis de substituer à la place de cette idée du lieu, la relation du corps aux corps circonvoisins, il ne reste que les corps éloignés, par rapport auxquels on puisse juger de ce principe général de l'inertie. Mais je doute fort, que les Méta physiciens voudront hasarder de soutenir, que les corps en vertu de leur inertie soient disposés de conserver la même relation par rapport aux corps, qui en sont éloignés à quelque distance : car il seroit aisé de faire voir la fausseté de cette explication par de semblables réflexions, que je viens de faire sur les corps immédiatement voisins.

XII. S'ils disoient que c'étoit par rapport aux étoiles fixes, qu'il falloit expliquer le principe de l'inertie : il seroit bien difficile de les réfuter, vu que les étoiles fixes, étant elles mêmes en repos, sont éloignées de nous, que les corps qui se trouvent en repos par rapport à l'espace absolu, comm'on le regarde dans la Mathématique, le seroient aussi par rapport aux étoiles fixes. Mais outre cela que ce seroit une proposition bien étrange & contraire à quantité d'autres dogmes de la Méta physique, de dire, que les étoiles fixes dirigent les corps dans leur inertie ; cette règle se trouveroit également fausse, s'il n'étoit permis d'en faire l'application aux corps qui sont proches de quelque étoile fixe. Ces choses remarquées, il ne reste plus des idées réelles, qu'on pourroit substituer à la place de ces idées prétendues imaginaires de l'espace & du lieu, dans l'explication de l'*Inertie*.

XIII. Nous voyons donc que l'idée du lieu, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne peut être expliquée par aucune relation

aux

aux autres corps ni voisins, ni éloignés, & partant les notions mathématiques, qu'on croit répondre à l'idée mathématique du lieu, ne sont pas propres pour être introduites dans l'explication du principe mécanique dont il s'agit. C.à d. la conservation de l'état des corps se règle sur le lieu, tel qu'on le conçoit dans la Mathématique, & point du tout sur le rapport aux autres corps. Or on ne sauroit dire, que ce principe de Mécanique soit fondé sur une chose, qui ne subsiste que dans notre imagination : & de là il faut conclure absolument, que l'idée mathématique du lieu n'est pas imaginaire, mais qu'il y a quelque chose de réel au monde, qui répond à cette idée. Il y a donc au monde, outre les corps qui le constituent, quelque réalité, que nous nous représentons par l'idée du lieu.

XIV. Les Metaphysiciens ont donc tort, quand ils veulent bannir entièrement du monde l'espace & le lieu, en soutenant que ce ne sont que des idées abstraites & imaginaires. Par conséquent les preuves qu'ils apportent pour maintenir leur sentiment, quelques fortes qu'elles puissent paroître, seront en effet mal fondées, & il faut qu'il y soit caché quelque paralogisme. Il est vrai que les sens ne sont pas capables de nous fournir les idées de l'espace & du lieu, & que ce n'est que par réflexion, que nous nous formons ces idées. De là ils concluent que ce ne sont que des idées abstraites, semblables aux idées des genres & des espèces, qui n'existent que dans notre entendement, & auxquelles il ne répond aucun objet réel. Mais il me semble que cette conclusion est précipitée : car pour peu qu'on réfléchisse à soi même, on s'appercvra aisément, que la manière dont on parvient à l'idée de l'espace & du lieu, est bien différente de celle, dont nous nous formons les idées des genres & des espèces. Et on se tromperoit fort, si l'on vouloit soutenir, qu'il n'existe pas des choses, dont nous n'avons d'autres idées que par réflexion.

XV. Je suis d'accord que toutes les choses qui existent, sont parfaitement déterminées ; & , si nous retranchons de l'idée d'un tel objet, une ou quelques déterminations, qu'il en nait une idée générale, à laquelle il ne répond plus d'objet existant. C'est ainsi que nous nous formons l'idée de l'étendu en général, en retranchant des

idées des corps toutes les déterminations, hormis l'étendue. Mais l'idée du lieu qu'un corps occupe, ne se forme pas en retranchant quelques déterminations du corps ; elle résulte en ôtant le corps tout entier ; de sorte que le lieu n'ait pas été une détermination du corps, puisqu'il reste encore, après avoir enlevé le corps tout entier avec toutes ses quantités. Car il faut remarquer, que le lieu qu'un corps occupe est bien différent de son étendue, parce que l'étendue appartient au corps, & passe avec lui par le mouvement d'un lieu à l'autre ; au lieu que le lieu & l'espace ne sont susceptibles d'aucun mouvement.

XVI. Je ne veux pas entrer dans la discussion des objections, qu'on fait contre la réalité de l'espace & du lieu ; car ayant démontré, que cette réalité ne peut plus être revoquée en doute, il s'ensuit nécessairement, que toutes ces objections doivent être peu solides ; quand même nous ne serions pas en état d'y répondre. Si l'on croit absurde, que tous les différents lieux, ou parties de l'espace, soient semblables entr'eux, ce qui seroit contraire au principe des indiscernibles ; je ne sais pas si ce principe est si général, qu'on pense ; peut-être qu'il n'est applicable qu'aux corps & aux esprits ; généralité, dont on pourroit bien être content : mais comme l'espace & le lieu sont des choses si essentiellement différentes des esprits & des corps, on n'en sauroit juger par les mêmes principes.

XVII. La réalité de l'espace se trouvera encore établie par l'autre principe de la Mécanique, qui renferme la conservation du mouvement uniforme selon la même direction. Car si l'espace & le lieu n'étoient que le rapport des corps coexistans, qu'est-ce que seroit la même direction ? On sera bien embarrassé d'en donner une idée, par la seule relation mutuelle des corps coexistans, sans y faire entrer celle de l'espace immobile. Car de quelque manière, que les corps se meuvent & changent de situation entr'eux, cela n'empêche pas, qu'on ne conserve une idée assez claire d'une direction fixe que les corps tâchent de suivre dans leur mouvement, malgré tous les changemens, que les autres corps subissent. D'où il est évident, que l'identité de direction, qui est une circonstance fort essentielle dans les principes généraux du mouvement, ne sauroit absolument être expliquée

pliquée par la relation, ou l'ordre des corps coëxistants. Donc il faut qu'il y ait encore quelque autre chose de réel, outre les corps, à laquelle se rapporte l'idée d'une même direction; & il n'y a aucun doute, que ce ne soit l'espace, dont nous venons d'établir la réalité.

XVIII. Les idées de l'espace & du tems ont presque toujours eu le même sort, de sorte que ceux qui ont nié la réalité de l'un, ont aussi nié celle de l'autre, & réciproquement. On ne fera pas donc surpris, qu'en établissant la réalité de l'espace, nous reconnoissons aussi le tems, comme quelque chose de réel, qui ne subsiste pas seulement dans notre esprit, mais qui coule réellement en servant de mesure à la durée des choses. Nous avons une idée très claire du tems, & il convient, que nous nous la formions des successions des changemens, que nous remarquons : dans cette vue je tombe d'accord, que l'idée du tems n'existe que dans notre imagination. Mais on a lieu de demander, si l'idée du tems, & le tems même, ne sont pas des choses différentes entr'elles? & il me semble, que les Metaphysiciens, en détruisant la réalité du tems, ont confondu le tems même avec l'idée que nous en avons.

XIX. Le Principe du mouvement des corps, en vertu duquel un corps mis en mouvement le doit continuer avec la même vitesse selon la même direction, ce principe, dis-je, nous fournit de nouvelles preuves, non seulement pour la réalité de l'espace, mais aussi pour celle du tems. Car, puisque le mouvement uniforme décrit des espaces égaux en tems égaux, je demande premièrement, qu'est-ce que c'est des espaces égaux, suivant le sentiment de ceux qui nient la réalité de l'espace? Je doute fort, que les Metaphysiciens se hazarderont de dire, que l'égalité des espaces se doit juger par l'égalité du nombre des monades, qui les remplissent : car ils devroient soutenir, que les monades fussent également dispersées par tous les corps. Mais quand même ils voudroient se tenir à cette explication ; elle seroit renversée dès le moment, qu'on

considérerait en mouvement les corps, par rapport auxquels on voudrait déterminer l'égalité des espaces. Car nous concevons, & le principe du mouvement nous apprend, que lorsqu'un corps parcourt des espaces égaux, l'égalité des espaces ne dépend nullement des autres corps, qui l'environnent, & qu'elle demeure la même, à quelques changemens que soient exposés les autres corps.

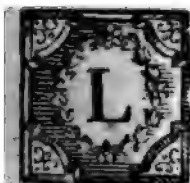
XX. Il en est de même de l'égalité des tems ; car si le tems n'est autre chose, comme on veut dans la Metaphysique, que l'ordre des successions ; de quelle manière rendra-t-on intelligible l'égalité des tems ? On prétend que chaque être du monde est assujéti à des changemens continuels, & que c'est la succession de ces changemens, qui cause le tems. Suivant cette explication deux tems devroient être égaux, pendant lesquels arriveroit le même nombre de successions. Mais si l'on considère un corps, qui parcourt des espaces égaux en tems égaux, de quels changemens, ou de quel corps, faut-il juger de l'égalité de ces deux tems là ? Ou veut on, que tous les corps soient assujétis à des changemens également fréquents, de sorte qu'il reviendrait au même quel corps qu'on voudroit choisir, pour mesurer l'égalité des tems sur le nombre des changemens, qui y arrivent. Mais je suis sûr, que pour peu qu'on pesera cette explication, on y trouvera tant d'autres inconveniens, qu'on s'avisera aisément de l'abandonner.

XXI. Il ne s'agit pas ici de notre estime de l'égalité des tems, qui dépend sans doute de l'état de notre ame ; il s'agit de l'égalité des tems, pendant lesquels un corps qui se meut d'un mouvement uniforme parcourt des espaces égaux. Comme cette égalité ne sauroit être expliquée par l'ordre des successions, aussi peu que l'égalité des espaces par l'ordre des coëxistants, & qu'elle entre essentiellement dans le principe du mouvement ; on ne pourra pas dire, que les corps, en poursuivant leur mouvement se règlent sur une chose, qui

qui ne subsiste que dans notre imagination. On sera donc obligé d'avouer, comme on l'a été par rapport à l'espace, que le tems est quelque chose, qui subsiste hors de notre esprit, ou que le tems est quelque chose de réel, aussi bien que l'espace. Je m'adresse ici à ces Metaphysiciens qui reconnoissent encore quelque réalité dans les corps & dans le mouvement; car pour ceux qui nient absolument cette réalité, & qui n'accordent que des phenomenes, puisqu'ils regardent, tant le mouvement même, que les loix du mouvement, comme des chimères, je ne me flatte pas que ces réflexions fassent la moindre impression sur leur esprit.



REFLEXIONS SUR LA LIBERTÉ, PAR M. FORMEY.



Les matieres les plus rebattuës ne sont pas toujours celles qui ont été développées avec le plus de précision. Les mêmes preuves passent souvent de bouche en bouche, se répètent & s'écrivent une infinité de fois, sans acquiescer plus de distinction & de force. Et lors qu'il s'agit de questions sur lesquelles on est partagé, chaque parti se sert des raisonnemens qui sont une fois en usage, sans penser à les examiner, à les rectifier, s'ils en ont besoin, ou du moins à en augmenter la force, en poussant plus loin l'analyse des idées qu'ils renferment, & des principes sur lesquels ils se fondent. De là l'impossibilité de terminer les Disputes; l'erreur s'envelopant toujours dans ses obscurités, & la bonne cause n'étant pas accompagnée d'un éclat assez vif pour les dissiper.

Les remarques que je viens de faire me sont venues dans l'esprit en méditant sur la liberté, & en passant en revue le nombre infini de discussions, qui ont eu pour objet cette fameuse Question. Je n'ai pas dessein de la traiter dans toute son étendue; un de nos dignes Confrères s'étoit proposé cette tâche, * & si les circonstances lui avoient permis de la remplir, il auroit été superflu de vous entretenir de mes Réflexions. Leur principal but, pour vous le faire con-

noître

* Voy. *Ms.*
de l'Année
1745. pag. 91.

notre d'avance, fera de justifier la nécessité indispensable de l'existence des motifs dans toutes les déterminations de notre Liberté, & d'expliquer, avec toute la netteté dont je suis capable, leur influence & leur efficacité.

Que l'Homme ait le pouvoir de faire, ou de ne pas faire, certaines actions dans certaines occasions, c'est ce qui est généralement avoué. Cette notion commune sert de fondement au plan de la Société. Les Législateurs de toutes les Nations n'ont rien statué que conséquemment à ce Principe. Il n'est aucune Loi ancienne ou moderne, qui inflige des peines à un homme qui commet un meurtre dans un accès de délire, dans un transport de fièvre chaude, tandis qu'il n'est point de Loi, qui ne condamne légalement tout meurtrier, qui a eu l'usage des sens & de la Raison.

Il n'en faut pas davantage pour faire abjurer le sentiment de *Collins*, & de tous ceux qui croient avec lui que la détermination de nos actions est d'une nécessité absolue; que, quand nous prenons un parti, il étoit impossible, dans toute la force de ce terme, que nous en prissions un autre, & que notre apparence de liberté consiste en ce que nous portons quelquefois de bon gré les fers dont la Fatalité nous charge. Dans cette Hypothèse, il faut renoncer aux notions les plus évidentes de notre esprit. Il faut trouver aussi valables les raisons d'un détestable parricide, qui aura volontairement trempé ses mains dans le sang de son Père, que celle d'un phrénétique, qui aura commis le même crime dans l'état d'aliénation. Il faut, comme nous le ferons voir dans la suite, sapper tous les Axiomes, sur lesquels les Philosophes & les Géomètres ont établi leurs Démonstrations. Il faut regarder comme illusoires ces idées que tous ceux qui pensent, les savans aussi bien que les ignorans, ont constamment adoptées; c'est que telle personne qui s'est attiré le blâme universel, qui s'est même couvert d'opprobre & d'infamie, auroit pu suivre une autre route, faire usage de ses talens, & acquérir les suffrages de ceux qui la détestent. Oui: si la nécessité absolue régit nos actions, le tissu de celles qui forment la vie de *Cartouche* étoit aussi essentiel à ce fameux Voleur, que l'égalité des trois angles à deux droits l'est à un triangle.

angle: En un mot, il faut nous désavouer nous mêmes, pour acquiescer à cette supposition.

Voulez-vous que laissant les Philosophes, qui ont peut-être l'esprit imbu de préjugés, & qui seront suspects pour s'être passionnés dans cette querelle, nous interrogiions quelque témoin impartial, qui n'ait sûrement jamais ouï parler de *Coltus*, ou de *Spinoza*, ni de leurs Réfuteurs. Qu'on interroge un enfant de sept à huit ans, qui vaincu par quelque petite tentation proportionnée à son âge, ait fait une action qu'il fait lui avoir été défendue, & dont il craint le châtiement? Lui viendra-t-il jamais dans l'esprit d'alléguer pour sa défense qu'il n'a pas pu faire autrement, qu'il lui étoit impossible d'éviter cette action. Il se gardera bien d'employer une défense, dont il sent que la foiblesse & la fausseté redoubleront la colere de ses parens, & aggraveront sa peine. Mais, essayez de menacer cet enfant qu'il sera puni pour n'avoir pas lu & appris sa leçon, pendant que vous l'aviez renfermé dans l'obscurité, ou pour n'avoir pas pris une leçon de Danse, dans l'extrême acablement d'une maladie qui le prive de toutes ses forces; vos menaces lui paroîtront souverainement injustes, & si elles étoient suivies de l'effet, il vous regarderoit comme un vrai Tyran.

C'est en faisant ces Observations, fondées sur une Experience journaliere, que les anciens Philosophes eux-mêmes se sont fait les idées suivantes sur la Liberté. L'Homme, en qualité d'animal raisonnable, agit avec connoissance de cause, il a des vûes, des desseins. Quoique les objets qui frappent ses sens, occasionnent souvent les déterminations de sa volonté, elles partent pourtant d'un principe qui est en lui-même. Il n'est aucune force majeure qui puisse obliger l'homme à envisager comme bonne, une chose que le *dictamen* de son Entendement déclare mauvaise. L'Entendement présente donc les motifs à la Volonté, mais ces motifs ne lui font aucune violence, ils ne l'assujettissent à aucune contrainte. Preuve de cela, c'est qu'on peut résister aux motifs les plus puissants, & qu'on y résiste effectivement, qu'on change de vûes & de desseins, qu'on se détermine en diverses manieres, & qu'en un mot, de tous les êtres bornés, l'homme est

est le plus sujet aux variations & aux changemens. Donc les motifs ne font pas sur l'ame l'effet que produit sur le corps l'impulsion, cause étrangere qui agit aveuglement, & à laquelle le corps n'a pas le choix de céder ou de résister.

On parvient par le moyen de ces raisonnemens à saisir la difference réelle qui se trouve entre les diverses sortes de necessités. La *Necessité absolue*, Metaphysique, Geometrique, c'est celle qui découle de l'idée, de l'essence, de la possibilité intrinsèque du sujet auquel elle convient. La *Necessité hypostetique*, est celle qui suppose d'autres déterminations, que celle de l'essence, des déterminations, qui pourroient être, ou ne pas être, sans que le sujet cessât de conserver son essence. On peut la considerer sous deux faces. La première se nomme *Necessité Physique*, & consiste dans l'invariabilité des effets que produisent les Corps par leurs actions, & par leurs réactions, conformément au plan du Monde actuel. L'autre, qui est dite *Necessité Morale*, convient aux Etres intelligens, & procede de l'impression que font sur eux les motifs, par lesquels ils sont déterminés.

Tous les hommes du Monde peuvent être pris à témoin de ce que nous avançons : ils ont tous les semences, pour ainsi dire, de ces notions & de ces distinctions. Mais comme l'Ontologie naturelle ne va jamais fort loin, ils retombent aisément dans la confusion entre ces diverses sortes de Necessité, & sur tout entre les deux principales, la Necessité absolue, & la Necessité relative, ou conditionnelle, quoiqu'elles different autant entr'elles que le jour & la nuit.

Comme il importe infiniment de bien connoître cette difference, pour juger des questions qui ont été mûes sur la matiere que je traite, je vais m'arrêter un moment à la développer. Il n'y a que deux manieres de considerer les choses, *absolument*, & *hypostetiquement*. La première a lieu, lorsque nous nous bornons à envisager leur essence, ou leur définition, qui en tient la place; & qu'ainsi n'affirmant que ce qui est contenu dans cette essence, ou dans cette définition, nous n'y supposons rien au delà. La

seconde maniere existe, dès que nous ajoutons à l'essence d'autres dé-
terminations, qui n'en font pas partie, & qui n'en font pas même
une suite nécessaire, mais dans lesquelles seulement il n'y a aucune
répugnance avec l'essence du sujet. Ces déterminations n'existent
qu' hypothetiquement, & sous une condition donnée. De là vient
la différence qu'on fait en Logique entre *pradicata absoluta*, & *con-*
ditionata.

Or c'est dans cette distinction que se trouve la source des deux
sortes de Nécessités. Ce qui, considéré absolument & en soi, est tel
que le contraire est impossible, & implique contradiction, s'appelle
absolument nécessaire : au lieu que ce dont le contraire n'est impossi-
ble & contradictoire qu'à cause d'une condition donnée, a simple-
ment une *nécessité hypothétique*. Cela posé, il est évident que la né-
cessité absolue n'appartient qu'aux essences des choses, & aux attri-
buts qui ont leur raison suffisante dans cette essence. De là vient
l'immutabilité & l'éternité qu'on leur attribue avec raison. Ceux qui
ont cru cette doctrine dangereuse, étoient encore imbus de l'ancien-
ne doctrine Scolastique, suivant laquelle l'existence appartient à
l'essence, & entre dans sa notion. Ces deux choses sont néanmoins
tout à fait différentes, & il faut soigneusement les distinguer. L'es-
sence ne va pas au delà de la possibilité, ou plutôt, c'est la possibilité
même. Or cette possibilité séparée de l'existence est absolument né-
cessaire : ce qui est une fois possible, l'a été, & le sera toujours,
dans sa notion abstraite. Mais, pour faire passer ce possible à l'exi-
stence, il faut quelque chose de plus que la possibilité, il faut suppo-
ser un principe, une cause, une raison suffisante ; & par conséquent
cette existence est purement hypothétique, ou contingente.

Les exemples les plus familiers peuvent répandre du jour sur
la doctrine de la double Nécessité. Dans l'idée que je me fais d'un ani-
mal quelconque, il entre celle de quelques organes, par lesquels cet
Animal est tellement caractérisé, qu'il ne peut être confondu, ni
avec les êtres inanimés, ni avec les plantes, ni même avec les Ani-
maux, dont l'espèce diffère de la sienne. Ces organes appartiennent
tellement à l'idée que vous vous en faites, qu'en les ôtant, l'i-
dée

dée même s'évanouit. C'est donc en cela que consiste son essence, & c'est de là que découle la nécessité absolue de cette essence. Par la même raison tout ce qu'on démontre des nombres en Arithmétique, & des figures en Geometrie, leur convient absolument, & dans la plus rigoureuse nécessité ; parce que n'y ayant rien dans ces notions abstraites qui soit hypothétique & modal, tout y est essence & attribut, tout ce qui y a été une fois apperçu & connu, demeurera immuablement & éternellement tel.

Je ne fais après cela, s'il faut un grand degré de pénétration, ou un effort considerable d'attention, pour saisir la différence qui se trouve entre les deux sortes de Nécessité. Les confondre c'est pécher contre les premières règles de la Logique, attribuer au genre ce qui ne convient qu'à une espèce, ou passer d'une espèce à l'autre ; à peu près comme feroit celui qui attribueroit au Ciron toutes les propriétés de l'Elephant, sous prétexte que l'un & l'autre sont des animaux dotés des organes nécessaires à la vie. A la vérité, on ne seroit peut-être pas tombé dans cette équivoque, si Aristote & ses Sectateurs n'avoit pas employé le mot de *nécessité* dans les cas hypothétiques, & qu'ils y eussent substitué celui de *certitude*, de *convenance*, ou tel autre. Mais pouvoient-ils prévoir, qu'en dépit de toute Dialectique, on s'obstineroit à confondre dans cette matière le genre & l'espèce ?

J'avoüe que c'est à la preuve de sentiment qu'il faut recourir, pour se convaincre de la différence que nous venons d'établir. Comme on voudroit rendre cette preuve suspecte, & faire soupçonner qu'elle pourroit bien n'être qu'une pure illusion, donnons quelques Réflexions à en établir la force. Quand vous distinguez, dit-on, les genres & les espèces des Animaux, l'Oiseau du Quadrupede, la Fourmi du Lion, vous avez un garant incontestable de ces distinctions, vous voyez de vos propres yeux ce qui différencie ces Animaux. Mais quand vous faites diverses Classes de nécessités, & que vous avancez qu'il y en a une dont le contraire est impossible, & une autre qui n'importe pas l'impossibilité de son contraire, où sont vos preuves, & vos témoins ? Où voyez-vous le principe de ces différen-

ces, & qui vous assure que vous ne les forgez pas gratuitement ? Vous vous repaîsez donc de la flatteuse idée d'une Liberté, qui n'est fondée que sur la supposition de la possibilité des déterminations contraires à celles que vous suivez ; mais encore une fois cette possibilité n'est qu'une fiction. Voilà la difficulté ; travaillons à la lever.

Que la vue, ou même l'accord complet de tous les sens, soit plus propre à nous conduire à la conviction que le sentiment intérieur, c'est ce qu'il n'est pas aussi aisé de prouver que d'avancer. Tout au contraire nous affirmons qu'il n'y a point de comparaison à faire entre la force du sentiment & le témoignage des sens, la première se soutenant en tout tems & en tout lieu, au lieu que les sens sont sujets à mille variations & à mille erreurs, dont on trouve l'énumération par tout. Aussi l'existence des objets externes, qui ne nous sont connus que par leurs images, a-t-elle été contestée ; au lieu que personne n'a jamais osé former de doute contre l'argument de Des Cartes ; *Je pense : Donc je suis.* Or en examinant attentivement les notions évidentes renfermées dans l'argument de Descartes, on s'appercvra bientôt qu'elles sont aussi concluantes pour la liberté que pour l'existence.

La Pensée dans l'homme n'est autre chose que le témoignage intime, ou le sentiment qu'il a de ses idées par la réflexion. Ce témoignage le persuade qu'il existe, parce qu'il lui est impossible de concevoir qu'une même chose soit, & ne soit pas en même tems. C'est le néant tout pur qu'une pareille supposition, & il ne sauroit s'en former aucune idée. Au contraire il conçoit très bien toutes les choses qui ne sont point en contradiction, ni avec l'expérience, ni avec les premières notions de son esprit. Les Philosophes & le vulgaire entendent également par le mot de *possible*, ce qui ne répugne point à la pensée humaine ; ils reconnoissent également que l'existence est incompatible avec tout ce qui implique manifestement, & qu'elle ne convient qu'à ce qui n'est point contradictoire. Cette notion du possible & de l'impossible établit l'ancien Axiome ; *Rien ne se fait des rien* ; & conduit à l'argument de Des-Cartes, dont la force consiste à dire ; Je pense ; c'est un fait & un sentiment incontestable.

Donc

Donc il est impossible, qu'en pensant je ne pense pas. Donc j'existe. Appliquons ces idées à la Liberté.

Les mêmes raisons qui viennent de me prouver que je pense, m'engagent à affirmer, que je puis m'asseoir ou être debout, parler ou me taire, me tourner à droite ou à gauche, en un mot faire telle ou telle autre action, qui dépend de l'exercice des facultés de mon corps ou de mon ame. L'expérience & le sentiment se réunissent, pour me faire connoître, & mes facultés, & leurs differens usages. L'idée du possible inséparable de ma pensée me dicte, qu'au lieu d'écrire actuellement, je pourrois m'occuper à autre chose. Cette même idée est la source des reproches que je me fais, quand je m'impute les mauvaises suites d'une action, qu'aucune nécessité, ou force majeure, ne m'a engagé à faire. Le témoignage de ma pensée, bien loin de me disculper, m'accuse ; il me convainc avec toute l'évidence possible, que je pouvois ne pas agir, ou agir d'une manière diamétralement opposée. C'est par cette raison que les Philosophes ont donné le nom de *conscience* au sentiment de la pensée. Sans lui en effet l'homme n'auroit pas la faculté de juger de la moralité de ses actions, de s'apercevoir, si elles sont bonnes ou mauvaises, & de s'assurer, s'il lui convient de les commettre ou de s'en abstenir. Ainsi ce qu'on appelle communément *conscience* est inséparable de la liberté, & n'est pas moins réel que la pensée même. L'une & l'autre ont pour base notre sentiment, & les notions évidentes qui en sont une suite. Ce qui fait dire à l'homme qu'il pense, lui fait dire également que c'est lui qui se détermine à agir, ou à ne pas agir. Lui contester sa spontanéité, c'est détruire sa pensée. Quand une pierre tombe du toit par un accident qu'il ne pouvoit prévoir, & qu'elle lui meurtrit le bras, il ne s'impute point cette action ; mais il s'attribue toutes celles qu'il a faites de dessein prémédité, & avec choix ; il s'en applaudit, ou s'en repent, suivant qu'elles lui sont avantageuses ou nuisibles.

Mais nos adversaires prétendent que cela ne suffit point encore, & qu'il y a des exemples d'illusions aussi fortes que celles là, & qui remplissent ceux qui y sont livrés d'une persuasion aussi intime. Telle

est, par exemple, l'illusion d'un Païsan, qui s'imagine que sa volonté est la cause efficiente des mouvemens de son corps, qu'elle remue immédiatement ses bras & ses pieds, toutes les fois qu'il le juge à propos. Cet homme a par devers lui le fait & l'expérience, qui déposent d'une manière incontestable. Il n'y a point d'instant où il ne puisse donner des preuves authentiques de la faculté qu'il a de se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Tout cela est vrai; mais voyons quels sont les fondemens de l'opinion de ce Païsan, & s'ils sont à comparer avec ceux sur lesquels s'appuie la Liberté.

Je demande donc, où est la preuve de sentiment, à laquelle tout homme, Païsan, ou Philosophe, qui voudra admettre l'influence réelle & physique de l'Ame sur le Corps puisse en appeler? Que sent-il? Qu'il veut, & que ses organes agissent, après qu'il a voulu. Mais oseroit-on dire que qui que ce soit voye & sente ce passage, ce noeud entre la détermination de l'Ame & le mouvement du Corps. Je fais un mouvement, que j'avois conçu comme possible, avant que de le commencer. Je comprends, & je puis assurer, qu'il est une infinité de mouvemens, dont l'un n'est pas moins faisable que l'autre. Je sais de manière à n'en pouvoir douter, que quand je veux marcher je marche, & que plusieurs mouvemens de mon corps répondent parfaitement aux déterminations de ma volonté. Mais je ne saurois aller plus loin, sans passer les bornes de l'expérience. Elle garde un profond silence sur la manière dont la chose se passe, elle ne me fait apercevoir en aucune manière que ma volonté pousse mon bras. Quand je m'imagine donc qu'elle produit cet effet, de la même manière que mes doigts dirigent ma plume, je ne fais que m'embarasser d'une opinion très confuse, qui a plutôt l'air d'un instinct grossier que d'un raisonnement.

Qu'on juge après cela, de quel droit les Philosophes auxquels nous avons à faire, décident que comme le Païsan croit mouvoir son bras, quoiqu'il ne le meuve pas, il croit de même agir librement, quoiqu'il n'ait effectivement aucune liberté? La chose n'est point égale. En croyant mouvoir ses membres par l'action de sa volonté, il croit ce qu'il ne sent point, il met une conjecture à la place d'un fait.

fait. Mais quand il se juge libre, il en a la preuve de fait en main : car en faisant un pas à droite, il a une certitude égale qu'il fait ce pas, & qu'il pourroit le faire à gauche. Ainsi, qu'on admette ou qu'on rejette l'influence de l'ame sur le corps, les verités de sentiment, telles que la Liberté, n'en sauroient souffrir aucune atteinte.

Faisons une Remarque à cette occasion. C'est qu'en général toute Theorie, toute Hypothese, doit expliquer ce que nous connoissons par l'expérience, & que si elle est démentie par une seule verité, cela suffit pour démontrer sa fausseté. C'est ainsi qu'on a rejeté les Systemes de Ptolomée, & de Tycho-Brabé, parce qu'il n'est pas possible de les concilier avec les Observations Astronomiques. Il en est de même dans la Metaphysique. Le Philosophe qui entreprend quelque édifice sur la nature & sur les opérations de l'Ame, doit commencer sa marche, comme le Physicien, par s'appuyer sur des Observations, & sur des Experiences faites avec toute la précision imaginable. Or le sentiment, la reflexion, l'expérience interieure, sont les moyens que nous avons de découvrir la nature de l'Ame, comme nous nous servons des sens pour examiner celle des Corps. Ceux qui croient que les secours que nous avons dans la recherche des facultés de l'Ame, sont plus foibles & plus incertains que ceux qui nous guident dans les Observations sensibles, se trompent beaucoup. La difference est toute à l'avantage des premiers. Mille causes peuvent déranger l'action des sens, & des instrumens materiels, au lieu que le sentiment interne est fixe & invariable. C'est ce qui a fait soutenir à Des-Cartes, & à d'autres grands Philosophes, qu'il est plus aisé de connoître l'esprit humain que le corps.

Ajoutons que le Metaphysicien trouve dans la Science même dont il fait son objet, un preservatif contre toute Hypothese fondée sur de fausses notions. Ce n'est que la confusion de nos idées, qui engendre cette foule de Sophismes dont toutes les Sciences fourmillent. Or l'Ontologie, comme premiere partie de la Metaphysique, & source unique des connoissances dont nous sommes capables, développe & met dans tout leur jour les notions qui sont communes à tous les hommes. On les a fort bien nommées *directrices* ; leur fonction

tion est en effet de guider le Philosophe par l'application perpetuelle qu'il en peut faire à quelque sujet qu'il traite. En ramenant ainsi toutes les connoissances de l'esprit humain à des notions claires & distinctes, il est impossible de former jamais aucun Systeme combattu par l'Experience. La verité ne sauroit être en contradiction avec elle-même, ou avec des faits incontestables.

Pour revenir donc au sujet de nos Réflexions, c'est sans aucun fondement qu'on a objecté, que le sentiment n'est pas une preuve suffisante de la liberté, parce que nous ne connoissons pas intimement la nature & l'essence du Corps & de l'Ame. On pourroit se servir des mêmes armes pour combattre les démonstrations de *Newton* à l'égard des Loix du mouvement; les mêmes raisonnemens prouvent qu'on ne sauroit y faire aucun fonds. En effet toutes ces preuves,

* Voy. *Mem.*
de 1747.
370.

comme nous l'avons fait voir ailleurs, * sont établies sur une Proposition tirée de l'experience; & cette experience est moins incontestable que celle qui constitue le sentiment de la Liberté. Mais une pareille route mene au Pyrrhonisme le plus outré. Il n'en coutera gueres plus d'avancer, que ne connoissant pas la cause qui produit notre pensée, cette cause se plaît à nous repaître de vaines chimeres, & qu'ainsi notre existence n'est pas plus réelle que notre pensée. Il n'y a pas plus d'absurdité à affirmer qu'en croyant penser, on ne pense pas, qu'à soutenir qu'en croyant être libre, on ne l'est pas. Impugner la contingence des déterminations de la volonté, c'est donc combattre le principe même de contradiction, & détruire par là même la certitude de toutes nos connoissances. Les Elémens d'Euclide peuvent alors aller de pair avec les Contes des Fées, puisque les fictions extravagantes de ceux-ci ne répugnent pas plus à la possibilité, que les principes evidens & les conséquences démontrées des premiers. N'est-il pas bien surprenant après cela d'entendre *Spinoza*, qui bannit de son Systeme toute contingence, & par conséquent toute liberté, avertir presque à chaque page ses Lecteurs d'être en garde contre les idées grossieres que nous présentent les sens & l'imagination, & d'observer religieusement le précepte de Des Cartes, qui veut qu'on n'admette que des idées claires & distinctes, caracteres essentiels

essentiels de la Verité ? Est-il donc dans notre esprit des notions plus évidentes que celles du principe de contradiction, du possible & de l'impossible ? Pourquoi Spinoza n'y a-t-il aucun égard ? C'est, comme l'a dit quelque part * Mr. de *Voltaire*, en parlant d'*Epicure* & de „*Des-Cartes*, c'est que les hommes dans leurs sentimens, comme dans „leur conduite, suivent rarement leurs principes, & que leurs Sy- „stemes, ainsi que leurs vies, sont des contradictions.“ Dès que le „Philosophe, au lieu de commencer sa marche, en s'appuyant sur les notions du sens commun, prend un vol hardi pour aller brusquement à la source du vrai, il se trouve bientôt placé à celle des subtilités & des Sophismes.

* *Précis de la Métaph.*
Ch. II.

Le combat n'est pas encore fini ; mais il faut changer les batteries ; & faire face à d'autres combattans. Il n'y a gueres d'excès qui n'ait son excès contraire. Celui auquel nous nous sommes opposés jusqu'à présent, pousse la nécessité des actions morales jusqu'à la transformer en une vraie Fatalité. Effrayés des conséquences qui résultent de ce Dogme, d'autres Philosophes ont crû ne pouvoir s'en débarrasser, à moins qu'ils n'abjurassent toute sorte de Nécessité, & qu'ils ne laissassent notre Ame flottante, indéterminée, & ne recevant aucune impression de la part des motifs. Selon eux, Dieu a donné à l'Homme la faculté de choisir entre deux ou plusieurs objets, à l'égard desquels il a le pouvoir physique nécessaire, de sorte qu'il peut déterminer sa volonté, en mettant à part toutes les raisons & toutes les causes externes, qui pourroient le porter à préférer un de ces objets aux autres.

Ce Dogme de la Liberté d'Indifférence est insoutenable. *Col-*
lins & ses partisans n'ont pas eu de peine à en triompher, & les dé-
fenseurs de la Nécessité morale se sont joints à eux dans cette occasion.
„Vouloir, dit Mr. de *Leibnitz*, qu'une détermination vienne d'une
„pleine indifférence, absolument indéterminée ; c'est vouloir qu'elle
„viene absolument de rien. L'on suppose que Dieu ne donne pas cette
„détermination. Elle n'a point de source dans l'Ame, ni dans le Corps,
„ni dans les circonstances, puisque tout est supposé indéterminé, & la
„voilà pourtant qui paroît, & qui existe sans préparation, sans que rien

„s'y dispose, sans qu'un Ange, sans que Dieu même puisse voir, ou faire voir, comment elle existe.“ *

Nous ne prétendons pas néanmoins que les Philosophes, qui établissent la Nécessité morale, ayant fait cause commune avec *Collins*. S'il leur est arrivé de proposer les mêmes argumens, ils les ont appliqués fort différemment. Le plus fameux de tous est celui de deux bassins en équilibre, dont l'un ne peut faire remuer l'autre, de sorte que pour changer leur état, il faut qu'il survienne quelque poids dans l'un de ces bassins. Ceux qui poussent trop loin la force de ce raisonnement, en perdent tout le fruit & l'honneur. Faute de faire attention à l'ancienne règle, qui défend aux Philosophes de presser trop les comparaisons, ils s'égarent dans un Labyrinthe sans issue. Tâchons de dire quelque chose de plus précis, & d'entrer dans une route où nous soyons à l'abri de tous les écueils.

S'il y a quelque chose de palpable pour un esprit attentif, c'est la liaison indissoluble entre le Principe de la Raison suffisante, & la Contingence. Outre ces qualités essentielles des choses, dont nous avons parlé ci-dessus, & qui constituent l'immutabilité des Essences, j'apperçois dans les Etres des changemens, des relations, des manières d'être en un mot, qui ne sont point constantes, mais variables. A quoi faut-il que j'en rapporte l'origine ? A l'aveugle hasard. Mais la Raison & l'Experience s'y opposent avec une égale force. La Raison me dit que le hasard est un néant, & que le Néant ne sauroit produire aucun effet. L'Experience m'apprend invariablement que toutes les fois qu'il arrive quelque changement dans un être, il est intelligible & explicable par l'action de quelque autre être, qui est intervenu pour la production de cet effet. Voilà la Raison suffisante. Si je la rejette, ce Monde devient un pays de chimères, une région où tout est fabuleux, & plus fabuleux encore que dans les Fables, où la volonté de quelque Enchanteur, la baguette de quelque Fée, tiennent au moins la place de la Raison suffisante, & présentent aux Enfants & aux idiots l'idée de je ne sais quelle puissance, à laquelle la Nature obéit. Le hasard au contraire étant un rien décidé, tout ce qu'on

qu'on lui rapporte est un effet du rien ; c'est un nombre, dont les unités sont des zéros.

Est-il possible qu'on aime mieux donner dans de pareilles extravagances que d'admettre un Principe aussi simple & aussi évident que celui de la Raison suffisante ? Et quel est le prétexte qu'on allègue ? C'est que ce Principe conduit à la nécessité. J'en conviens ; mais à quelle nécessité ? A la nécessité hypothétique, qui bien loin d'être destructive de la contingence, & de la Liberté, est au contraire la source de leurs notions, & ne peut absolument s'en passer. Pour prétendre que la Raison suffisante est le principe d'une nécessité absolue, il faut la confondre avec l'essence des choses ; mais on peut dire que ceux qui le font, s'obstinent à le faire de gayeté de coeur, après la netteté & la précision que d'habiles Philosophes ont employées à l'exposition de cette Doctrine. Ce vain épouvantail de Fatalisme qu'ils ne cessent d'étaler, a été réduit à sa juste valeur, & ne peut plus en imposer qu'à ceux qui se plaisent dans l'erreur volontaire.

Je ferai même à cette occasion une Remarque que je crois neuve, & importante, pour montrer comment les idées des grands Hommes s'accordent souvent dans le fonds, quoiqu'elles diffèrent par rapport à l'expression. *Des Cartes*, l'immortel *Des Cartes*, n'a point ignoré, ni négligé, la différence qu'il y a entre les déterminations casuelles, ou arbitraires, & celles qui naissent du Principe de la Raison suffisante. C'est ce qui l'a engagé à rejeter les qualités occultes des Scolastiques ; il proscrivit, par exemple, la force attractive de l'Aiman, parce qu'elle détermine les phénomènes de l'aiman d'une manière qui n'a rien d'intelligible, & qui n'en est point une vraie explication ; & il proposa l'hypothèse des corpuscules Magnétiques, qui forment une espèce d'Atmosphère, afin d'alléguer une cause manifeste, par laquelle on put rendre une raison suffisante de ce qui se passe dans l'approche de l'Aiman & du Fer. Sa grande règle même, si on y prend bien garde, son précepte fondamental, *de n'admettre que ce dont nous avons des idées claires & distinctes*, n'est autre chose que la raison suffisante, qu'il vouloit introduire dans la Philosophie. La notion claire & distincte qu'il exigeoit, c'est celle qui fait comprendre

la chose & qui la rend explicable, en développant la notion du sujet d'une manière qui fasse voir, que l'attribut lui convient, & pourquoi. Je suis même persuadé que *Leibnitz* n'est parvenu à la Raison suffisante, & n'a conçu le dessein d'en faire un principe de nos connoissances, qu'en réfléchissant sur la difference qu'il y avoit entre les explications des Phenomenes, qu'on trouvoit dans les Scolastiques, & celles que *Des-Cartes* avoit fournies; il y vit quelque chose de plus que ce qu'on appelloit vulgairement *Cause*, & il lui donna le nom de *Raison*. Et l'on a tout lieu de croire que *Des-Cartes* lui-même auroit donné le dernier degré de perfection à sa découverte, sans l'extrême dégoût qu'il avoit pour l'Ontologie de son siècle, toute hérissée effectivement des épines de la barbarie. Ce dégoût l'empêcha de pousser plus loin l'analyse des notions, & d'en abstraire d'Universelles, c'est à dire, des Principes, des notions spéciales que la force de son Génie lui avoit présentées. Mais il ne s'agit après tout, ni de l'Epoque de ce Principe, ni de ses Auteurs; je dois seulement justifier son usage, & proposer la preuve de la Liberté, qui en résulte d'une manière qui, en détruisant les prétentions des Indifferentistes, ne donne aucun droit aux conclusions des Fatalistes.

L'exemple de deux choses en équilibre prouve par le principe de la raison suffisante qu'il renferme, & qu'*Archimede* y a déjà découvert, que comme il faut quelque cause qui trouble cet équilibre, & fasse pencher l'un des côtés; de même l'homme ne sauroit être déterminé à choisir un parti plutôt que l'autre, sans que quelque motif y intervienne. A cet égard la ressemblance est sensible, la comparaison est juste. Mais elle cloche, dès qu'on va plus loin. Pour faire pencher la balance qui est en équilibre, il faut qu'une cause étrangère mette un poids dans l'un des bassins. Il n'en est pas de même des motifs qui nous déterminent. Quoique les objets externes occasionnent souvent nos pensées, nous n'en sommes pas moins assurés que c'est nous qui pensons. C'est ce sentiment qui établit notre existence, comme nous l'avons vu ci-dessus. Quand donc les causes externes agissent sur nous, nous en dépendons, il est vrai, par rapport à l'action, mais l'effet de cette action dépend à son tour de la détermination

nation de notre volonté. Un verre de vin excite mon désir, mais il ne le force pas; c'est moi qui me détermine. Quand je considère les objets que mes sens me présentent, je fais par le sentiment de ma pensée que je puis les comparer ensemble, délibérer intérieurement, faire usage de ma raison & de mes réflexions, & me déterminer à choisir un de ces objets préférablement à l'autre. C'est là l'indifférence de l'exercice, qu'il faut bien se garder de confondre avec l'indifférence des motifs, & qui jointe à l'exemption de contrainte, constitue la liberté. Or je ne puis attribuer cette faculté, ni aux corps qui inclinent & se meuvent, sans savoir ce qu'ils font, ni aux bêtes, qui ont bien comme nous les sens, l'imagination & les desirs charnels, mais qui ne sont pas douées d'entendement, de raison & de volonté.

Il n'est donc pas besoin de recourir à l'indifférence, pour éviter la nécessité. Tous les cas dans lesquels on prétend se fortifier du témoignage de l'Experience, & où les partisans de l'Indifférence croient être dans leur fort, ne concluent point en faveur de leur Thèse, puisque le Principe même est faux, c'est qu'il y ait des cas de cette nature. En effet, si l'on veut bien approfondir les choses, il se trouvera que dans les occasions même qui paroissent les plus indifférentes, il y a toujours eu quelque raison prévalente en faveur du parti qu'on a pris. Quand il s'agit de choisir une chose entre plusieurs autres où l'on ne remarque point de différence, il y a toujours une de ces choses qui est dans une situation plus commode par rapport à la main qui doit la saisir; & alors l'Âme n'ayant point d'autre raison, aura égard, même sans y faire attention, à cette commodité, ou peut être que par une opinion confuse, & dont on ne sauroit rendre raison, on croira un objet meilleur que les autres. On en peut dire autant de quelque cas que ce soit. Une infinité de petites perceptions qui nous rendent quelque fois joyeux, chagrins, & différemment disposés, nous font quelquefois plus goûter une chose que l'autre, sans que nous puissions dire pourquoi. L'on ne doit donc pas trouver étrange que nous supposions en nous des motifs qui nous déterminent, sans que nous soyons capables d'en rendre raison.

Mais il y a plus, & l'on peut démontrer directement que le cas du parfait équilibre est impossible. Car les objets n'étant jamais parfaitement semblables, & différant au moins, de l'aveu de tout le monde, par leur situation à notre égard, ils ne peuvent point être représentés par des perceptions entièrement semblables; & dès là les appetits qui naissent des perceptions, ne sauroient être semblables; car les effets sont égaux à leurs causes. Donc les appetits n'étant point semblables, il ne peut y avoir de parfait équilibre. Il n'y a qu'à jeter les yeux sur la manière dont Mr. de Leibnitz réfute la Fable de l'Ane de Buridan dans sa *Theodicée* *. C'est ainsi qu'on détruit le Principe de l'Indifférence; mais en le laissant même subsister, on seroit également en droit de nier la conséquence. Quand le cas du parfait équilibre seroit possible, il seroit alors contradictoire que la volonté se déterminât; & les Principes de la Raison suffisante & de la disposition de la Cause à produire l'effet, ne sont pas moins vrais & indispensables dans les cas les moins importants que dans les plus intéressans. S'il étoit possible que l'Ame se déterminât une seule fois sans raison, pourquoi ne le feroit elle pas en toute rencontre? L'erreur où l'on tombe sur les choses de petite importance, vient de ce que nous n'apercevons pas toujours les raisons qui concourent à y déterminer. Cela n'arriveroit pas, si nous n'avions que des idées distinctes. Mais nous avons encore des idées confuses, des sensations, des appetits, des passions & une infinité de perceptions obscures, que nous ne distinguons point, & qui cependant contribuent à nos déterminations. Comme il y a dans notre Corps plusieurs mouvemens insensibles, dont nous ne nous apercevons pas, il est de même dans notre esprit plusieurs idées qui ne sont pas accompagnées du témoignage. Combien de fois n'arrive-t-il pas aux Philosophes eux-mêmes de dire qu'ils ne pensent à rien, quand l'esprit dans des momens d'inaction ne réfléchit pas sur ses idées, ou quand se promenant dans les espaces imaginaires, les objets qu'il y rencontre, n'ont pas la force de faire sentir leurs impressions? Cet état ressemble parfaitement à celui d'un homme, qui en dormant parle & rêve sans s'en apercevoir. Ainsi, quand on me propose de me tourner à droite ou à gauche, ou de faire quelque autre action, qui paroît

roit absolument indifférente; je ne puis jamais assurer qu'il n'y ait aucune disposition présente, ou antécédente, dans mon esprit ou dans mon corps, qui me fasse pencher d'un côté plutôt que de l'autre.

Pour porter un dernier coup à la liberté d'indifférence, réfléchissons encore sur ceci. Une expérience indubitable m'apprend que je puis résister à des motifs pressans, dont j'ai le sentiment & la réflexion, & malgré leur poids faire pencher la balance du côté opposé. A plus forte raison pourrai-je exercer cette puissance, quand il n'y a dans l'un des bassins de la balance que quelques menues poussieres, qui l'empêchent d'être parfaitement en équilibre. Voilà à quoi se réduit la réalité de la liberté d'indifférence; elle ne nous paroît absolue que faute de connoître ce qui la détermine. *Des-Cartes* l'a fort bien compris & expliqué. „L'indifférence, dit-il, que je sens, lorsque je ne suis point emporté vers un côté plutôt que vers un autre par le poids d'aucune raison, est le plus bas degré de la liberté, & fait plutôt paroître un défaut dans la connoissance qu'une perfection dans la volonté. Car si je connoissois toujours clairement ce qui est vrai & ce qui est bon, je ne serois jamais en peine de délibérer quel jugement & quel choix je devrois faire, & ainsi je serois entièrement libre, sans jamais être indifférent.“

Concluons donc que l'indifférence n'a lieu qu'à l'égard de l'Âme, qui dans mille cas qui se présentent n'est pas plus déterminée par la nature d'un côté que de l'autre, de même que le corps n'est point déterminé par soi-même à occuper la place où il se trouve. S'il y a une raison suffisante qui ait mis le corps dans la situation où il est, & qu'ainsi sa détermination soit très certaine, il n'est pas moins évident que sa détermination est contingente, ou, ce qui revient au même, qu'elle n'est pas immuable, qu'elle pouvoit être autrement. Il en est de même de nos actions libres, auxquelles les motifs tiennent lieu de raison suffisante. Sans ce principe il n'y auroit rien de certain dans le monde, tous les événemens seroient produits par le pur hazard, c'est à dire, par le néant. Ce n'est qu'à la faveur de ce principe que nous pouvons remonter des effets à la cause, & unir les connoissances que nous puisons dans l'expérience à celles du raisonne-

sonnement. Ce qui fait juger à un habile Politique, pourquoi tel événement est arrivé, & pourquoi il sera suivi d'autres qu'il prévoit vraisemblablement, lui fait connoître que ces mêmes choses pourroient être autrement. Plus le Physicien connoît le monde matériel, plus il s'apperçoit que les changemens- & les révolutions qui y arrivent continuellement, ne sont que les suites conditionnelles de l'arrangement & de la liaison admirable, dans laquelle se trouvent les parties qui composent ce monde. Ainsi, & les motifs qui produisent les actions libres, & les ressorts qui font agir la nature des Corps, loin de nous conduire à la nécessité absolue des choses que nous voyons, nous manifeste leur contingence, qui excluant toute idée de hazard, n'est fondée que sur une nécessité conditionnelle.

Nos connoissances ne sont vraies qu'autant qu'elles sont conformes à la nature de leurs objets. Mais que ces connoissances aient prévenu les effets qui en sont l'objet, ou qu'elles ne soient venues qu'après coup, cela change-t-il quelque chose à la nature même de ces effets ? Cette relation qu'ils ont avec nous, & par laquelle ils nous sont connus, ou inconnus, avant leur accomplissement, a-t-elle la moindre influence sur leur certitude, sur les déterminations, & la vertu desquelles elles doivent être ainsi, & non autrement. Il y a plus ; l'Intelligence Divine elle-même, quoiqu'elle n'ait aucune analogie avec notre manière de connoître, l'Intelligence qui, étant qu' infinie, embrasse tout à la fois par la conception la plus adéquate tout ce qui est, a été, sera, & peut être, tandis que notre esprit borné n'acquiert que successivement les connoissances, dont plusieurs sont obscures, d'autres confuses, quelques unes distinctes & lumineuses ; cette Intelligence, dis-je, aux yeux de laquelle toutes choses sont nûes & à découvert, change-t-elle par sa connoissance les choses contingentes en des choses absolument nécessaires ? Il est bien surprenant que les Theologiens & les Philosophes aient été pendant long tems accrochés à la difficulté de concilier la contingence de nos actions avec la Prescience éternelle de Dieu, & que la plupart l'aient jugée insoluble. La souveraine intelligence de Dieu nous est incompréhensible, entant que nous n'en avons pas une pleine & enti-

la conception, qui puisse nous faire comprendre & embrasser parfaitement tout ce qui est en elle ; mais l'imparfaite & mediocre connoissance que nous en avons, suffit pour nous autoriser à conclure qu'il a tout prévu, parce que connoissant intimement & en lui-même infini, à plus forte raison son Entendement a-t-il apperçu de toute éternité la nature de toutes choses, & les différentes liaisons où elles eurent se trouver. Ainsi la liberté étant une fois établie sur les preuves les plus convaincantes, il est certain que nous pouvons éterniser nos actions librement, non pas par la raison que Dieu les prévues, mais parce que la Liberté est conforme à notre nature. Il y a qu'une entière & absolue indifférence, dont la Prescience soit impossible à Dieu. Et il faudroit refondre toutes les idées de la Logique & de la Métaphysique, pour admettre ce Dogme avec les Conséquences qui en découlent.

L'obscurité qui règne dans nos idées, l'incertitude de nos connoissances au sujet des motifs qui nous déterminent, ou qui devraient nous déterminer, sont donc les causes de cet embarras, de cette suspension, de ce choix fait en apparence au hasard, qu'il plaît à certains Philosophes d'eriger en une espèce particulière de Liberté, sous le nom d'Indifférence. Bien plus ; d'un défaut ils font une perfection, & voudroient nous persuader que la Divinité elle-même possède l'admirable prérogative de se déterminer sans motifs, ou même contre les motifs. Etrange bouleversement de toutes les notions ! Il ne s'en faut qu'on ne fasse tenir par ce moyen au premier Être le langage de cette femme furieuse ; *Video meliora, proboque ; deteriora sequor*. Non, la liberté ne s'accroît & ne se fortifie au contraire, plus à mesure que l'indétermination & l'indifférence diminuent. Plus on saisit les différences des choses, moins j'hésite dans leur choix, & l'Être qui embrasse d'un coup d'oeil toutes les différences infiniment petites de toutes les choses existantes & possibles, ne sauroit trouver deux choses égales qui tiennent sa volonté dans l'équilibre. Il est donc bien surprenant de voir les hommes défendre avec chaleur la possession d'un avantage, qui bien considéré est ce qu'il y a de plus humiliant pour eux. On rit de la simplicité d'un enfant qui ne sait

que prendre d'un Louis dor, ou d'un Jetton qu'on lui offre, & qui après avoir bien tâtonné prend le Jetton. C'est le cas de tous les hommes, proportionnellement à l'étendue de leurs connoissances.

La Liberté proprement dite est donc à l'Ame ce que la Santé est au corps. Elle constitue la vie de l'esprit, comme la vie animale résulte des fonctions & des mouvemens du Corps. Le Corps ne peut subsister sans le secours d'alimens convenables aux solides & aux fluides qui le composent. L'esprit s'etrécit & s'eteint presque, dès qu'on le prive de la nourriture qui lui est propre. Il lui faut des idées, de l'attention, de la réflexion, pour exercer le jugement & cultiver la Raison. La fausseté, l'erreur, le mensonge sont un vrai poison pour lui. Ce parallèle peut être poussé plus loin. La santé dans les tempéramens les plus robustes, n'est pas ferme & durable, si l'on n'use d'aucun régime. Les excès de l'intempérance assujettissent les corps les plus robustes aux maladies les plus violentes. Il en est de même de l'esprit, s'il ne règle pas l'usage de ses facultés par la sagesse. Ses débauches, si je puis ainsi parler, enveniment les passions, & les rendent insupportables dans les grands Génies, qui sont ordinairement ceux qui font les plus grands écarts. En effet, pour continuer la comparaison, comme les corps délicats & foibles se soutiennent souvent mieux & plus longtems que les corps robustes, les esprits médiocres par une application bien réglée l'emportent quelquefois sur ceux qui ont le plus de force & de pénétration naturelle. En un mot, si la plupart des maladies du corps sont des suites de l'intempérance, celles de l'esprit le sont d'ordinaire d'un mauvais usage de ses facultés. C'est malheureusement la situation de la plupart des hommes. Mais comme ils s'y mettent volontairement, sont-ils moins coupables, que ces mendiens qui s'estropient de gayeté de coeur pour se dispenser du travail ? Si donc les facultés de l'ame sont sujettes à tant d'inegalités, & si l'on n'observe pas dans la conduite & dans les mœurs de l'homme cet ordre & cette régularité qu'on admire dans le monde materiel, c'est que l'homme ne peut pas être dirigé comme une machine, & que son bonheur est inséparable du bon usage de sa liberté.

Il faut donc pour perfectionner sa liberté, perfectionner ses connoissances par la culture de l'esprit & de la raison. La Verité & la Vertu sont unies par les liens les plus étroits. Ce n'est qu'en s'appropriant la première qu'on parvient à l'autre, & qu'on peut goûter les doux fruits de leur union, en s'affranchissant de cette inconstance & de cette vanité perpétuelle, qui est la source de tant de désordres. Si la plupart des hommes sont privés de la véritable liberté, & si leurs desirs triomphent presque toujours de leur volonté, ce n'est pas que leur entendement soit trop foible, ou que leurs organes soient dérangés. C'est plutôt parce qu'ils se rebutent aux premières difficultés, & qu'ils voudroient se procurer les avantages de la Verité & de la Vertu, sans qu'il leur en coûtât rien, ou bien même allier l'une & l'autre avec l'erreur, l'ignorance & les passions. Cette prétention est aussi vaine & aussi chimérique que le seroit celle d'un homme sec & décharné, qui pour aquerir promptement de l'embonpoint, voudroit prendre un quintal de nourriture par jour, ou de celui qui formeroit le projet d'être tantôt gras, tantôt maigre, d'un jour à l'autre.

L'Homme est essentiellement un être fini & borné ; par conséquent il ne peut arriver à la perfection que successivement & par degrés. Les facultés de l'esprit & du corps ne s'accroissent & ne se forment que par l'application, par l'exercice & les actes réitérés qui forment les habitudes. Ainsi si notre liberté est très peu de chose, c'est parce que nous faisons très peu d'usage des qualités qui nous distinguent des bêtes. L'asservissement volontaire aux sens, à l'imagination, & aux appetits charnels, bien loin de nous laisser quelque prééminence sur les animaux, nous rend pires qu'eux, entant que notre Entendement invente de nouveaux moyens pour étendre & pour assouvir ses passions. C'est ainsi que plus une chose est excellente, plus l'abus en est pernicieux. Mais encore une fois, l'homme ne sauroit s'en prendre qu'à lui même, s'il faut un mauvais usage de sa liberté. Il n'y a qu'un enfant exposé dès sa naissance parmi les Loups & les Ours, dont l'ignorance soit invincible & excusable.



R E M A R Q U E S
S U R L E P R I N C I P E D E L A C O N S E R -
V A T I O N D E S F O R C E S V I V E S P R I S D A N S U N
S E N S G E N E R A L .

PAR M. D. BERNOULLI.



I.

Le principe ordinaire des forces vives suppose la gravitation uniforme & toujours parallele à elle même : mais lorsque par la diversité des positions des corps la gravitation est changée, soit par raport à son intensité, soit par raport à sa direction, on ne peut plus sans doute estimer la force vive, comme on fait ordinairement, par la descente du centre de gravité multipliée par la masse ; cependant il se fait toujours une conservation des forces vives, pourvu qu'on la prenne dans le juste sens. C'est ainsi que j'ai démontré autrefois dans un Memoire que j'ai envoyé à l'Academie des Sciences de S. Petersbourg, comment on pouvoit calculer par le simple principe de la conservation des forces vives quelques inegalités du mouvement de la Lune : il ne sera donc pas inutile d'examiner, de quelle maniere on puisse employer ce principe pour d'autres hypotheses que celle de la gravitation uniforme & dont la direction est toujours parallele.

II. S'il y a plusieurs corps assujettis à la loi d'un certain sisteme, de sorte qu'aucun ne puisse se mouvoir indépendamment des autres ; Si chaque corps est animé par une gravitation variable quelconque,

je dis que la conservation des forces vives se fera de la maniere, qui suit.

Indiquons les masses des corps, qui composent le système, par m, m', m'', m''' , &c. leurs vitesses par v, v', v'', v''' , &c. qu'on considère ensuite chaque corps comme détaché du système, & qu'animé par la gravitation il parte du même point & parvienne au même point, décrivant un chemin quelconque; il sera facile de déterminer la vitesse, que ce corps détaché du système doit prendre; nous exprimerons ces autres vitesses par u, u', u'', u''' &c. Là dessus le principe de la conservation des forces vives sera généralement exprimé par cette equation

$$m v v + m' v' v' + m'' v'' v'' + m''' v''' v''' + \&c. = m u u + m' u' u' + m'' u'' u'' + m''' u''' u''' + \&c.$$

III. Je ne m'arrêterai pas pour cette fois à expliquer & à confirmer ce principe général par des exemples, mon but n'étant pour le présent que d'examiner toute l'étendue du principe des forces vives, & cela non seulement par rapport aux systèmes de plusieurs corps, mais encore par rapport aux corps simples, lorsqu'il est question de comparer pour ceux-ci leur force vive avec un certain espace qu'ils auront parcouru; & ce dernier examen facilitera extrêmement la maniere de déterminer les quantités $u u, u' u', u'' u'', u''' u'''$ &c. que nous avons employées dans notre équation du § 2.

IV. Commençons par l'hypothese commune de la gravitation uniforme & parallele; on sçait que le quarré de la vitesse acquise est toujours proportionel à la hauteur verticale que le corps a parcouru; & comme cela est vrai, quelle que soit la route du corps, il se fait à cet égard une conservation de force vive relativement à la hauteur verticale que le corps parcourt.

S'il y a pour cette hypothese un système de plusieurs corps, si l'on marque encore les masses de ces corps par m, m', m'', m''' &c. enfin si on exprime la gravitation acceleratrice par 1, & que l'on nomme les hauteurs verticales parcourues par les corps du système x, x', x'', x''' &c. on aura $u u = 2 x$; $u' u' = 2 x'$; $u'' u'' = 2 x''$; $u''' u''' = 2 x'''$ &c. & l'equation générale du § 2. donne

$$m v v + m' v' v' + m'' v'' v'' + m''' v''' v''' + \&c. = 2 m x + 2 m' x' + 2 m'' x'' + 2 m''' x'''.$$

Y y 3

c'est

c'est à dire, que la force vive entiere sera exprimée par la masse de tout le sisteme multipliée par la double descente verticale du centre de gravité du sisteme.

V. Si nous supposons à present la gravitation encore uniforme, mais dont la direction tende vers un centre fixe, il n'y a qu'à substituer dans le précédent article aux descentes verticales des corps leurs approchemens du centre de la gravitation & la conservation des forces vives, soit par rapport aux corps simples, soit par rapport aux sistemes de corps, se fera de la même maniere relativement aux dits approchemens, qu'elle se fait dans l'hypothese commune relativement aux descentes verticales. Ainsi la force vive d'un corps simple sera la même, quelque chemin qu'il fasse pour parvenir d'un point donné à un point donné, & dans un sisteme de corps, nous aurons comme auparavant

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = 2mx + 2m'x' + 2m''x'' + 2m'''x''' + \&c.$$

en entendant par x, x', x'', x''' &c. la quantité de laquelle les corps m, m', m'', m''' &c. se sont approchés du centre de gravitation. Mais ce que nous avons ajouté dans le précédent article du centre de gravité, ne peut subsister que dans l'hypothese commune; c'est un point imaginaire dans toute autre hypothese.

VI. Voici maintenant comment il faudra envisager la chose, si la gravitation est outre cela variable, suivant une loi quelconque, par rapport aux distances depuis le centre de gravitation. Un corps simple aura toujours la même force vive, toutes les fois que partant du même point il parvient à une même distance depuis le centre de gravitation, quelque chemin qu'il fasse pour parvenir d'un point à l'autre. Si donc le centre de gravitation est en E (fig. 1). si le corps commence à se mouvoir au point A, & qu'il parvienne au point C sur une courbe quelconque A B C, pour trouver la vitesse du corps en C, il n'y a qu'à tirer la ligne droite A E, & puis du centre E décrire l'arc de cercle C D, après quoi la vitesse en C sera la même, qu'au point D, si le corps tomboit en ligne droite vers le centre E. Il est donc très facile de trouver la vitesse du corps & sa force vive, dans un

un point quelconque, quelle que soit la loi de la gravitation. Soit le corps dans une distance X depuis le point E & que la force accélératrice soit exprimée par ξ , on aura $uu = -2 \int \xi dx$. Considérons à présent dans cette même hypothèse un système de tant de corps qu'on voudra, dont les distances au point E soient exprimées par x, x', x'', x''' &c. & les forces accélératrices correspondantes par ξ, ξ', ξ'', ξ''' &c. Je dis que le principe général de la conservation des forces vives pour cette hypothèse sera exprimé par cette équation

$$uuu + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = -2m \int \xi dx - 2m' \int \xi' dx' - 2m'' \int \xi'' dx'' - 2m''' \int \xi''' dx'''$$

Dans l'intégration des termes on satisfera par l'addition des constantes aux positions initiales des corps & à la force vive que le système est supposé y avoir, si son mouvement ne commence pas depuis le repos.

Ainsi, par exemple, si la gravitation accélératrice est supposée réciproquement proportionnelle aux carrés des distances depuis le point E ; si les distances initiales des corps, qui composent le système, sont exprimées par a, a', a'', a''' &c. si le mouvement commence depuis le repos; si on suppose enfin que la gravitation accélératrice sous la distance b devienne égale à la pesanteur naturelle exprimée par l'unité, nous aurons $\xi = \frac{b}{x^2}, \xi' = \frac{b}{x'^2}, \xi'' = \frac{b}{x''^2}, \xi''' = \frac{b}{x'''^2}$

&c. & le principe de la conservation des forces vives donnera cette équation

$$uuu + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = 2m \left(\frac{b}{x} - \frac{b}{a} \right) + 2m' \left(\frac{b}{x'} - \frac{b}{a'} \right) + 2m'' \left(\frac{b}{x''} - \frac{b}{a''} \right) + 2m''' \left(\frac{b}{x'''} - \frac{b}{a'''} \right) + \&c.$$

VII. Supposons maintenant deux centres de forces, & que la loi de la gravitation vers chaque centre soit encore quelconque; il faudra tenir ici la même route pour parvenir à la connoissance du principe de la conservation des forces vives. Commençons donc encore par les corps simples.

Soyent.

Soyent les points A & B les deux centres de forces; (fig. 2.) que le corps parte du point G, & se meuve sur une courbe quelconque jusqu'au point H, tirez la droite indéfinie A B F; du centre B décrivez les deux arcs de cercle G F & H D, de même que de l'autre centre A les deux arcs de cercle G E & H C.

Pour déterminer à présent la force vive qu'aura le corps au point H, je dis qu'il n'y a qu'à ajouter ensemble les deux forces vives, qu'aurait le corps, si chaque gravitation agissoit seule, de sorte que le tout pourra être déterminé par le § 6. Si l'on cherche donc la force vive que le corps prend, étant uniquement tiré vers le centre B, en parcourant la droite F D, & puis celle que le corps acquiert étant uniquement tiré vers le centre A, en parcourant la droite E C, la somme de ces deux forces vives donnera la force vive entière du corps au point H.

Soit donc la distance B H = x , & la gravitation accélératrice vers B = ξ ; la distance A H = y & la gravitation accélératrice vers A = Y ; la vitesse au point H = u , on aura $u u = -2 \int \xi dx - 2 \int Y dy$. Il est vrai que la démonstration de ce principe est fort facile, mais je n'en admire pas moins la fécondité de notre principe.

Voyons à présent ce qui doit arriver à un système de corps; appliquons pour cet effet toutes les dénominations employées dans le précédent article au centre de forces B, & supposons par rapport à l'autre centre de forces en A les distances A H y, y', y'', y''' &c. & les forces accélératrices correspondantes Y, Y', Y'', Y''' &c. Là dessus le principe de la conservation des forces vives sera exprimé par cette équation

$$m v v + m' v' v' + m'' v'' v'' + m''' v''' v''' + \&c. = -2m(\int \xi dx + \int Y dy) - 2m'(\int \xi' dx' + \int Y' dy') - \&c.$$

$$- 2m''(\int \xi'' dx'' + \int Y'' dy'') - 2m'''(\int \xi''' dx''' + \int Y''' dy''') - \&c.$$

L'exemple de la gravitation vers chaque centre de forces réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, (si nous indiquons par rapport au centre A par β & par $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ &c. ce que nous indiquons par rapport au centre B par b & par a, a', a'', a''' &c.) nous fournit cette équation

$m v v$

$$m'v + m'u'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \sqrt{c} = 2m\left(\frac{bb}{x} - \frac{bb}{a} + \frac{\beta\beta}{y} - \frac{\beta\beta}{a}\right) + 2m'\left(\frac{bb}{x'} - \frac{bb}{a'} + \frac{\beta\beta}{y'} - \frac{\beta\beta}{a'}\right) \\ + 2m''\left(\frac{bb}{x''} - \frac{bb}{a''} + \frac{\beta\beta}{y''} - \frac{\beta\beta}{a''}\right) + 2m'''\left(\frac{bb}{x'''} - \frac{bb}{a'''} + \frac{\beta\beta}{y'''} - \frac{\beta\beta}{a'''}\right) + \&c.$$

VIII. On voit assez par ce que je viens d'exposer, que notre theorie s'étend à tant de centres de forces qu'on voudra supposer, & qu'il sera toujours vrai de dire, que la force vive entiere d'un corps simple est celle qui resulte en prenant la force vive pour chaque centre de gravitation à part, suivant le § 6, & en ajoutant ensemble toutes ces forces vives partielles. De là on connoitra toujours les quantités $muu + m'u'u' + m''u''u'' + m'''u'''u''' + \&c.$ que nous avons considérées au § 2. & que nous avons dit exprimer généralement la force vive totale d'un sisteme.

IX. Toutes ces remarques sur les forces vives & leur admirable conservation m'ont engagé à examiner encore ce qui doit arriver, lorsque les centres des gravitations changent eux-mêmes de place. Cela se peut faire d'une infinité de façons extrêmement différentes; je n'en examinerai qu'une seule pour n'être pas trop prolix dans des recherches, qui sont assez faciles d'elles mêmes. Je considérerai les corps doués d'une vertu attractive reciproquement proportionnelle aux quarrés des distances: j'entreprends cet examen d'autant plus volontiers, qu'il pourra peut-être repandre quelque nouvelle lumiere sur le sisteme de Mr. *Newton*.

X. Supposons d'abord deux corps; ces deux corps s'attireront mutuellement avec une force égale, quoiqu'eux-mêmes inégaux: d'ailleurs chaque élément de l'un attire chaque élément de l'autre: d'où il suit que la force attratrice mutuelle absoluë doit toujours être estimée par le produit des masses des deux corps, tout le reste étant égal: ainsi si la masse de l'un devenoit dix fois plus grande & la masse de l'autre vingt fois plus grande, la force absoluë de l'attraction mutuelle en deviendroit 200 fois plus grande. Ceci supposé cependant, qu'une même quantité de matiere est douée d'une égale vertu attractive, principe que je ne prends pas encore pour tout à fait sûr par raport à toute la matiere qui compose l'univers; il n'y a sans doute aucune

contradiction à supposer que la vertu attractive, de même que l'inertie de la matiere qui compose le Soleil, puissent être différentes de la vertu attractive & de l'inertie de la matiere, qui compose les Planetes: & si on supposoit la vertu attractive incomparablement plus petite, ou l'inertie incomparablement plus grande dans la matiere du Soleil que dans celle des Planetes, le Soleil ne pourroit être déplacé par les différentes configurations des Planetes; & peut être que cette supposition est plus conforme aux Observations astronomiques rapportées à un même système, que n'est celle de Mr. *Newton*. Si l'on vouloit donc considérer les corps comme doués d'une vertu attractive différente, il faudroit multiplier encore chaque masse par sa vertu attractive; nous nous tiendrons ici à la premiere hypothese, comme plus simple, & pour déterminer tout par des quantités absolues, nous supposerons qu'une masse μ sous une distance ρ cause dans un élément de corps une force acceleratrice, qui soit égale à la pesanteur naturelle exprimée par l'unité. Ainsi la quantité μ pourra exprimer toute la matiere de la terre, & la quantité ρ le rayon de la terre. Si y a donc deux corps, dont les masses soyent exprimées par M & m , & leur distance par x , ces deux corps s'attireront l'un l'autre avec une force $\frac{\rho \rho}{x x} \cdot \frac{M m}{\mu}$,

& la force acceleratrice du corps M sera $\frac{\rho \rho}{x x} \cdot \frac{m}{\mu}$ & celle de l'autre corps $\frac{\rho \rho}{x x} \cdot \frac{M}{\mu}$.

XI. Si les deux corps dont nous venons de parler sont en liberté de s'approcher l'un de l'autre en ligne droite; si leur distance initiale est $= a$; la force vive du corps M sera $= \frac{2 M m}{\mu} \cdot \frac{m}{M + m} \cdot (\frac{\rho \rho}{x} - \frac{\rho \rho}{a})$ & la force vive du corps $m = \frac{2 M m}{\mu} \cdot \frac{M}{M + m} \cdot (\frac{\rho \rho}{x} - \frac{\rho \rho}{a})$ & la somme des forces vives $= \frac{2 M m}{\mu} \cdot (\frac{\rho \rho}{x} - \frac{\rho \rho}{a})$.
Voilà

Voilà quelle sera la force vive, lorsque les deux corps se meuvent avec une liberté entière ; Je dis maintenant que cette force vive sera conservée, de quelle manière que les deux corps changent leur distance initiale a en x .

Qu'on s'imagine une courbe quelconque A B C (fig. 3.) sur laquelle glisse librement le corps M & une autre courbe D E F que décrit l'autre corps m : qu'on suppose les corps avoir été au commencement en A & D, & qu'ils soient parvenus dans une situation quelconque B & E ; Soit la droite A D $= a$; la droite B E $= x$; je dis que la force vive des corps en B & E sera toujours $= \frac{2 M m}{\mu}$

$\cdot \left(\frac{\ell\ell}{x} - \frac{\ell\ell}{a} \right)$, & par conséquent la même que si le corps en A étoit entièrement arrêté, & que l'autre corps en D s'approchât librement & en ligne droite vers le point A de la quantité $a - x$, de sorte que la somme des forces vives acquises dépend encore uniquement de la distance initiale & de la distance finale des corps, ou des centres de gravitation mobiles, tout comme pour les centres de gravitation immobiles.

XII. S'il y a trois corps, qui s'attirent tous mutuellement, dont les masses soient exprimées par $m, m' & m''$; si la distance initiale entre les corps $m & m'$ est supposée $= a$, entre les corps $m, & m'' = b$, & celle d'entre les corps $m' & m'' = c$; si ces distances sont

$$\text{changées en } x, y \text{ \& } z, \text{ je dis que la force vive des trois corps sera toujours } = \frac{2 m m'}{\mu} \cdot \left(\frac{\ell\ell}{x} - \frac{\ell\ell}{a} \right) + \frac{2 m m''}{\mu} \cdot \left(\frac{\ell\ell}{y} - \frac{\ell\ell}{b} \right) \\ + \frac{2 m' m''}{\mu} \cdot \left(\frac{\ell\ell}{z} - \frac{\ell\ell}{c} \right).$$

XIII. Voici à présent la règle générale pour tant de corps qu'on voudra supposer : Je dis donc, qu'il faut considérer tous les corps deux à deux par toutes les combinaisons possibles, & puis chercher par le § II. la force vive pour chaque rapprochement, qui s'est fait entre

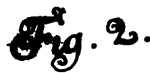
deux corps & que la somme des ces forces vives partielles fera la force vive entiere de tous les corps. Si le nombre des corps est n , le nombre des combinaisons sera $\frac{n(n-1)}{2}$ & il y aura autant de forces

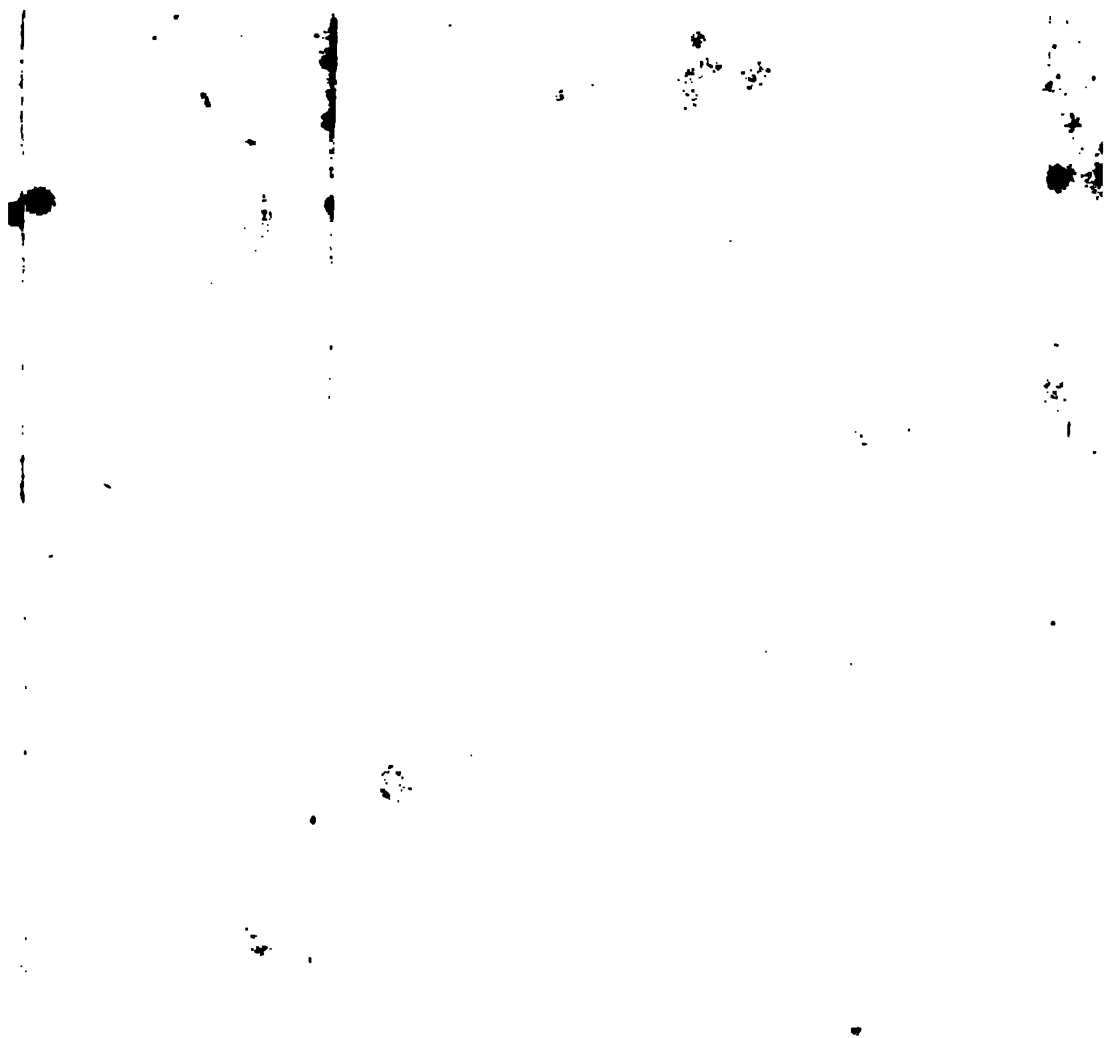
vives partielles qui composeroient la force vive entiere. Et cette règle est vraie, de quelque façon que les corps soyent assujettis à un système, tout comme si chaque corps étoit entierement libre ; donc la route des corps ne lauroit en aucune façon alterer cette loy générale.

XIV. La règle générale que nous venons de donner est vraie sans exception pour telle autre loi de gravitations mutuelles, qu'on voudra supposer : ce n'étoit que pour rendre les formules plus précises & plus intelligibles, en évitant les signes sommatoires, que je suis descendu à l'hypothese particuliere de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances. On voit donc que la nature ne s'ecarte jamais du grand principe de la conservation des forces vives ; ce que je m'étois principalement proposé d'établir dans ces recherches & dans ces remarques.

XV. Si le système des corps ne commence pas son mouvement depuis le repos, il faudra entendre de l'augmentation de forces vives, ce que nous avons allegué sur la force vive acquise. Je contois d'appliquer la theorie que nous venons d'établir à quelques problèmes ; mais d'autres occupations m'en ont empêché ; ce sera peut-etre le sujet du premier memoire , que j'aurai l'honneur de présenter à l'Academie Royale des Sciences.



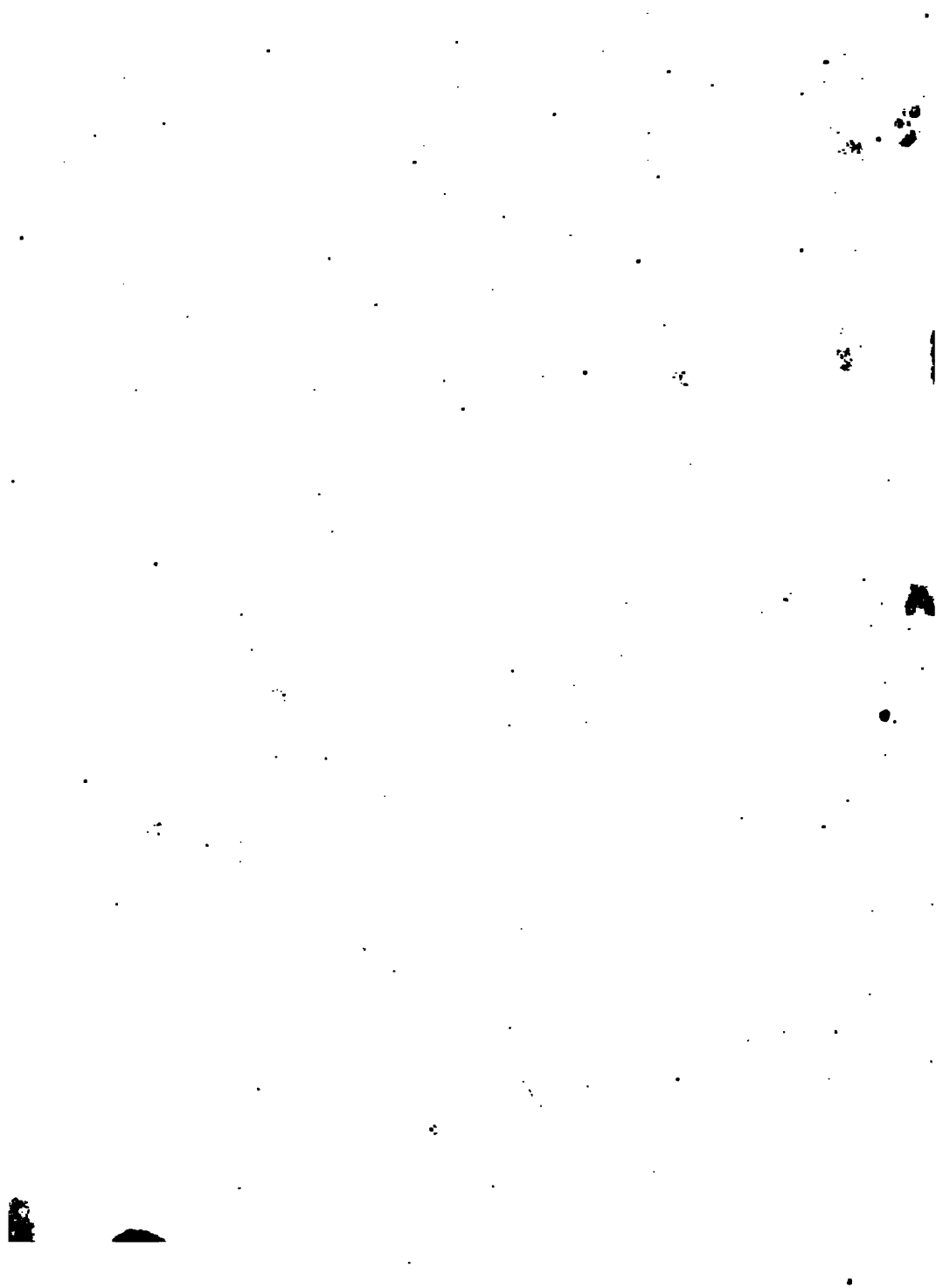


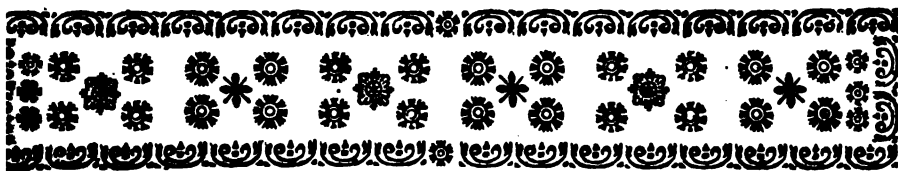


MEMOIRES
DE
ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
ELLES LETTRES.

*CLASSE DE BELLES
LETTRES.*







F R È D E R I C I I I .

P R E M I E R R O Y D E P R U S S E .



Frédéric III. naquit à Königsberg en Prusse le 22. de Juillet 1657. de Louise Henriette d'Orange, première femme du Grand Electeur. Sa Mère mourut, & l'Electrice Dorothee sa Belle Mère. lui donna dans sa jeunesse des chagrins violens. Elle trouva le moyen d'aigrir l'esprit de Frédéric Guillaume contre ce fils du premier lit, qui étoit infirme, contrefait, & dont l'éducation avoit été assés négligée. L'aigreur du père alla jusqu'au point, qu'il auroit vû sans regret passer la Succession au Prince Philippe son second fils.

On osa soupçonner dans ces tems l'Electrice d'avoir tenté de défaire par le poison de son Beau-fils, mais outre qu'on n'en apporte aucune preuve certaine, & que ce fait est avancé assés légèrement, il ne doit point trouver place dans l'Histoire; qui, étant l'Archive de la vérité, ne doit point fouiller la mémoire des Grands, par ces forfaits atroces, sans avoir en main la conviction de ces crimes.

Les faits justifient l'Electrice; Car ce qu'il y a de sûr, c'est que Frédéric III. vécut, qu'il épousa en 1679. en premières Nôces Elizabeth Henriette, fille de Guillaume VI. Landgrave de Hesse; qu'il se maria * après sa mort avec Sophie Charlotte, fille du Duc d'Ha-

novre Ernest Auguste, & Socur de George, qui depuis devint Roy d'Angleterre.

L'Electrice Dorothee en vouloit plutôt aux biens, qu'à la vie de ce Prince. On assure que le Grand Electeur se détermina sur ses sollicitations à faire un Testament, par lequel il partagea toutes les acquisitions qu'il avoit faites pendant son Regne entre ses enfans du second lit. Le parti Autrichien se servit habilement de ce Testament pour indisposer l'Electeur contre la France. L'Empereur s'engagea d'annuler cette disposition paternelle, à condition que Frederic III. lui rendit le Cercle de Swibus; nous verrons dans la suite de cette Histoire comment cette Convention s'exécuta.

1688.

L'Avenement à la Régence de Frederic III. devint l'Epoque d'une nouvelle Guerre. Louis XIV. en fut l'Auteur; Il demandoit que quelques Baillages du Palatinat, comme devant revenir à Madame d'Orléans. Il se plaignoit de l'injure que les Princes Allemans lui avoient faite de se liguier à Augsbourg contre la France; Il déclaroit que son honneur étoit engagé à soutenir l'Election que les Chanoines de Cologne avoient faite du Prince de Furstemberg, à laquelle l'Empereur s'opposoit.

Cette Déclaration de Guerre fut soutenüe par des Armées. Les Maréchaux de Duras & de Montglas prirent Worms, Philipsbourg, & Mayence. Le Dauphin fit en personne les Sièges de Manheim & de Franckendahl. Presque tout le cours du Rhin passa en moins d'une Campagne sous la domination François.

1689.

L'Electeur qui chargeoit la France de tous les chagrins que sa Belle-Mère lui avoit donnés, à cause qu'elle eut ses raisons pour engager Frederic Guillaume dans le parti de Louis XIV. étoit rempli d'une haine aveugle pour tout ce qui étoit François. Les Partisans de l'Empereur nourrissoient soigneusement cette haine, dont il ne pouvoit résulter pour eux que des avantages; ils la fomentoient encore en créant le fantôme de la Monarchie Universelle de Louis XIV. avec lequel ils enforceloient la moitié de l'Europe.

ven

ren
qui
leu
lib
qu
lui

cu
r

vent émue par cette machine puérile, & plongée dans des guerres qui lui étoient tout à fait étrangères; mais comme la trempe des meilleures armes vient enfin à s'éteindre, ces argumens perdirent insensiblement la force de l'illusion, & les Princes Allemands comprirent que s'il y avoit pour eux un Despotisme à craindre, ce n'étoit pas celui de Louis XIV.

Dans ces tems là le charme étoit encore dans sa première force, & il opéra avec efficacité sur un esprit préparé par ses préjugés à en recevoir l'impression favorablement. Frédéric III. se crut donc obligé de secourir l'Empereur. Il envoya le General Schöning avec un Corps considérable sur le Haut Rhin. Les Brandebourgeois s'emparèrent de Rhinbergue; l'Electeur prit en personne le commandement de l'Armée, & il mit le Siège devant Bonn. Mayence se rendit aux Alliés; Les troupes qui avoient pris cette Ville se joignirent à celles de l'Electeur, & empêchèrent Boufflers de secourir Bonn; d'Asfeldt qui en étoit Gouverneur, rendit cette Ville par Capitulation le 12, d'Octobre.

L'Electeur fit encore la Campagne suivante, & continua de fournir des secours considérables aux Alliés contre la France. 1690.

Guillaume d'Orange avoit entrepris la Conquête de l'Angleterre, peu de tems après la mort du grand Electeur. Un Juif d'Amsterdam, nommé Schwartzau, lui prêta 2. Millions pour cette expedition, en lui disant: Si vous êtes heureux, je fais que vous me les rendrez; Si vous êtes malheureux, je consens de les perdre. Guillaume passa avec cette somme en Angleterre, détrôna le Roy Jaques son Beau-Père, battit le parti des Opposans, & devint en quelque façon Souverain légitime de ces trois Royaumes, par l'approbation du Peuple qui sembla autoriser son Usurpation. Jaques, qui n'avoit pû se faire considérer sur le Trône, ni régner sur une Nation dont il devoit respecter les Privilèges, laissa échapper le Sceptre de ses mains, & poursuivi par ses propres enfans qui lui avoient arraché la Couronne, il se réfugia en France. où sa Dignité & ses Malheurs ne purent le faire estimer.

1691.

Le nouveau Roy d'Angleterre prit le Commandement de l'Armée des Alliés. Il gouvernoit l'Europe par ses intrigues, en excitant la jalousie de tous les Princes contre la Puissance de Louis XIV. qu'il haïssoit. Le Monde étoit armé & en guerre, pour lui conserver le Despotisme avec lequel il gouvernoit les Provinces Unies, qu'il auroit perdu en tems de paix. On l'appelloit le Roy d'Hollande, & le Stadthouder d'Angleterre. Malheureux à la guerre où il fut presque toujours battu ; fécond & vigilant à réparer ses pertes ; c'étoit l'Hidre de la fable qui se reproduisoit sans cesse, & qui étoit aussi respecté de ses Ennemis après ses défaites, que Louis XIV. l'étoit après ses Victoires. Il eut une entrevue avec l'Electeur au sujet des Intérêts politiques du tems.

Les Caractères de ces Princes étoient trop différens pour qu'il pût résulter quelque chose d'important de leurs délibérations. Guillaume étoit froid, simple dans ses mœurs, & rempli de choses solides ; Frédéric III. étoit inquiet, impatient, préoccupé de sa Grandeur & de sa Magnificence, réglant les moindres actions sur l'exact compas du Cérémonial, & sur les nuances des Dignités. Un fauteuil & une chaise à dos pensèrent brouiller ces Princes pour jamais. Cependant 15,000. Brandebourgeois joignirent l'Armée de Flandres que le Roy Guillaume commandoit, & l'Electeur envoya un autre secours considérable à l'Empereur contre les Infideles. Ces troupes se distinguèrent à la Bataille de Salanquemen, que le Prince Eugene gagna sur les Turcs.

1692.

Le Roy Guillaume, ou moins heureux, ou moins habile, perdit en Flandres les Batailles de Leufen & de Landen.

1693.

Le Duc Ernest Auguste de Hanovre, Beau-Père de Frédéric III. fournit également à l'Empereur un Corps de 6000. hommes pour la Guerre d'Hongrie, & en récompense de ce secours il obtint la Dignité Electorale. La Création de ce neuvième Electorat rencontra beaucoup d'oppositions dans l'Empire. Il ne se trouva que les Electeurs de Brandebourg & de Saxe qui l'appuyerent, mais l'Empereur qui avoit besoin de secours réels, ne crût pas les acheter trop cher en les payant par des titres frivoles.

Il sembloit que c'étoit la saison où l'ambition des Princes de-
germer & éclore. Le tems pour leur accroissement étoit si favo-
rable, que Guillaume d'Orange étoit devenu Roy d'Angleterre, &
est d'Hanovre, Electeur. Auguste de Saxe étoit sur le point de
devenir Roi de Pologne, & Frédéric.III. rouloit déjà dans sa tête le
sein de sa Royauté.

Comme c'est un des articles principaux de la vie de ce Prince,
événement important à la Maison de Brandebourg, & que le pro-
jet de la Royauté est un noeud auquel tiennent toutes les actions de
Frédéric III. il est nécessaire que j'expose ici ce qui y donna lieu,
quels moyens on l'exécuta, & quelques détails qui influèrent
sur la Politique de ces tems.

L'Ambition de Frédéric III. se trouvoit resserrée, tant par son
état que par ses possessions ; sa foiblesse ne lui permettoit pas de s'él-
ever sur des Voisins aussi forts & aussi puissans que lui ; il n'estoit
ressourcé à ce Prince que l'ensure des Titres, pour suppléer à l'in-
fluence de la Puissance. Aussi tous ses Voeux se tournerent du côté
de la Royauté.

On trouve dans les Archives un Mémoire raisonné qu'on attri-
bue au Père Vota, Jésuite : il roule sur le choix des titres de Roi des
Indes, ou de Roy de Prusse, & sur les avantages qui reviendront
à la Royauté. Il paroît que c'est abusivement qu'on attribue cet Ou-
vrage à ce Jésuite, d'autant plus que sa Société ne pouvoit prendre
aucun intérêt à l'agrandissement d'un Prince Protestant ; il est plus
naturel de supposer que l'élévation du Prince d' Orange, & les espé-
rances d'Auguste de Saxe, donnerent de la jalousie à Frédéric III. &
citerent en lui l'émulation de se placer sur un Trône comme eux.
On se trompe toujours, si l'on cherche hors des passions & du coeur
humain, les principes des actions des hommes.

Ce projet étoit si difficile dans son exécution qu'il parut chimè-
rique au Conseil de l'Electeur. Ses Ministres, Danckelmann & Fuchs,
récrioient sur sa frivolité, sur les obstacles insurmontables qu'ils
voyoient à le faire réussir, sur le peu d'utilité qu'on devoit s'en
promettre, & sur la pesanteur du fardeau dont on se chargeoit par

une Dignité onéreuse à soutenir, qui, dans le fonds ne rapporteroit que de vains honneurs. Mais toutes ces raisons ne purent rien sur l'esprit d'un Prince imbu de ses idées, jaloux de ses Voisins, & avide de Grandeurs & de Magnificence.

Danckelmann data sa disgrâce de ce jour. Il fut envoyé à Spandow dans la suite pour avoir dit ses sentimens avec hardiesse, & pour avoir montré la vérité avec trop peu d'adoucissement à une Cour corrompue par la flatterie, & contredit un Prince vain dans les projets de sa Grandeur.

Il y a un milieu entre le poison de la flatterie & la rigidité salutaire de la vérité, qui se peut concilier avec le caractère d'un homme d'honneur. Les leçons d'un Misantrope revoltent, mais les conseils dont on modifie la rudesse, sont comme ce miel dont on a frotté les bords d'un vase rempli d'absynthe. C'est un véhicule qui en dérobe l'amertume. Heureux sont les Princes dont les oreilles moins délicates aiment la vérité, lors même qu'elle est prodiguée par des bouches indiscrettes; mais c'est un effort de vertu, dont peu d'hommes sont capables.

A la faveur de Danckelmann succéda un jeune Courtisan peu connu par son génie & par ses talens; c'étoit le Baron de Colbe, depuis Comte de Wartemberg. Sans avoir ces qualités brillantes qui enlèvent les suffrages, il possédoit l'art de la Cour, qui est celui de l'assiduité, de la flatterie, & en un mot de la bassesse; il entra aveuglément dans les vues de son Maître, persuadé que servir ses passions, c'étoit affermir sa fortune particulière.

Colbe n'étoit pas assez privé de lumière pour ne pas s'appercvoir qu'il avoit besoin d'un guide habile dans sa nouvelle carrière. D'Ilgén, Secrétaire dans le Bureau des affaires étrangères, gagna sa confiance, & le dirigea avec tant de prudence que Colbe fut déclaré Premier Ministre, & qu'il fut mis à la tête du Département des Affaires étrangères.

Dans le fonds Frédéric III. n'étoit flatté que par les dehors de la Royauté, par le faste de la représentation, & par un certain travail de l'amour propre, qui se plaît à faire sentir aux autres leur Infériorité.

Ce qui fut en effet l'ouvrage d'une vanité bourgeoise & puérile, se trouva dans la suite un Chef d'oeuvre de Politique : car la Royauté tira la Maison de Brandebourg de ce joug de servitude, où la maison d'Autriche tenoit alors tous les Princes d'Allemagne. C'étoit une amorce que Frédéric III. jettoit à toute la Postérité, & par laquelle il sembloit leur dire.

„Je vous ai acquis un Titre, rendez-vous en digne ; j'ai jeté „les fondemens de votre Grandeur ; c'est à vous d'achever l'Ou- „vrage.

Frédéric III. fut obligé de remuer tous les ressorts de la Politique, & d'épuiser toutes les ressources de l'intrigue, pour conduire son projet jusqu'à sa maturité. C'étoit un préalable de s'assurer des bonnes dispositions de l'Empereur ; son approbation entraînoit les suffrages de tout le Corps Germanique. Pour prévenir l'esprit de ce Prince favorablement, l'Electeur lui remit le Cercle de Swibus, & il se contenta de l'expectance sur la Principauté de Frise, & la Baronie de Limbourg, sur lesquelles la Maison Electorale avoit d'ailleurs des droits incontestables. Par les mêmes principes les Troupes Brandebourgeoises servirent dans les armées Impériales en Flandre, au Rhin, & en Hongrie, quoique l'Electeur n'eut directement, ni indirectement, part à ces guerres, & qu'il eût été plus avantageux à ses intérêts d'observer une exacte neutralité.

Pendant que l'Europe étoit déchirée par des guerres violentes, l'Electeur accommoda à l'exemple de son Père, les Ducs de Mecklenbourg Schwerin & de Strelitz, qui avoient entr'eux des démêlés de Succession. L'Université de Halle fut fondée *. Il fit construire ces belles Ecluses sur la Salle, qui facilitent le negoce & le transport des Sels, † & il reçût chez lui cette Ambassade unique & singulière, à la suite de laquelle se trouvoit le Czar Pierre Alexiowiz.

Ce jeune Czar s'étoit appercû à force de génie qu'il étoit un Barbare, & que sa Nation étoit sauvage ; il sortoit alors pour la première fois de ses Etats, ayant formé le noble projet de s'instruire, & de rapporter dans le sein de sa Patrie, les lumières de la Raison, & l'industrie qui lui manquoient. La Nature avoit fait de ce Prince un

1695.

* en 1696.

† 1697.

grand homme, mais un défaut total d'éducation l'avoit laissé sauvage. De là résulroit sans cesse dans sa conduite un mélange extraordinaire d'actions véritablement grandes & de singularités, de reparties spirituelles & de manières grossières, de desseins salutaires & de vengeances cruelles. Il se plaignoit lui-même de ce que, parvenant à policer sa Nation, il ne pouvoit encore dompter sa propre ferocité. En morale c'étoit un Phénomène bizarre, qui inspiroit l'admiration & la terreur. Pour ses sujets c'étoit un orage, dont la foudre abattoit les Clochers & les Arbres, & dont la pluie rendoit les Contrées fécondes. De Berlin il se rendit en Hollande, & de là en Angleterre.

L'Europe s'acheminoit dès lors à grands pas vers la Paix générale. Les Alliés étoient rebutés du mauvais succès de leurs Armes; & Louis XIV. qui voyoit Charles II. Roy d'Espagne sur son déclin, d'un tempérament à ne pas promettre une longue vie, se prêta facilement à la paix; quoiqu'il rendit ses Conquêtes presque sans restriction, il sacrifia ces avantages passagers à des desseins plus importants. Il lui falloit l'aïssance de la paix pour les préparatifs d'une nouvelle guerre, dont l'objet étoit de la dernière conséquence pour la maison de Bourbon. La Paix fut conclue à Ryswick, & l'Electeur qui n'avoit concouru à cette guerre que par complaisance, n'en retira non plus aucun avantage.

Dans le Nord, Auguste de Saxe fut élu Roy de Pologne, & les intrigues de Flemming son Ministre, & son Général, l'emporterent sur les libéralités du Prince de Conti. * Le nouveau Roy de Polognes étoit épuisé par ses dépenses, ce qui l'obligea de vendre à Frédéric I. l'Avouerie de l'Abbaye de Quedlinbourg & du Petersberg de Halle †.

• 1698.

† 1699.

L'Electeur profita des troubles de la Pologne, & s'empara d'Elbing, pour se rembourser d'une somme que les Polonois lui devoient. On moyenna un accommodement par lequel les Polonois lui engagèrent une Couronne & des bijoux Russiens. Après quoi l'Electeur fit évacuer la Ville, & conserva, du consentement de la République la possession du territoire d'Elbing.

L'Europe ne tarda pas d'être agitée par des troubles nouveaux au commencement de ce Siècle, à cause de la Succession de Charles II.

II. Roy d'Espagne qui vint à mourir , La Maison de Bourbon, & celle d'Autriche, se la disputoient.

On avoit essayé de prévenir les guerres sanglantes auxquelles cette Succession donneroit lieu. Louis XIV. étoit convenu avec les Puissances maritimes d'un Traité de partage. On avoit ensuite pris d'autres arrangemens, mais il étoit écrit dans le livre des Destins qu'il n'en feroit rien. Le jeune Prince de Bavière, destiné au Trône d'Espagne, mourut même avant Charles II.

L'Empereur protestoit d'ailleurs contre tout partage; il soutenoit l'indivisibilité de la Monarchie Espagnole, & prétendoit qu'étant d'une même Maison, divisée en deux Branches, elles avoient droit de succéder les unes aux autres, celle d'Espagne à celle d'Autriche, & celle d'Autriche à celle d'Espagne. L'Empereur Leopold & Louis XIV. étoient au même degré, tous deux petits-fils de Philippe III. Tous deux avoient épousé des filles de Philippe IV. Mais le droit d'aînesse étoit dans la Maison de Bourbon, & Louis XIV. fondoient principalement ses droits sur ce fameux Testament de Charles II. que le Cardinal Porto-Carrero, & son Confesseur, lui firent signer, agonisant & d'une main tremblante. Ce Testament changea la face de l'Europe.

Louis XIV. céda ses droits à son Petit-fils, Philippe d'Anjou, espérant d'applanir par le choix de ce Prince éloigné du Trône de France les difficultés & les obstacles que la jalousie de l'Europe pourroient porter à sa Grandeur. Philippe passa en Espagne; il fut reconnu Roy par tous les Princes, à l'exception de l'Empereur Joseph.

Au commencement de cette Guerre, la France étoit au comble de sa Grandeur. Elle se voyoit victorieuse de tous ses ennemis. La Paix de Ryswick faisoit peloge de sa modération. Louis XIV. déployoit dans l'Univers entier sa Splendeur & sa Magnificence; Il étoit craint & respecté. La France étoit comme un Athlète, préparée seule au combat, qui entroient dans une lice où il ne paroïssoit encore aucun adversaire; rien n'étoit épargné pour les préparatifs des Armemens de terre & des Armemens de Mer, également nombreux. Dans ses plus violens efforts, cette Monarchie entretenoit 400. mille Combattans, mais les
grands

grands Généraux étoient morts, & il se trouva, (avant que le maréchal de Villars se fut fait connoître,) que la France avoit 800. Mille bras, sans point de tête: tant il est vrai de dire, que la fortune des Etats ne dépend souvent que d'un seul homme !

La Maison d'Autriche étoit bien éloignée de se trouver dans une situation aussi heureuse; elle étoit presque épuisée par les guerres continuelles qu'elle avoit soutenues. Son Gouvernement étoit dans la langueur & dans la foiblesse, & cette Puissance jointe au Corps Germanique ne pouvoit rien sans le secours des Hollandois, & des Anglois; mais avec moins de ressources & de troupes que la France, elle avoit à la tête de ses Armées le Prince Eugene de Savoye.

Le Roy Guillaume, qui gouvernoit l'Angleterre & la Hollande, étoit dans l'engourdissement de la surprise, en apprenant cette nouvelle, & il reconnut le Duc d'Anjou Roy d'Espagne par une espèce de précipitation: mais dès que la réflexion l'eut ramené à son sang naturel, il se déclara pour la maison d'Autriche, parce que la Nation Angloise le vouloit, & que son intérêt sembloit le demander.

Le Nord étoit lui-même plongé dans la guerre que Charles XII. portoit en Dannemarck; la Jeunesse de ce Prince avoit inspiré à ses voisins l'audace de l'attaquer; mais ils trouverent un Prince qui joignoit un courage impétueux à des vengeances implacables.

Frédéric III. qui étoit en paix, se laissa entraîner dans la grande Alliance contre Louis XIV. dont le Roy Guillaume étoit l'ame, pour se frayer le chemin de la Royauté par ce service, pour subvenir par ses subsides à l'entretien d'un Corps nombreux de troupes, & pour que cet argent étranger soulagea la prodigalité de sa magnificence.

Il est difficile de comprendre, comment cette espèce de fierté qu'ont les ames généreuses, peut se concilier avec la bassesse qu'il y a d'être aux aumônes de ses égaux. Les tentatives de la France furent vaines pour détacher l'Electeur de cette Alliance; il étoit lié par des subsides, par son inclination, & par les esperances.

Ce fut dans ces conjonctures que se négocia à Vienne le Traité de la Couronne, par lequel l'Empereur s'engagea de reconnoître
Frède

Frédéric III. Roy de Prusse, moyennant qu'il lui fournit un secours de dix mille hommes à ses dépens pendant le cours de toute cette guerre ; qu'il entretint une Compagnie de Garnison à Philipsbourg, qu'il allât de concert avec l'Empereur dans toutes les affaires de l'Empire, que sa Royauté n'alterât en rien les obligations de ses Etats d'Allemagne, qu'il renonçât au Subside que la Maison d'Autriche lui devoit, & qu'il promit de donner sa voix pour l'Election des enfans mâles de l'Empereur Joseph ; „à moins qu'il n'y eut des raisons graves & importantes qui ne l'obligeassent d'élire un Empereur d'une autre Maison.“

Ce Traité fut signé & ratifié. Rome cria, & Varsovie se tût. L'Ordre Teutonique protesta contre cet Acte, & osa revendiquer la Prusse ; le Roy d'Angleterre qui ne cherchoit que des Ennemis à la France, les achetoit à tout prix. Il avoit besoin des secours de l'Electeur dans la grande Alliance, & il le reconnut des premiers. Le Roy Auguste qui affermissoit sa Couronne sur sa tête, y souscrivit. Le Dannemârck, qui ne craignoit & n'envioit que la Suède, s'y prêta facilement. Charles XII. qui soutenoit une guerre difficile ne crut pas qu'il lui convint de chicaner sur un titre pour augmenter le nombre de ses Ennemis, & l'Empire fut entraîné par l'Empereur, comme on l'avoit prévu. Ainsi se termina cette grande Affaire qui avoit trouvé de l'opposition dans le Conseil de l'Electeur, dans les Cours étrangères, chez les Amis comme chez les Ennemis, à laquelle il fallut une complication de Circonstances aussi extraordinaires pour qu'elle put réussir, qu'on avoit traité de chimérique, & dont on prit bientôt une opinion différente. Le Prince Eugene dit en l'apprenant, que l'Empereur devoit faire pendre les Ministres qui lui avoient donné un conseil aussi perfide.

Le Couronnement se fit l'année suivante. Le Roy que nous appellerons désormais Frédéric I. se rendit en Prusse, & dans la Cérémonie du Sacre, on observa qu'il se mit luy-même la Couronne sur la tête. Il créa en mémoire de cet événement l'Ordre des Chevaliers de l'Aigle noir.

1701.

Le Public ne pouvoit cependant pas revenir de la prévention dans laquelle il étoit contre cette Royauté. Le bon sens du vulgaire désiroit une augmentation de puissance avec une augmentation de Dignités. Ceux qui n'étoient pas Peuple, pensoient de même ; il échapa à l'Electrice de dire à quelqu'une de ses femmes ; „Qu'elle étoit au désespoir d'aller jouer en Prusse la Reine de Théâtre vis à vis de son Esope.“ Elle écrivit à Leibnitz. „Ne croyez pas que je préfère ces Grandeurs & ces Couronnes, dont on fait ici tant de cas, aux charmes des entretiens Philosophiques que nous avons eûs à Charlottenbourg.

Aux pressantes sollicitations de cette Princesse, se forma à Berlin l'Academie Royale des Sciences, dont Leibnitz fut le fondateur & le Chef. On persuada à Frédéric I. qu'il convenoit à sa Royauté d'entretenir une Academie, comme on fait accroire à un nouveau Gentilhomme qu'il est sçant d'entretenir une meute de chasse. On se propose de parler en son lieu de cette Academie avec plus d'étendue.

Le Roy s'abandonna après son couronnement au penchant qu'il avoit aux Cérémonies & à la magnificence, sans plus y mettre de bornes. A son retour de Prusse, il fit une entrée superbe à Berlin.

Pendant le divertissement de ces Fêtes & de ces Célébrités, on apprit que Charles XII. cet Alexandre du Nord, qui auroit ressemblé en tout au Roy de Macedoine, s'il eut eu sa fortune, venoit de remporter sur les Saxons auprès de Riga une Victoire complete. Le Roy de Dannemarck & le Czar avoient attaqués, comme on l'a dit, ce jeune Héros, l'un en Norwegue, & l'autre en Livonie. Charles XII. força dans sa Capitale le Monarque Danois à faire la paix ; De là il passa avec 8000. Suedois en Livonie, défit 80. mille Russes auprès de Nerva, & battit 30. mille Saxons au passage de la Dwina.

La fuite des Saxons les entraîna vers les limites de la Prusse. Frédéric I. en fut d'autant plus inquiet que la plus grande partie des troupes servoit dans les Armées Impériales, & que la Guerre s'approchoit de son nouveau Royaume. Charles XII. promit cependant, en considération des intercessions de l'Empereur, de l'Angleterre & de la Hollande, la neutralité pour la Prusse.

Ces années étoient l'Epoque des triomphes du Roi de Suède; il dispoſoit en Souverain de la Pologne, ſes négociations étoient des ordres, & ſes Batailles des Victoires: mais ces Victoires toutes brillantes qu'elles étoient, conſumoient les Vainqueurs, & obligeoient le Héros à renouveler ſouvent ſes armées. Un transport de troupes Suédoïſes ſe rendit en Pomeranie; Berlin en prit l'alarme, ces troupes n'en traverserent pas moins l'Electorat, & ſe rendirent en Pologne au lieu de leur deſtination.

Le Roy leva 8000. hommes de nouvelles troupes. Au lieu de les employer à la ſureté de ſes Etats, il les envoya en Flandres à l'Armée des Alliés, il ſe rendit lui-même au Pays de Clèves pour recueillir l'héritage de Guillaume d'Orange Roy d'Angleterre, auquel Anne, ſeconde fille du Roy Jaques, ſuccéda au Trône.

Les droits de Frédéric I. ſe fondeoient ſur le Teſtament de Frédéric Henri d'Orange qui avoit ſubſtitué ſes biens, en cas d'extinction des mâles, ſur ſe chef de ſa fille, Epouſe du Grand Electeur. Le Roy Guillaume laiſſa un Teſtament tout contraire en faveur du Prince Friſon de Naſſow, dont les Etats Généraux devoient être les Exécuteurs. Les biens de la Succeſſion conſiſtoient dans la Principauté d'Orange, de Mœurs, & dans différentes Seigneuries & fonds de terre ſitués en Hollande & en Zélande.

Frédéric I. menaçoit de retirer ſes troupes de la Flandre, ſi on ne lui rendoit juſtice. Cette menace perſuada aux Hollandois que ſes droits étoient légitimes. On parvint cependant à régler un accord proviſionnel, qui partageoit l'héritage en deux parties égales. Un gros Diamant fut d'abord remis à Frédéric I. & il conſentit à laiſſer ſes troupes en Flandre. Louïs XIV. mit le Prince de Conti en poſſeſſion d'Orange; le Roy ſ'en trouva grièvement offeſſé, il augmenta ſon Armée, & prit même des troupes de Gotha & de Wolfenbüttel à ſon ſervice. Il déclara peu après la Guerre à la France, à cauſe que l'Armée de Boufflers avoit commis quelques excès dans le Pais de Clèves. Louïs XIV. ne ſ'apperçût pas qu'il eût un nouvel ennemi, & le nouveau Roy fit en cela beaucoup pour ſa paſſion, mais rien pour ſes interets: il manifeftoit ſa haine pour la France dans toutes les

occasions ; il obligea le Duc Antoine Ulrich de Wolfenbüttel à renoncer aux engagemens qu'il avoit pris avec Louis XIV. après que les Ducs d'Hanovre & de Zell eurent dissipé les troupes qu'il entretenoit au moyen des subsides François.

1703.

Dans ce tems l'Angleterre faisoit des efforts prodigieux pour la Maison d'Autriche. Ses flottes transporterent l'Archiduc Charles, (qui depuis devint Empereur,) dans ce Royaume, qu'une Armée Angloise devoit aider à lui conquérir. L'enthousiasme de l'Europe pour la Maison d'Autriche surpassoit tout ce qu'on en peut dire.

Dans cette Guerre de Succession, les Troupes Prussiennes soutinrent avec éclat la réputation qu'elles avoient acquises sous le grand Electeur. Sur le Rhin, elles prirent Keyferswerth en Allemagne ; dans cette action de Höchstedt, où Villars surprit & battit Stirheim, le Prince d'Anhalt fit une belle retraite avec les 8000. Prussiens qu'il commandoit. Je lui ai ouï dire, que lorsqu'il s'aperçut de la confusion & de la fuite des Autrichiens, il forma un quarré de ses troupes, & traversa une grande plaine en bon ordre jusqu'à un bois qu'il gagna vers la nuit, sans que la Cavalerie Française osât l'entamer.

Le succès des Troupes Prussiennes sur le Rhin, & leur bonne conduite en Souabe ne rassurèrent pas Frédéric I. contre l'apprehension que lui donnoit le voisinage des Suédois ; rien ne leur résistoit alors. Le génie de Pierre I. la magnificence d'Auguste, étoient impuissans contre la fortune de Charles XII. Ce Héros étoit à la fois plus vaoureux que le Czar, & plus vigilant que le Roy de Pologne. Pierre préféroit la ruse à l'audace, Auguste les plaisirs aux travaux, & Charles l'amour de la gloire à la possession du Monde entier. Les Saxons étoient souvent surpris ou battus, les Moscovites avoient appris à leurs dépens l'art de se retirer à propos ; ils ne faisoient qu'une Guerre d'incursions, les armées Suédoises étoient seules assaillantes, & victorieuses jusqu'alors. Mais Charles XII. dont l'inflexible opiniâtreté ne mollissoit jamais, ne savoit exécuter ses projets que par la force : il domptoit la fortune comme ses Ennemis. Le Czar & le Roy de Pologne suppléaient à cette valeur d'enthousiasme par les Intrigues du Cabinet ; ils éveilloient la jalousie de l'Europe, & suscitoient l'en-

l'envie contre le bonheur d'un jeune Prince ambitieux, implacable dans ses haines, & qui ne favoit se venger des Rois ses ennemis qu'en les détrônant.

Ces intrigues n'empêcherent pas Frédéric I. qui n'avoit point de troupes à sa disposition, de conclurre une Alliance défensive avec Charles XII. qui avoit une Armée victorieuse dans le voisinage. Frédéric I. & Stanislas reconnurent reciproquement leur Royauté; le Traité ne dura qu'autant que la fortune de Charles XII. ne se démentit point.

Malgré cette Alliance le Roi fournit toutes ses Places de la Prusse, de garnisons suffisantes, & * il envoya de nouveaux secours à l'Armée Alliée en Souabe. Les Prussiens y eurent une part considérable au gain de la fameuse Bataille de Höchstet; ils étoient à la droite sous les ordres du Prince d'Anhalt, & de ce Corps d'Armée que le Prince Eugene commandoit. A la premiere attaque la Cavalerie & l'Infanterie Impériale plierent devant les François, & les Bavarois, mais les Prussiens soutinrent le choc, & enfoncerent les ennemis; le Prince Eugene vint se mettre à leur tête, piqué de la mauvaise manoeuvre des Autrichiens, il dit qu'il vouloit combattre avec de braves Gens, & non pas avec des Troupes qui lâchoient le pied. C'est un fait connu, que Milord Malborough fit une partie de l'Infanterie & de la Cavalerie Française prisonnière au Village de Blenheim, & que le gain de cette Bataille fit perdre aux François la Bavière & la Souabe.

Milord Malborough se rendit à Berlin, après avoir terminé cette glorieuse Campagne, pour disposer Frédéric I. à l'envoy d'un Corps de ses troupes en Italie. Cet Anglois qui avoit jugé des projets de Charles XII. en voyant une Carte Geographique étendue sur sa table, pénétra facilement le caractère de Frédéric I. en jettant un regard sur sa Cour: il étoit rempli de soumissions & de souplesses devant ce Prince, il flattoit adroitement sa vanité & s'empressoit à lui présenter l'éguière, lorsqu'il se levoit de table. Frédéric ne put lui résister, & il accorda aux flatteries du Courtisan ce qu'il auroit peut-être refusé au mérite du Grand Capitaine, & à l'habileté du profond

Politique ; & le Prince d'Anhalt marcha en Italie à la tête de 8000. hommes.

1707.

La mort de la Reine Sophie Charlotte mit alors toute la Cour en deuil. C'étoit une Princesse d'un mérite distingué, qui joignoit tous les appas de son Sexe aux graces de l'esprit & aux lumières de la raison. Elle avoit voyagé dans sa jeunesse en Italie & en France, sous la conduite de ses Parens. On la destinoit pour le Trône de France ; Louis XIV. fut touché de sa Beauté, mais des raisons de politique firent échouer ce mariage. Cette Princesse amena en Prusse l'esprit de la Société, la vraie Politesse, & l'Amour des Arts & des Sciences. Elle fonda, comme on l'a dit plus haut, l'Académie Royale. Elle appella Leibnitz, & beaucoup d'autres Savans à sa Cour : sa curiosité vouloit saisir les premiers principes des choses. Leibnitz qu'elle pressoit un jour sur ce sujet, lui dit ; „Madame, il n'y a pas moyen de vous contenter : vous voulez savoir le pourquoi du pourquoi.“ Charlottembourg étoit le rendez-vous des gens de goût ; toutes sortes de divertissemens & de fêtes variées à l'infini rendoient ce séjour délicieux, & cette Cour brillante.

Sophie Charlotte avoit l'ame forte, sa Religion étoit épurée, son humeur douce, son esprit orné de la Lecture de tous les bons Livres François & Italiens. Elle mourut à Hanovre dans le sein de sa famille. On voulut introduire un Ministre Réformé dans son appartement : „Laissez-moi mourir, lui dit elle, sans disputer.“ Une Dame d'honneur qu'elle aimoit beaucoup, se fendoit en larmes. „Ne me plaignez pas, reprit elle, car je vais à présent satisfaire ma curiosité sur les principes des choses, que Leibnitz n'a jamais pû m'expliquer, sur l'espace, sur l'infini, sur l'Etre, & sur le Néant, & je prépare au Roi mon Epoux le Spectacle de mon Enterrement, où il aura une nouvelle occasion de déployer sa magnificence.“ Elle recommanda en mourant les Savans qu'elle avoit protégés, & les Arts qu'elle avoit cultivés, à l'Electeur son frere. Frédéric I. se consola par la cérémonie de cette Pompe funébre, de la perte d'une Epouse qu'il n'auroit jamais assez pû regretter.

En

En Italie la Guerre commençoit à devenir plus vive. Les Prussiens que Milord Malborough y avoit fait marcher, furent battus à Casano avec le Prince Eugene, & à Calcinato, lorsque le Général Reventlau qui les commandoit, y fut surpris par le grand Prieur. 1606.

Le Prince Eugene pouvoit être battu, mais il savoit réparer ses pertes en grand homme, & l'échec de Casano fut bientôt oublié par le gain de la fameuse Bataille de Turin, auquel les Prussiens eurent la part principale. Quoique le Duc d'Orleans proposât aux François de sortir de leurs retranchemens, son avis ne fut point suivi; la Feuillade & Marfin avoient des Ordres de la Cour, qui portoient, à ce qu'on assure, de ne point hazarder de bataille. Celle de Höchstedt avoit rendu, à ce qu'il paroît, le Conseil de Louis XIV. plus circonspect. 1607.

Les François qui auroient été du double supérieurs aux Alliés, s'ils les avoient attaqués hors de leurs Retranchemens, leur furent inférieurs partout, à cause que les quartiers différens qu'ils avoient à défendre, étoient d'une étendue immense, & de plus séparés.

Les Prussiens qui avoient l'aile gauche de l'Armée des Alliés, attaquèrent la droite du retranchement François qui s'appuyoit à la Doria. Le Prince d'Anhalt étoit déjà aux bords du fossé, & la résistance des ennemis ralentissoit la vigueur de son attaque, lorsque 3. Grenadiers se glissèrent le long de la Doria, & tournèrent le Retranchement François par un endroit où il n'étoit pas bien appuyé à cette Rivière. Tout d'un coup une voix s'entendit dans l'armée Française: nous sommes coupés; elle abandonne son poste, prend la fuite, & en même tems le Prince d'Anhalt escalade le retranchement, & gagne la Bataille. Le Prince Eugene en fit un Compliment au Roy, où l'éloge de ses troupes devoit lui faire d'autant plus de plaisir qu'il parloit d'un Prince qui devoit bien s'y connoître.

Frédéric I. fit pendant cette guerre quelques acquisitions pacifiques. Il acheta le Comté de Tecklenbourg en Westphalie du Comte de Solms Braunsfels; & Madame de Némours qui étoit en possession de la Principauté de Neuchâtel, venant de mourir, le Conseil d'Etat de Neuchâtel prit la Régence, & élut quelques uns de ses Membres

bres pour juger des prétentions que le Roy de Prusse formoit d'un ~~autre~~ côté, & tous les Parens de la Maison de Longueville d'un ~~autre~~ côté. La Principauté de Neufchâtel fut adjugée au Roy, comme ayant ~~les~~ meilleurs droits en qualité d'Heritier de la Maison d'Orange. Louis XIV. s'éleva contre cette sentence, mais il avoit de si grands inter ~~ests~~ à discuter qu'ils firent évanouir devant eux ces petits litiges, & la Souveraineté de Neufchatel fut assurée à la Maison Royale par la Paix d'Utrecht.

Charles XII. étoit parvenu alors au plus haut période de ses prosperités. Il avoit détrôné Auguste de Pologne, & lui avoit prescrite les loix d'une paix dure à Alt-Ranstadt au milieu de la Saxe. Le Roy vouloit disposer ce Prince à quitter la Saxe, il lui envoya son Grand Maréchal Printz pour le prier de ne point troubler la paix de l'Allemagne par le séjour qu'il y faisoit avec ses troupes.

Charles XII. qui avoit d'ailleurs le dessein de quitter les Etats d'un Prince qu'il avoit mis aux abois, pour renouveler la même Scène avec le Czar à Moskow, trouva mauvais que Printz lui fit de pareilles propositions, & lui demanda ironiquement: „Si les troupes Prussiennes étoient aussi bonnes que les Brandebourgeoises.” Oui, Sire, lui répondit l'Envoyé, elles sont encore composées de ces vieux Soldats qui se trouverent à Fehrbellin.” Charles XII. obligea l'Empereur, en passant par la Silésie, de restituer 125. Eglises aux Protestans de ce Duché. Le Pape en murmura, & n'épargna pas ses Censures. Joseph lui répondit, que si le Roy de Suède lui eut proposé de se faire Lutherien - lui même, il ne savoit pas trop ce qui en seroit arrivé.

1708.

Ces mêmes Suédois qui faisoient alors la terreur du Nord, rétablirent avec les Prussiens & les Hannovriens le calme dans la Ville de Hambourg, qu'une sédition populaire avoit troublée. Frédéric I. y envoya 4000. hommes pour soutenir les prérogatives des Echevins & des Syndics. Il eut quelques démêlés avec ceux de Cologne, à cause que la populace de cette Ville avoit enfoncé les Portes du Résident Prussien, qui tenoit une Chapelle Réformée dans sa Maison. Le Roy fit arrêter des Marchandises de Cologne, qui descendoient le

Rhin
lique
steur
de ce
lui ap
dange

étroit
côté,
tifans
terme
leurs
Princ
kix c
tayer
marie
c

Rhin

hin, & passoient par Wesel, & il menaça d'interdire le culte Catholique dans ses Etats, sur le même pied qu'il en avoit usé, lorsque l'Eleveur Palatin avoit persecuté les Protestants du Palatinat. La crainte de ces représailles fit rentrer la Ville de Cologne dans son devoir, & il apprit que la tolérance est une vertu, qu'il est quelquefois même ingereux d'enfreindre.

La Cour de Frédéric I. étoit alors pleine d'intrigues. Ce Prince étoit comme une mer agitée par differens vents, poussé tantôt d'un côté, tantôt de l'autre ; mais pendant ces orages qu'excitoient les Courtisans, d'Ilggen conduisoit toujours le Gouvernail de l'Etat d'une main ferme & sure. Les Favoris du Roy étoient des gens de peu de génie. Leurs intrigues étoient grossières, & leurs fourberies ouvertes ; le Prince Royal ne pouvoit déguiser le mécontentement qu'il avoit de sa conduite. Ces marques de sa mauvaise volonté leur fit penser à braver leur credit d'un nouvel appuy, & ils persuaderent au Roi de se marier ; quoiqu'il fut très infirme, qu'il ne vécut que par l'art des Médecins, & qu'il chicanait par un reste de tempérament un souffle de vie qui lui restoit. On lui choisit une Princesse de Mecklenbourg-Schwerin, nommée Sophie Louise, dont l'âge, la façon de penser, & les inclinations ne s'accordoient point avec celles de ce Prince ; il n'eut d'autre grément que les Cérémonies de la Nôce, le reste du mariage ne fut que malheureux.

Frédéric I. ne recevoit que de bonnes nouvelles de ses troupes : elles ne se distinguèrent pas moins en Flandres qu'en Italie, elles firent des merveilles sous le Commandement du Comte de Lothum, à la bataille d'Oudenarde & au Siège de Lille.

La fortune se lassâ enfin de protéger les caprices de Charles XII. Il avoit joui de 9. Années de succès. Les 9. dernières années de sa vie ne furent qu'un enchainement de revers : il venoit de rentrer victorieux en Pologne avec une Armée nombreuse, chargée des trésors, des dépouilles des Saxons.

Leipzig fut la Capoue des Suédois, soit que les délices de la Saxe eussent amolli ces Vainqueurs ; soit que la prospérité enflât l'audace.

de ce Prince, & le pouſſât au delà de ſon but, il n'eût plus que des malheurs affreux à eſſayer. Il vouloit diſpoſer de la Ruſſie, comme de la Pologne, & détroner le Czar, comme il avoit détronné Auguſte. Dans ce deſſein il s'avança vers les frontières de la Moſcovie, où deux chemins le conduiſoient, l'un par la Livonie, où tous les ſecours de la Suède étoient à portée de le joindre, par lequel il auroit pû ſ'avancer juſqu'à la nouvelle Ville, que le Czar fondeit alors ſur les bords de la Balthique, & détruire pour jamais le lien qui devoit joindre la Ruſſie avec l'Europe. L'autre chemin traversoit l'Ukraine, & conduiſoit à Moſkow par des Déserts impraticables. Charles XII. ſe déterminâ pour ce dernier; ou, parce qu'il avoit ouï dire qu'on ne vaincroit jamais les Romains que dans Rome, ou que la difficulté de l'entreprise irrita ſon courage, ou parce qu'il comptoit ſur Matzepa, Prince des Coſaques, qui lui avoit promis de fournir ſon armée de vivres, & de la joindre avec un nombre conſidérable des ſiens. Le Czar fut averti des intrigues de ce Coſaque, il diſſipa les Troupes que Matzepa aſſembloit, & s'empara de ſes Magasins, de ſorte que lors que le Roy de Suède arriva devant la petite Ville de Pultawa, il ne trouva que des déserts affreux, au lieu de Magasins, & un Prince fugitif qui venoit chercher un azile dans ſon Camp, au lieu d'un Allié puiſſant qui lui amenoit des ſecours.

Ces contretiens ne rebuterent point Charles XII. Il aſſiégea Pultawa, comme ſ'il n'eût manqué de rien; lui, qui avoit été invulnérable juſqu'alors, fut bleſſé à la jambe, en ſ'amuſant à reconnoître cette bicoque de trop près. Son Général Löwenhaupt qui lui amenoit des vivres, des munitions, & un ſecours de 13. mille hommes, fut battu par le Czar à trois reprises, & obligé dans cette néceſſité de braver les Convois qu'il conduiſoit, il n'arriva au Camp du Roy qu'avec 3000. hommes de Troupes extenuées de fatigues.

Le Czar s'approcha bientôt de Pultawa, & dans cette plaine ſe donna cette Bataille ſi célèbre entre les deux hommes les plus ſinguliers de leur Siècle.

Charles XII. qui juſqu'alors, comme l'Arbitre des Deſtins, n'avoit rien trouvé qui arrêât ſes volontés, fit tout ce qu'on pouvoit

voit attendre d'un Prince blessé, & porté sur des brancards. Pierre Alexiowitz, qui n'avoit été que Législateur jusqu'alors, assisté de Meitzikow, marqua dans cette journée qu'il possédoit les parties d'un grand Capitaine, & se surpassa. Mais tout étoit fatal aux Suédois; la blessure de leur Roy qui l'empêchoit d'agir; la misère qui leur otoi les forces pour combattre; un corps détaché qui s'égara le jour de cette bataille décisive, le nombre de leurs ennemis, & le tems qu'ils avoient eu d'élever des Redoutes, & de disposer avantageusement leurs Troupes. Enfin les Suédois furent battus, & perdirent, par un instant décisif & malheureux, le fruit de neuf Années de travaux & de tant de prodiges de valeur.

Charles XII. fut réduit à chercher un azile chez les Turcs; ses haines implacables le suivirent à Bender, d'où il essaya vainement par ses intrigues de soulever la Porte contre les Moscovites. Il devint ainsi la victime de son inflexibilité d'esprit, qu'on auroit appelé opiniâtreté, s'il n'eut pas été un Héros. Après cette défaite l'Armée Suédoise mit bas les armes devant le Czar aux bords du Borysthène, comme l'Armée Moscovite l'avoit fait devant Charles XII. aux rives de la Balhique, après la Bataille de Narva.

Auguste qui vit son antagoniste renversé, se crût dégagé de la parole, & du Traité d'Alt-Ranstadt, il s'aboucha à Berlin avec le Roy de Dannemarck & Frédéric I. Ensuite de quoi, Auguste rentra avec une Armée en Pologne, & le Roy de Dannemarck attaqua les Suédois en Scanie. Frédéric I. que ces Princes ne purent ébranler, demeura neutre.

En Pologne tous les partisans Suédois se tournerent du côté des Saxons. Stanislas étoit auprès de l'armée Suédoise, que Crassaw commandoit. Ce Général se trouvant resserré par les Moscovites & les Saxons, traversa la Nouvelle Marche, & se rendit à Stettin sans qu'il en pût demander la permission à Frédéric I. qui voyoit avec déplaisir ces passages, & ces Armées nombreuses dans son voisinage.

Le Roy fit un voyage à Königsberg où il obtint du Czar, qui

s'y étoit rendu, qu'il rétablirait le jeune Duc de Courlande, Neveu de Frédéric I. dans ses Etats, à condition qu'il épouserait la Nièce de Pierre Alexiowitz.

Du côté du Sud la France faisoit à la Haye des propositions de paix, mais la fermentation des esprits étoit encore trop grande, & les espérances des deux partis trop vagues, & trop chimériques, pour qu'on pût s'accorder. Si les hommes étoient capables de raison, feroient-ils des guerres si longues, si acharnées, & si onéreuses, pour en revenir pourtant à des conditions de paix, qui ne leur paroissent intolérables que dans les momens où la passion les gouverne, ou dans lesquels la fortune leur rit ?

Les Alliés ouvrirent la Campagne par la prise de Tournay & la Bataille de Malplaquet, où le Prince Royal se trouva en personne. Le Comte de Finck eut beaucoup de part à cette Victoire ; il fut le premier qui força le retranchement François avec les Prussiens, il forma ses troupes sur le parapet, & de là il soutint la Cavalerie Impériale que les François repoussèrent par deux reprises, jusqu'à ce qu'un plus grand nombre de troupes se joignant aux siennes eussent pû mettre le dernier sceau à la Victoire.

1710.

En Poméranie les Suédois firent mine de nouveau de vouloir marcher en Saxe ; le Roi craignit que la Guerre ne se portât enfin dans ses propres Etats, & dans l'intention d'assoupir les troubles du Nord, il prit les mesures les plus justes pour les augmenter ; il proposa l'entretien d'une Armée de neutralité, mais cette Armée ne s'assembla jamais. Crassow consentit à une suspension d'armes. Charles XII. qui l'apprit, protesta du fond de la Bessarabie contre toute neutralité : ce Traité ébauché fut rompu, & il eut le sort de tous ces Actes publics, que la nécessité & l'impuissance font faire dans un tems, & que la force secondée de conjonctures favorables rompt dans un autre.

La France renoua les Négociations de la Paix à Gertrudenberg, & dès les premières conférences elle s'engagea à reconnoître la Royauté de Prusse & la Souveraineté de Neuchâtel. L'ouvrage de la Paix avorta encore, & les Prussiens furent employés dans cette Campagne
sous

sous le Prince d'Anhalt au Siège d'Aire & de Dollai qu'ils prirent. Le Roi déclara alors qu'il ne rendroit pas la Ville de Gueldre, où il avoit garnison, que les Espagnols ne lui payassent les subsides qu'ils lui devoient. Aussi en conserva-t-il la possession par la Paix.

Dans ce tems mourut le Duc de Courlande, Neveu du Roy; les Moscovites s'emparèrent de nouveau de la Courlande, ils prirent aussi Elbing, mais comme le Roy avoit des droits sur cette Ville, un Bataillon Prussien y fut mis en garnison.

Le passage & le voisinage de tant d'armées avoit porté la Contagion en Prusse; la disette qui commençoit à s'y faire sentir vivement, augmenta la violence & le venin de la Peste. Le Roi abandonna ces Peuples à leur infortune, & tandis que ses revenus & ses subsides ne suffisoient pas même à la magnificence de sa dépense, il vit périr de sang froid plus de 200. mille Ames, qu'il auroit pu sauver par quelques libéralités.

Le Prince Royal revolté de cette dureté, & qui savoit que les Comtes de Witgenstein * & de Wartemberg en étoient la cause, fit ouïr toutes sortes de ressorts pour les déplacer. La Cour a ses oracles, la faveur les périls: Witgenstein fut envoyé à Spandow, & le Roy se sépara en fondant en larmes du Grand Chambelan qu'il chérissoit. Wartemberg se retira dans le Palatinat avec une Pension de 60. mille Ecus.

* Directeur des Finances.

Charles XII. avoit refusé la neutralité, comme nous venons de le lire. Le Czar, les Rois de Pologne, & de Dannemarck se servirent de ce prétexte pour l'attaquer en Poméranie. Frédéric I. refusa constamment d'entrer dans cette Ligue, il ne vouloit point exposer les Etats aux incursions, aux ravages, & aux hazards de la Guerre, & il s'peroit même de gagner, par sa neutralité, aux Guerres de ses voisins.

1711.

Le commencement des opérations ne leur furent pas favorables. Les Danois leverent le Siège de Wismar, & Auguste leva ceux de Tralsund & de Stettin.

Pendant que l'Europe étoit travaillée par ces convulsions, que l'esperance & l'ambition souffloient la discorde dans les coeurs des

deux mois, mourut l'Empereur Joseph. L'Empire élut à sa place l'Archiduc Charles, qui étoit alors bloqué dans Barcelone, après avoir été couronné, & chassé de Madrid, pour la perte de la Bataille d'Almanza.

La mort de Joseph applanit le chemin à la Paix générale: les Anglois qui commençoient à se lasser de tant de dépenses, ouvrirent les yeux sur l'objet de cette Guerre. A mesure que les nuages de leur enthousiasme vinrent à se dissiper, ils se convinrent que la Maison d'Autriche seroit assez puissante, en conservant ses pays héréditaires, le Royaume de Naples, le Milanés & la Flandre, & ils se disposèrent à tenir des conférences à Utrecht dans le dessein de faire la paix.

Le Roi qui desiroit de terminer les démêlés de la Succession d'Orange par un Traité définitif, se rendit dans le pays de Cleves, pour régler cette affaire avec le Prince de Frise; mais ce malheureux Prince se noya au passage du Mordik, en voulant se rendre à la Haye. En revanche Frédéric I. fit une autre acquisition par l'extinction des Comtes de Mansfeldt. Ce Pays fut mis en sequestre entre la Prusse & la Saxe; la Régence Prussienne se tint à Mansfeldt, & la Saxe à Eisleben.

1712.

Cependant tout s'achaminoit insensiblement à la Paix. Les Conférences continuoient à Utrecht; les Comtes de Dönnhoff, de Meternich & de Biberstein, s'y rendirent en qualité de Plénipotentiaires du Roy.

Pendant qu'on tenoit ces Conférences, il arriva en Angleterre une Révolution, dont l'Europe accusa le Maréchal de Tallard, alors prisonnier à Londres; soit que ce Maréchal, ou que ce qu'on appelle le hazard, en fussent la cause, le parti de Milord Malborough fut culbuté; ceux de la Nation qui desiroient la paix, l'emportèrent. Le Duc d'Ormond eut le Commandement des troupes Angloises en Flandre, & il se sépara des Alliés au commencement de la Campagne. Le Prince Eugene, quoiqu'affoibli par la défection des Anglois, continua l'offensive. Le Prince d'Anhalt & les Prussiens furent chargés du Siège de Landreci, mais Villars marcha à Denain, fondit sur le Camp que Milord

Milord Albemarle y commandoit, & le battit avant que le Prince Eugène put le secourir. Cette Victoire remit au pouvoir des François Marchienne, le Quesnoi, Dotiai, & Bouchain.

Les Alliés suivirent l'exemple des Anglois, & songerent sérieusement à la paix. L'Empereur étoit le seul qui voulut continuer la guerre, soit que la lenteur de son Conseil n'eut pas le tems de se décider, ou que ce Prince se crut assez fort pour résister seul à Louis XIV. Sa condition n'en devint que plus mauvaise.

Le Roi fit alors surprendre la Garnison Hollandoise qui étoit à Moeurs, & maintint par là la possession les droits qu'il avoit sur cette place.

Mais les sentimens pacifiques du Sud n'influerent point sur le Nord. Le Roi de Dannemarck entra dans le Duché de Brême, & prit Stade. Le Czar & le Roy de Pologne tenterent une descente dans l'Isle de Rügen, que les bonnes mesures des Suédois firent manquer. Les Alliés ne furent pas plus heureux au Siège de Stralsund qu'ils furent obligés de lever; car Steinbock venoit de remporter une Victoire sur les Saxons & sur les Danois, à Gadebusch dans le Mecklenbourg; & un renfort de 10. mille Suédois étant arrivé en Poméranie, tout ce Pays fut délivré d'ennemis. Les Danois obligés d'abandonner Rostock, remirent cette Ville aux Troupes du Roy, comme Directeur du Cercle du la Basse Saxe, mais les Suédois en délogerent les Prussiens. La neutralité de Roy n'en souffrit aucune atteinte, & il continua de négocier, pour porter les esprits à quelque conciliation, & pour conjurer les orages qui s'assembloient à l'entour de ses Etats.

Au commencement de 1713. Frédéric I. mourut d'une maladie lente, qui avoit depuis longtems miné ses jours: il ne vit point la consommation de la Paix, ni le rétablissement du repos dans son Voisinage. Il eut trois femmes; la première fut une Princesse de Hesse, dont il eut une fille, mariée au Prince héréditaire de Hesse, à présent Roy de Suède. Sophie Charlotte d'Hanovre mit au monde Frédéric Guillaume qui lui succéda; & il répudia la troisième, qui étoit une Princesse de Mecklenbourg, à cause de sa démence.

Nous

Nous venons de voir tous les événemens qui se passèrent pendant la vie de Frédéric I. Il ne reste qu'à jeter rapidement quelques regards sur le caractère de ce Prince. Son esprit étoit flexible à toutes sortes d'impressions, comme ces Miroirs qui réfléchissent avec vérité tous les objets qui s'y présentent. Emporté par caprice, doux par nonchalance; confondant les choses vaines avec la véritable Grandeur; aimant les fleurs, négligeant les fruits; plus attaché à l'éclat qui éblouit, qu'à l'utile qui n'est que solide; il sacrifia 30. mille hommes de ses sujets, pour parvenir à la Royauté, dans les différentes Guerres que fit l'Empereur, & il n'ambitionnoit cette Dignité, que pour assouvir sa hauteur, & justifier sous des prétextes apparens ses fastueuses dissipation.

Il étoit magnifique & généreux, mais au prix de quelles bassesses n'acheta-t-il pas le plaisir de contenter ses passions? Il trafiquoit du Sang de ses Peuples avec les Anglois, & les Hollandois, comme ces Tartares, qui vendent leurs Troupeaux aux Bouchers de la Podolie pour les égorger. Il étoit sur le point de retirer 15. mille hommes de Flandre: on lui remit un gros brillant de la succession du Prince d'Orange, & les Troupes restèrent aux Alliés.

En remontant à l'origine des choses, pour discerner en quoi consiste la générosité d'un Souverain, nous trouvons qu'un Prince étant le premier Serviteur de l'Etat, lui doit compte de l'usage qu'il fait des fonds publics, qu'il en doit destiner une certaine somme au soutien de sa Dignité, le reste à récompenser les services & le mérite, à rendre par ses largesses l'Etat opulent; entretenir l'égalité des conditions, ne pas fouler les Pauvres pour engraisser les Riches, secourir avec prodigalité les misères publiques, soulager les malheureux en tout genre, de toute espèce, de toute condition, mettre de la magnificence en tout ce qui intéresse le corps de l'Etat en général, & diriger le but de ses dépenses au plus grand avantage de ses Peuples.

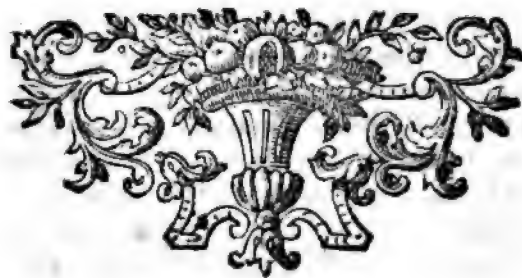
L'espèce de dépense qu'aimoit Frédéric I. n'étoit pas de ce genre;

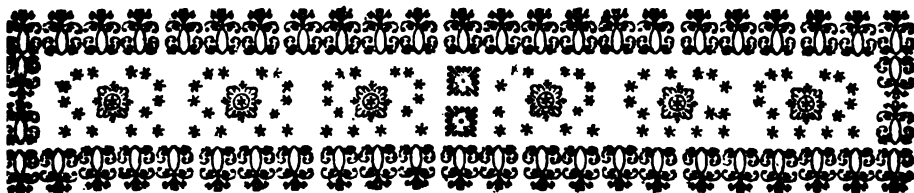
nre, c'étoit plutôt la dissipation d'un Prince prodigue & vain. Sa Cour étoit une des plus magnifiques de l'Europe. Ses Ambassades étoient aussi brillantes que celles des Portugais. Ses Favoris recevoient de grandes pensions. Rien n'égalait la magnificence de ses Timens, ses Fêtes étoient superbes, son Ecurie remplie de chevaux, ses Offices de Cuisiniers, & ses Caves de Vin. Il donna un fief de 40. mille Ecus à un Chasseur qui lui fit tirer un gros Cerf. Il fut le point d'engager ses Domaines de Halberstadt aux Hollandois, pour acheter le *Pir*, gros brillant qui fut vendu à Louis XV. du tems de la Régence. Ses Domestiques faisoient leur fortune, lorsqu'ils avoient souffert des premières faillies de son emportement. Mais ses dépenses n'avoient aucune proportion entr'elles; la bizarrerie de sa déraison ne paroît plus évidente, que, lorsqu'on examine la totalité de l'Etat & de ses revenus. On y observe des parties d'un corps gigantesque, à côté d'autres membres desséchés qui déperissent. Il étoit 20. mille hommes pour en entretenir 30. mille. Sa Cour étoit comme ces grandes Rivières, qui absorbent l'eau de tous les petits ruisseaux. Ses Favoris régorgoient de ses libéralités, tandis que la Lithuanie & la Prusse périssoient par la famine & par la peste, sans que ce Prince généreux daignât la secourir. Un Prince avare est dur sur ses Peuples, comme un Médecin qui laisse étouffer un malade sous son sang; & le prodigue est comme celui qui le tue à force de saigner.

Frédéric I. n'eut jamais de faveurs constantes, soit qu'il se repentit de son mauvais choix, soit qu'il n'eut aucune indulgence pour les faiblesses humaines. Depuis le Baron de Danckelmann jusqu'au Comte de Wittgenstein, ses Favoris eurent tous une fin malheureuse.

La mauvaise Education qu'il reçut dans sa jeunesse, influa sur toute sa vie; son Esprit étoit foible & superstitieux. Il eut un attachement singulier pour le Calvinisme, auquel il auroit voulu ramener toutes les autres Religions, & il est à croire qu'il auroit été Persecuteur, si les Prêtres se fussent avisés de mêler de la magnificence &

des Cérémonies aux Persecutions. Il composa un livre de Prières, que pour son honneur on n'imprima pas. S'il est digne de louanges, c'est pour avoir conservé les Etats en Paix pendant tout son Règne, tandis que ceux de ses voisins étoient ravagés par des Guerres, pour avoir eu le coeur naturellement bienfaisant, & pour n'avoir jamais donné atteinte à la vertu conjugale. Il étoit en un mot grand dans les petites choses, & petit dans les grandes; & son malheur a voulu qu'il fut placé dans l'Histoire entre un Père & un Fils, dont les talens supérieurs le font éclipser.





DES MOEURS, DES COUTUMES,
DE L'INDUSTRIE, DES PROGRÈS
DE L'ESPRIT HUMAIN DANS LES ARTS ET DANS
LES SCIENCES.



Pour acquérir une Connoissance parfaite d'un Etat, il ne suffit pas d'en savoir l'Origine, les Guerres, les Traités, le Gouvernement, la Religion, les Revenus du Souverain. Ces parties sont à la vérité les principales auxquelles s'attache le pinceau de l'Histoire. Il en est cependant encore d'autres, qui, sans avoir le brillant des premières, n'en sont pas moins utiles ; je compte de ce nombre tout ce qui se rapporte aux mœurs des Habitans, comme l'origine des nouveaux usages, l'abolition des anciens, la naissance de l'industrie, les causes qui l'ont développée, les raisons de ce qui a hâté, ou ralenti les progrès de l'Esprit humain, & surtout ce qui caractérise le plus le génie de la Nation dont on parle. Ces objets intéresseront toujours les Politiques & les Philosophes, & j'ose avancer avec hardiesse que cette sorte de détails n'est en aucune façon indigne de la majesté de l'Histoire.

Je ne présente au Lecteur dans cet Ouvrage qu'un choix des traits les plus frappans & les plus caractéristiques du Génie des Brandebourgeois en chaque Siècle : mais quelle différence entre ces Siècles ? Des Nations qu'un Ocean immense sépare, & qui habitent sous

les Tropiques les plus opposés, ne diffèrent pas plus entre leurs usages, que les Brandebourgeois d'eux-mêmes, si nous les comparons du tems de Tacite au tems de Henri l'Oiseleur; ceux de Henri l'Oiseleur à ceux de Jean le Ciceron, & enfin ceux-là aux habitans de l'Electorat sous Frédéric I. Roi de Prusse.

Le grand nombre des hommes distraits par la variété infinie des objets, regarde sans réflexion la Lanterne magique de ce monde; il s'apperoit aussi peu des changemens successifs qui se font dans les Usages, que l'on passe légèrement dans une grande Ville sur ces ravages que la mort y fait journellement, pourvu qu'elle y épargne le petit Cercle de personnes avec lesquelles on est le plus lié. Cependant après une courte absence, on trouve à son retour d'autres habitans & des modes nouvelles.

Qu'il est instructif & beau de passer en revue tous les Siècles qui ont été avant nous, & de voir par quelle analyse ils tiennent à nos tems ! Prendre une Nation dans la stupidité la plus grossière, la suivre dans ses progrès, & la conduire jusqu'au tems qu'elle s'est civilisée, c'est étudier dans toutes ses Métamorphoses le Ver à soie, devenu Chrysalide, & enfin Papillon.

Mais que cette étude est humiliante ! Il ne paroît que trop qu'une Loi immuable de la Nature oblige les hommes de passer par bien des impertinences pour arriver à quelque chose de raisonnable; remontez aux Origines des Nations, vous les trouverez également barbares. Les unes sont arrivées par une allure lente, & par bien des détours, à un certain degré de perfection. Les autres y sont parvenues par un essor rapide; toutes ont tenu des routes différentes; & encore la politesse, l'industrie & tous les arts, ont-ils pris un gout de terroir dans les différens pays où ils ont été transplantés, qu'ils ont reçus du Caractère indélébile de chaque Nation. Ceci se fera sentir davantage si vous lisez des Ouvrages écrits à Padouë, à Londres, ou à Paris; ils se distingueront sans peine, quand même les Auteurs y traiteroient la même matière; je n'en excepte que la plus sublime Géométrie.

La variété inépuisable que la Nature jette dans ces caractères généraux & particuliers, est une marque de son abondance, mais en même

le même tems de son Oeconomie: car quoique tant de Nations innombrables qui couvrent la terre, ayent chacune leur génie différent, il n'est cependant que certains grands traits qui les distinguent des autres, sont inaltérables, Tout peuple a un Caractère à soi, qui peut être modifié par le plus ou le moins d'Education qu'il reçoit, mais dont les fonds ne s'efface jamais. Je pourrois facilement appuyer cette opinion sur des preuves Physiques, mais je ne prétens pas m'écarter de mon sujet. Il s'ensuit donc que les Princes n'ont jamais totalement changé la façon de penser des Peuples, qu'ils n'ont jamais pû forcer Nature à produire les grands hommes, dont le nombre seul illustre les Siècles; quoique le travail des mines soit soumis à leurs ordres, les mines fécondes ne le sont pas, elles s'ouvrent tout à coup, en fournissant des richesses abondantes, & se perdent, dans le tems qu'on les poursuit avec le plus d'avidité.

Quiconque a lû Tacite & Césaire, reconnoitra encore les Allemands, les François & les Anglois, aux couleurs dont ils les peignent: dix-huit Siècles n'ont pû les effacer. Comment donc un Règne pourroit-il effectuer ce que tant de Siècles n'ont pû faire? Un Statuaire peut tailler un morceau de bois dans la forme qu'il lui plaît; il fera un Esope, ou un Antinoüs, mais il ne changera jamais la Nature inhérente du bois. Certains vices dominans, & certaines vertus de peuples, resteront toujours à chaque Peuple. Si donc les Romains vous paroissent plus vertueux sous les Antonins que sous les Tibères, c'est que les crimes étoient sévèrement punis; le vice n'osoit lever sa tête impure, mais les viciens n'en subsistoient pas moins. Les Souverains donneront un certain vernis de politesse à leur Nation, ils entretiendront les Loix dans leur vigueur, & les Sciences dans la médiocrité, mais ils n'altereront jamais l'essence des choses; ils n'ajoutent que quelque nuance passagère à la Couleur dominante du Tableau.

C'est ce que nous avons vû de nos jours en Russie. Pierre I. pour couper la barbe à ses Moscovites, il leur ordonna de croire à la possession du saint Esprit, il en fit habiller quelques uns à la François, on leur apprit même des Langues; cependant on distinguera en-

core longtems les Russes des François, des Italiens, & des autres Nations de l'Europe.

Il n'y a, je crois, que la dévastation entière des Etats, & leur repeuplement par des Colonies étrangères qui puissent produire un changement total dans une Nation; mais qu'on y prenne bien garde, ce n'est, dès lors, plus la même Nation, & il resteroit encore à sçavoir si l'air & la nourriture ne rendroient pas avec le tems ces nouveaux habitans semblables aux anciens.

Je me suis cru obligé de séparer ce morceau qui traite des Moeurs des Brandebourgeois, du reste de l'Histoire, à cause que dans celle-là je me suis restraint à la Politique & à la Guerre, & que ces détails qui regardent les usages, l'industrie & les arts, étant répandus dans tout un Ouvrage auroient peut être échapé au Lecteur, au lieu qu'il les trouve à présent sous un seul point de vûe, où ils forment seuls un petit corps d'Histoire.

Les Auteurs Latins m'ont servi de guide dans les commencemens de cet Ouvrage, au défaut total de ceux du païs. Lockelius, que j'aurai lieu de citer souvent, m'a éclairé dans les Régences ténébreuses des Margrawes des quatre premières races, & les Archives m'ont fourni des matériaux pour ce qu'il y a de plus remarquable à dire destems que la Maison de Hohenzollern a possédé cet Electorat: ce qui nous ramene jusqu'à nos jours.

EPOQUE PREMIERE.

Dans la longue énumération que Tacite fait des Peuples d'Allemagne, il s'est trompé sur le mot d'*Ingevoner*, qui signifie habitans, & sur celui de *Germenier*, qui veut dire gens de guerre, que l'ignorance de la langue lui fait prendre pour des Nations particulieres. La quantité de ces guerriers dont l'Allemagne étoit remplie, lui donna le nom de Germanie.

Les premiers habitans de la Marche furent des Teutons, & après eux les Semnons, dont Tacite dit, que c'étoient les plus nobles d'entre les Suèves.

L'Alle-

L'Allemagne étoit tout à fait barbare dans ces tems reculés ; les peuples grossiers & à moitié sauvages habitoient les forêts, ou de mauvaises Cabanes leur servoient de demeure ; ils se marioient jeunes, & peuploient d'autant plus, que les femmes étoient rarement stériles. La Nation alloit toujours en se multipliant, & comme les enfans se bornoient à cultiver les Champs de leurs Pères, au lieu de défricher des terres nouvelles, il s'ensuivoit que ces petits héritages ne fournissant pas, (dans les meilleures années même,) à l'entretien d'un Peuple aussi nombreux, les obligeoient à s'expatrier pour trouver ailleurs leur subsistance ; de là ces grands débordemens de Barbares, qui inondèrent les Gaules, l'Afrique & l'Empire Romain même.

Les Germains étoient Chasseurs par nécessité, & Guerriers par instinct ; leur pauvreté rendoit les guerres intestines qu'ils se faisoient courtes, car l'intérêt ne s'en méloit jamais. Leurs Généraux, qui depuis devinrent leurs Princes, s'appelloient *Fürsten*, ce qui est une dérivation du mot de Conducteur ; ils étoient renommés par leur taille haute, & pour avoir des corps robustes, & endurcis aux travaux les plus pénibles ; leurs vertus principales étoient la valeur, & la fidélité avec laquelle ils observoient leurs engagemens. ils célébroient ces vertus par des hymnes qu'ils apprenoient à leurs enfans, pour les transmettre à leur postérité.

Les Auteurs Latins rendent eux-mêmes un illustre témoignage à la valeur des Germains, en nous apprenant la défaite de Varus & de quelques autres Chefs des Armées Romaines. Si l'on applaudit au courage d'une Nation, qui, toutes choses égales, est victorieuse d'une autre, combien plus ne doit-on pas admirer la Bravoure de ces Germains, qui, n'ayant pour eux que la confiance en leur propre force, & une inflexible opiniâtreté à ne point céder, triomphèrent de la Discipline Romaine, & de ces Legions qui avoient à peine achevé de subjuguier la moitié du Monde connu ?

Quoiqu'en aient dit la plupart des Historiens, il n'en est pas moins vrai que les Romains passèrent l'Elbe malgré les Suèves, car on a découvert auprès de * Zossen, dans un Champ quarré de 800. * à 6 Milles pas de Berlin.

pas quantité d'Urnes pleines de Médailles de l'Empereur Antonin de l'Imperatrice Faustine, & de quelques Arſuquets dont se paroit les Dames Romaines. Ce n'est pas assurément un Champ de Bataille car les Suèves n'auroient pas enfouï sous terre l'argent de leurs Enemis, pour honorer leurs funérailles ; on peut en conjecturer, ce me semble, avec certitude, que ce lieu servit de Camp à quelques Cohortes détachées, auxquelles les Romains avoient fait passer l'Elbe, pour être avertis des mouvemens & de l'approche des Barbares.

Brandebourg est la plus ancienne Ville de la Marche ; les Annales * fixent sa fondation l'an du Monde 3588 ; ce qui seroit 416. ans avant l'Ere Vulgaire. On dit qu'elle fut bâtie, & reçut son nom du même Brennus qui saccagea Rome. On entrevoit dans l'obscurité les noms de quelques Rois † Vandales, qui furent apparemment plus ambitieux & plus inquiets que les autres. On trouve de plus dans les Annales, que Witikind Roi des Saxons, Hermanfried Roi de Thuringe, & Richimire Rois des Francs s'allierent, domptèrent les Semnons, & entourèrent les premiers de murailles ces Villes conquises, pour contenir le Païs dans l'obéissance.

E P O Q U E S E C O N D E.

* en 781. Charlemagne prit enfin * Brandebourg, & Henri l'Oiseleur † en 928. † ayant entièrement subjugué les Saxons qui habitoient ces Contrées, établit les Margraves, ou Gouverneurs de Frontières.

Les Mœurs s'adoucirent sous les Margraves, mais le païs étoit très pauvre ; il ne produisoit que les denrées les plus nécessaires à la vie, il avoit besoin de l'industrie de ses voisins, & comme personne ne recherchoit la sienne, l'argent ressortoit en plus grande quantité qu'il n'entroit. Cette disproportion dans la circulation des especes, qui alloit toujours à leur diminution, baïssoit le prix de toutes choses : les denrées étoient à un si vil prix, que du tems de l'Electeur Jean II. d'Assanie, le boïseau de froment se vendoit à 28. liards, celui de seigle à 28. deniers, & 6. poules s'achetoient au marché pour 1. gros.

Les Berlinoïses passèrent dès lors pour des maris aussi fideles que Lockelius jaloux : les Chroniques * rapportent un exemple qui peint bien les mœurs

mœurs de ces tems. Sous la Régence de l'Electeur Othon de Baviere, un Secrétaire de l'Evêque de Magdebourg voulant aller à Berlin aux bains publics, rencontra dans la rue une jeune femme de Bourgeois, & lui proposa en badinant de se baigner avec lui: la femme se trouva offensée de cette proposition, le peuple s'attroupa, & les Bourgeois de Berlin qui n'entendoient pas raillerie, trainerent le pauvre Secrétaire dans une place publique, où ils le décapiterent sans autre forme de procès. S'ils sont jaloux, du moins exercent-ils à présent des vengeances plus douces.

Le Pais croupissoit dans une misere affreuse sous la Régence des Princes des 4. premieres Races, & il n'en pouvoit sortir, passant sans cesse d'une main à l'autre. * Othon de Baviere fut obligé de vendre l'Electorat à l'Empereur Charles IV. Celui-ci s'établit à Tangermünde, il y tint une Cour brillante, & y bâtit un assés vaste Château, dont on voit encore les ruïnes. Pendant que Jodoce administroit le Brandebourg, les Vaudois persécutés en France se réfugierent dans la ville d'Angermünde, à laquelle on donna le surnom d'Héretique. Je ne vois pas pourquoi les Vaudois chercherent un azile dans le Brandebourg, qui étoit également Catholique, & pourquoi ils y furent reçus, quoiqu'on les détestât.

Les Princes de la Maison de Luxembourg foulèrent les Peuples le plus impitoyablement, ils engageoient l'Electorat dans leurs besoins à ceux qui leur prêtoient les plus grosses sommes; & ces Créanciers qui regardoient ce malheureux Pais comme une Hypotheque, commettoient toutes sortes de vexations pour s'enrichir, & y vivoient à discretion, comme dans une Province ennemie. Les Voleurs infestoient les grands chemins, la Police étoit inconnüe, & la Justice hors d'activité. Les Seigneurs de Quitzau & de Neuendorff, indignés du joug odieux que portoit leur Patrie, firent une guerre ouverte aux Sous-Tyrans qui l'opprimoient. Dans cette confusion totale, & pendant cette espece d'anarchie, le peuple gémissoit dans la misere, les Nobles étoient, tantôt les Instrumens, tantôt les Vengeurs de la Tyrannie, & le génie de la Nation abruti par la dureté

de l'esclavage, & par la rigueur d'un Gouvernement barbare & Gothique, demouroit engourdi & paralytique.

EPOQUE TROISIEME.

1414.

L'Empereur Sigismond débrouilla ce chaos, en conférant le Brandebourg & la Dignité Electorale à Frédéric de Hohenzollern, Burgrawe de Nüremberg. Ce Prince exigea l'hommage de ses nouveaux sujets, mais le Peuple qui ne connoissoit que des Maitres cruels, eut de la peine à se soumettre à cette Domination douce & légitime. Frédéric I. réduisit les Gentilshommes à l'obéissance par la terreur que répandit le gros Canon avec lequel il enfonçoit les Châteaux des Rebelles. Ce Canon étoit une pièce de 24. livres, en quoi consistoit toute son Artillerie.

L'Esprit de sédition ne se perdit pas si vite. Les Bourgeois de Berlin se révolterent à différentes reprises contre leurs Magistrats. Frédéric II. apaisa ces émeutes avec douceur & sagesse: La nécessité obligea ce Prince d'hypothéquer les Péages de Schiffelbein & de Drambourg au Sieur Denis d'Osten pour obtenir la somme de 1500. florins, dont il avoit besoin pour se rendre à la Diète de Nürnberg.

* en 1495.

Les choses resterent dans cette situation jusqu'à Jean Ciceron. Cet Electeur fit les premiers efforts pour tirer le Peuple de son imbécillité & de son ignorance ; c'étoit beaucoup pour ces temps de s'apercevoir qu'on étoit ignorant. Quoique cette premiere Aurore du bon esprit ne fut qu'un foible crépuscule, elle produisit toutefois la fondation de l'Université * de Francfort sur l'Oder. Conrad Wipina Professeur de Leipzig, devint le premier Recteur de cette nouvelle Université, & il en dressa les Statuts. Mille Etudians se firent inscrire dès la premiere année dans les Fastes de l'Université.

Il arriva pour les progrès des Sciences que Joachim Nestor les protégea autant que son Père : c'étoit le Leon X. du Brandebourg, il possédoit les Mathematiques, l'Astronomie & l'Histoire, il parloit avec facilité le François, l'Italien & le Latin ; il aimoit les Belles Lettres, & il fit des dépenses considérables pour encourager ceux qui s'y appliquoient.

Ce

Ce n'étoit pas l'ouvrage d'un jour que de civiliser une Nation qui avoit été sauvage pendant tant de siècles ; il faut bien du tems pour que la douceur du commerce des Sciences se communique à tout un peuple ; les jeunes Gens étudioient à la vérité, mais ceux qui étoient d'un âge mûr, demeuroient attachés à leurs anciens usages, & à leur grossièreté. Les Nobles voloient encore sur les grands chemins. La dépravation des mœurs étoit si générale en Allemagne, que la Diète de l'Empire assemblée à Trèves voulant y mettre un frein, défendit de blasphemer & de s'abandonner à ces excès de débauche, qui ravalent l'humanité, & rendent les hommes inférieurs aux animaux.

Il y avoit dès lors des vignes plantées dans l'Electorat ; le Baril de vin se vendoit de ce tems à 30. gr. & le boisseau de Seigle à 21. Liards. Les especes commençoient à circuler davantage ; Joachim Nestor fit même construire quelques Bâtimens, entr'autres le Château de Potzdam. Tout le monde étoit habillé à l'Allemande, ce qui répond à peu près à l'ancien habillement Espagnol, hormis que les hommes portoient de larges fraises. Les Princes, * les Comtes & les Chevaliers portoient des chaines d'or au cou ; il n'étoit permis aux Gentilshommes que d'avoir trois anneaux d'or à la Cravate. L'habillement des femmes ressembloit à celui des Augsbourgeoises, ou des filles de Strasbourg. * Lockelius.

On commença alors à connoître un certain luxe proportionné à ces tems, mais comme on ne trouve point que l'Industrie, ni le Commerce du Brandebourg, s'érendissent en même tems, l'augmentation des richesses, & leur cause, demeurent un problème difficile à résoudre.

Dés l'année 1560. on s'apperçoit d'une grande difference dans les dépenses des Electeurs, car lorsque Joachim II. se rendit à la Diète † de Francfort, il eut * 68. Gentilshommes à sa suite, & 452. Chevaux dans ses Equipages. Le grand jeu s'introduisit en même tems ; cette mode passa de la Cour à la Ville, où on fut obligé de la défendre, à cause que quelques Bourgeois avoient perdu plus de mille Ecus dans une séance. † 1562. convoquée par l'Empereur Ferdinand pour l'Electio d'un Roi des Romains.

E e e 2

Nous

* Lockelius

Nous trouvons dans les Annales qu'au Mariage de Joachim II. avec Sophie fille de Sigismond Roi de Pologne, l'Electeur coucha la nuit des noces armé de toutes pieces auprès de la jeune Epouse, comme si les tendres combats de l'Amour demandoient des préparatifs aussi redoutables. Un mélange de férocité & de magnificence entroit dans toutes les Coutumes de ces tems. Ces singularités venoient de ce que le Siècle vouloit sortir de la Barbarie; il cherchoit le bon chemin & le manquoit. Sa grossiereté confondoit les cérémonies avec la politesse, la magnificence avec la dignité, les débauches avec le plaisir, la pédanterie avec le savoir, & les platitudes grossieres des bouffons avec les ingénieuses saillies de l'esprit.

On doit rapporter à ces tems la fondation de l'Université de Königsberg par Albert de Prusse.

Les dépenses allèrent encore en augmentant. Jean George fit des obseques superbes à son Père: c'est la première pompe funèbre accompagnée de magnificence, dont l'Histoire de Brandebourg fait mention. Le goût des Fêtes étoit la passion de ce Prince, il aimoit à donner sa Grandeur en spectacle. Il célébra * la naissance de l'aîné de ses Princes par des fêtes qui durèrent quatre jours. Ces divers amusements consistoient dans des Tournois, des Combats de Barques, des Feux d'artifice, & des Courses de bague. Les Seigneurs qui composoient les quatre Quadrilles, étoient vêtus en velours richement brodés en or & en Argent; mais le caractère du Siècle perçoit à travers toute cette magnificence. A la tête de chaque Quadrille étoit un bouffon qui sonnoit du Cor d'une façon ridicule, & qui faisoit cent extravagances, & la Cour monta au donjon du Chateau pour voir tirer le feu d'artifice. † Au passage de Christian Roi de Dannemarck par Berlin, l'Electeur lui fit une réception superbe, il alla au devant du Roi, accompagné de nombre de Princes, de Comtes, de Seigneurs & d'une Garde de 300. Chevaux. Le Roi fit son entrée dans un char de victoire noir galonné en Or, tiré par 8. Chevaux blancs, dont les Mors & les Caparaçons étoient d'argent. On l'accabla de fêtes dans le goût des précédentes.

* L'Electeur fit des obseques superbes à son Père: c'est la première pompe funèbre accompagnée de magnificence, dont l'Histoire de Brandebourg fait mention. Le goût des Fêtes étoit la passion de ce Prince, il aimoit à donner sa Grandeur en spectacle. Il célébra * la naissance de l'aîné de ses Princes par des fêtes qui durèrent quatre jours. Ces divers amusements consistoient dans des Tournois, des Combats de Barques, des Feux d'artifice, & des Courses de bague. Les Seigneurs qui composoient les quatre Quadrilles, étoient vêtus en velours richement brodés en or & en Argent; mais le caractère du Siècle perçoit à travers toute cette magnificence. A la tête de chaque Quadrille étoit un bouffon qui sonnoit du Cor d'une façon ridicule, & qui faisoit cent extravagances, & la Cour monta au donjon du Chateau pour voir tirer le feu d'artifice. † Au passage de Christian Roi de Dannemarck par Berlin, l'Electeur lui fit une réception superbe, il alla au devant du Roi, accompagné de nombre de Princes, de Comtes, de Seigneurs & d'une Garde de 300. Chevaux. Le Roi fit son entrée dans un char de victoire noir galonné en Or, tiré par 8. Chevaux blancs, dont les Mors & les Caparaçons étoient d'argent. On l'accabla de fêtes dans le goût des précédentes.

Peut-être que le Luxe fut poussé trop loin, car Joachim Frédéric fit des Loix somptuaires : il employa ses revenus à des usages utiles, il fonda le College de Joachim, depuis transféré à Berlin par l'Electeur Frédéric Guillaume, où cette Ecole est de nos jours la plus brillante & la mieux réglée de tous les Etats de la Prusse.

Il manquoit encore du tems de Jean George beaucoup d'Inventions qui contribuent à la commodité de la vie. L'usage commun des Carosses ne remonte pas plus haut qu'à Jean Sigismond ; il en est parlé à l'occasion de l'hommage de la Prusse, que ce Prince rendit à l'Empereur. Il eut à sa suite 36. Carosses à 6. Chevaux, outre un Carrosse de 80. Chevaux de main. L'Ambassade qui se rendit à la Diète de l'Empire pour l'Electon de l'Empereur Matthias, eut 3. Carosses avec elle. C'étoient de mauvais Coches, composés de quatre ais grossièrement joints ensemble. Qui eut dit alors que cet art se perfectionneroit dans le XVIII. Siècle au point qu'on feroit des Carosses pour 2000. Ecus, & qu'ils trouveroient des acheteurs ?

Les efforts que le Brandebourg & l'Allemagne faisoient pour se civiliser n'étoient pas tout à fait inutiles ; le nombre des Universités augmentoit : celle de Halle fut fondée alors. En même tems se forma à Dessau une Academie pour la langue Allemande, sous le nom de *Société fructifante*, qui auroit pu devenir utile : d'autant plus que la langue Allemande, divisée en une infinité de Dialectes, manque de règles suffisantes pour en fixer le véritable usage ; que nous n'avons aucuns Livres Classiques, & que s'il nous reste encore quelque chose de notre ancienne liberté Républicaine, c'est le stérile avantage d'estropier selon notre fantaisie une Langue grossiere & presque encore barbare.

Ces beaux Etablissmens qui nous auroient peut-être avancés un Siècle, étoient encore à peine ébauchés, lorsque la Guerre de 30. ans survint, qui détruisit & bouleversa toute l'Allemagne.

Les Etats de Brandebourg avoient eû jusqu'à George Guillaume une entière influence dans le Gouvernement ; on les consultoit sur toutes les affaires, & l'on suivoit leurs avis. Lorsque la Guerre ^{1621.}

* Sebaldu,
Chronique.

s'approcha de l'Electorat, on songea à sa défense. Jusqu'alors les Princes n'entretenoient qu'une garde, & quand on vouloit assembler des Troupes, on convoquoit les Nobles qui étoient obligés de comparoitre, & qui avec leurs fuzerains formoient la Cavalerie; leurs Vassaux composoient l'Infanterie. L'Electeur * & sur tout son Ministre, le Comte Schwartzenberg, étoient portés à l'entretien d'une milice réguliere. Les Etats consentirent à la levée de gens de guerre, & après qu'on en eut fait le choix, on leur ordonna de faire des quêtes dans le pais pour subvenir à leur subsistance, jusqu'au tems qu'on auroit besoin de leurs services. Un Edit fut publié en même tems, qui ordonnoit aux paisans de donner un liard par tête à ces miliciens, quand ils viendroient gueuser, & des coups de bâton, s'ils ne s'en contentoient pas. Au lieu d'avoir des Soldats disciplinés, cet Electeur institua des Mendians privilégiés.

Le Comte de Schwartzenberg diminua depuis le pouvoir de ces Etats, dont cependant ils n'avoient jamais abusé. Enfin dans le cours de cette cruelle guerre, l'année 1636. fut la plus malheureuse pour cet Electorat: les Suédois étoient à Werben, les Imperiaux à Magdebourg & Rathenau, Wrangel à Stettin, Morosini dans la Nouvelle Marche, quand 36. mille Autrichiens traverserent le Pais, pillerent & désolèrent tout dans leur passage. C'en fut trop à la fois: le Brandebourg énérvé par le nombre des Troupes qui en avoit subsisté, & qui l'avoit pillé les années précédentes, succomba enfin: la cherté y devint exorbitante, un boeuf s'achetoit 100. Ecus, le boisseau de bled 5. l'Orge 3. & les espèces haussèrent de prix par leur rareté, la valeur numeraire du Ducat fut évaluée à 10. Ecus. Quelques Gentilshommes qui avoient soustrait leurs provision à l'avidité des Ennemis, voulurent profiter des circonstances de la disette; mais les paisans qui n'avoient pas de quoi acheter ces grains, réduits au désespoir par la famine, assommerent ces Maitres inhumains, & pillerent leurs greniers. La famine continua avec la même violence; la Peste s'ensuivit, & la désolation parvint à son comble. Les restes de ces malheureux habitans, que la mort & les ennemis avoient épargné ne pouvant

avant tenir contre tant de calamités, abandonnerent leur Patrie infortunée, & se réfugièrent dans les pays voisins.

Toute la Marche n'étoit qu'un affreux desert; elle offroit le spectacle déplorable, de ruïnes, d'incendies, & de tous les fléaux d'une guerre longue & furieuse entraîne après elle. A peine découvit-on sous tant d'horreurs & de saccagement, dans des lieux devint tout sauvages, les traces des anciens Habitans.

C'en eut été fait du Brandebourg, si Frédéric Guillaume ne se obstiné à son rétablissement. Sa prudence, sa fermeté & le tems Frédéric
Guillaume requièrent tous ces obstacles; il fit la paix, & mit d'abord la main à 1640. la nouvelle Création.

Le Brandebourg devint effectivement un nouveau Pays, formé d'un mélange de différentes Colonies de toutes sortes de Nations, qui se joindrent dans la suite à ceux des anciens habitans, qui étoient échappés à la destruction. Soit que l'année fut abondante, soit défaut de récolte, les denrées furent à un si bas prix, que le boisseau de blé se vendoit à 12. gros.

La Guerre de 30. ans, entre les maux qu'elle causa, détruisit entièrement le peu de Commerce que le Nord de l'Allemagne faisoit. Nous tirions anciennement nos sels de Hollande & de France: les provinces qui ne pouvoient être renouvelées pendant ces troubles, souffrirent. Ce manquement d'une denrée aussi nécessaire fit avoir cours à l'industrie, & l'on trouva des sources salées à Halle, qui fournirent non seulement aux besoins du Brandebourg, mais encore à ceux des Pays voisins.

La première Colonie qui vint s'établir dans l'Electorat, fut composée de Hollandois; ils renouvelèrent l'espece des Professionnaires & des Artisans, ils formerent des projets pour la vente des Bois de haute futaie, qui se trouvoient en grande abondance; la ruïne de la Guerre de 30. ans ayant fait de tout le pays une vaste forêt. Sur la suite de ces bois roula ensuite une des branches principales de notre Commerce; l'Electeur permit même à quelques familles Juives de se fixer dans ses Etats, le voisinage de la Pologne rendoit leur ministère

nistère utile pour débiter dans ce Royaume les rebuts de nos friperies.

en 1624. Il arriva depuis un événement favorable qui avança considérablement les projets du grand Electeur. Louis XIV. revoca l'Edit de Nantes, & 300. mille François sortirent pour le moins de ce Royaume: les plus riches passerent en Angleterre & en Hollande, les plus pauvres, mais les plus industrieux, se réfugierent dans le Brandebourg au nombre de 20. mille, ou environ: ils aiderent à repeupler nos Villes désertes, & nous donnerent toutes les Manufactures qui nous manquoient.

Afin de juger des avantages qui revinrent à l'Etat par cette Colonie, il est nécessaire d'entrer dans le détail de ce qu'étoient nos Manufactures avant la Guerre de 30. ans, & de ce qu'elles devinrent après la Révocation de l'Edit de Nantes.

Nôtre Commerce rouloit anciennement sur la vente de nos grains, du vin & de nos laines; quelques Manufactures de drap subsistoient encore, mais elles n'étoient pas considérables. Il n'y avoit du tems de Jean Ciceron que 700. Manufacturiers dans tout le país. Durant la Régence de Joachim II. le Duc d'Albe opprimoit tyranniquement la liberté des Flamans. La sage Elizabeth Reine d'Angleterre se prévalut de la sottise de ses voisins, en attirant dans ses Etats les Manufacturiers de Gand & de Bruges; ils y travaillerent les laines d'Angleterre, & obtinrent qu'on en défendit la sortie.

Nos Manufacturiers n'avoient fait jusqu'alors de bons draps, que par le mélange des laines Angloises avec les nôtres; & comme celles-là vinrent à manquer, nos draps tomberent. Les Electeurs de Saxe, Auguste & Christian, suivirent l'exemple de la Reine Elizabeth, en attirant dans leurs país des Ouvriers Flamans, qui rendirent leurs Manufactures florissantes; le manque de laines étrangères, la décadence de nos Manufactures, & l'accroissement de celles de nos voisins, accoutuma la Noblesse de Brandebourg de vendre ses laines aux Etrangers; ce qui détruisit presque entierement nos Fabriques. Jean Sigismond, pour les relever, défendit l'entrée des draps étrangers dans les
Etats;

its; mais cette défense devint puérile, à cause que les fabriques Brandebourg ne pouvoient pas fournir les draps dont le país avoit soin, ce qui obligeoit d'avoir recours à l'industrie des voisins. Il y rande apparence qu'on auroit eu recours à des expédiens plus heu-ix, mais la Guerre de 30. ans survint, & elle renversa les projets, Manufactures & l'Etat.

A l'avénement de Frédéric Guillaume à la Régence, on ne fai- dans ce país, ni chapeaux, ni bas, ni serges, ni aucunes étoffes de ie. L'industrie des François nous enrichit de toutes ces Manufa- res: ils établirent des fabriques de draps, de Serges, d'Etamines, petites étoffes, de Droguets, de Grifettes, de Crepon, de Bon- s, & de bas tissus sur des métiers, de Chapeaux de Castor, de La- , & de poils de Lièvre, des teintures de toutes les especes. Quel- s uns de ces Réfugiés se firent Marchands, & débiterent en detail dustrie des autres. Berlin eut des Orfèvres, des Bijoutiers, des rlogers, des Sculpteurs; & les François qui s'établirent dans le plat s, y cultiverent le Tabac, & firent venir des fruits & des légumes ex- lens dans les Contrées sablonneuses, qui, par leur soin, devint des potagers admirables. Le grand Electeur, pour encourager : Colonie aussi utile, lui assigna une pension annuelle de 40. mille is dont elle jouit encore.

Ainsi l'Electorat se trouva plus florissant vers la fin de la Régen- de Frédéric Guillaume, qu'il ne l'avoit été sous aucun de ses An- res, & la grande augmentation des Manufactures étendit les bran- s du Commerce, qui roula dans la suite sur nos Blés, sur les bois, les Etoffes & les draps, & sur nos sels. L'usage des Postes, inconnu ju'àlors en Allemagne, fut introduit par le grand Electeur dans tous Etats depuis Emmerick jusqu'à Memel. Les Villes payoient des s arbitraires, qui furent abolies; l'établissement de l'accise les rem- a. Les Villes commencerent à se policer, on pava les ruës, & on a de distance en distance des lanternes pour les éclairer. Cette ce étoit d'une nécessité indispensable. Car les Courtisans étoient ges d'aller en échasses au Chateau de Potzdam, lorsque la Cour

s'y tenoit, à cause des bouës qu'il falloit traverser dans les ruës.

Frédéric, Guillaume fut le premier Electeur qui entretint à son service un Corps d'Armée discipliné régulièrement. Les Bataillons d'Infanterie étoient composés de 4. Compagnies à 150. têtes chacune, un tiers du Bataillon étoit armé de piques, le reste avoit des mousquets. L'Infanterie portoit des habits d'ordonnance & des manteaux. Les Cavaliers se pourvoyoient eux-mêmes d'armes & de Chevaux. Ils avoient la demi-armure, ils combattoient par Escadrons, & ils menotent souvent du Canon avec eux.

Le grand Electeur, quoique généreux & magnifique pour sa personne, fit des Loix somptuaires : sa Cour étoit nombreuse, & sa dépense se faisoit avec dignité. Aux Fêtes qu'il donna au mariage de sa Nièce la Princesse de Courlande, 56. Tables de 40. Couverts furent servies à chaque repas. L'activité infatigable de ce grand Prince donna à sa Patrie tous les Arts utiles; il n'eut pas le tems d'y ajouter les agréables.

Les Guerres continuelles, & le mélange des nouveaux habitans, avoient déjà fait changer les anciennes moeurs; beaucoup d'usages des Hollandois & des François devinrent les nôtres, les vices dominans étoient l'ivrognerie & l'interêt. La débauche avec les femmes étoit interdite à la Jeunesse, & certains souvenirs cuifans qu'on gagnoit en mourant de plaisir, étoient inconnus alors. La Cour aimoit les pointes, les équivoques & les bouffons; les enfans des Nobles se remettent aux Etudes, & l'Education de la jeunesse tomba insensiblement entre les mains des François. Nous leur devons encore une douceur dans le commerce, & des manières plus aisées, que n'en ont ordinairement les Allemands.

Le changement qui arriva dans cet Etat après la Guerre de 30. ans, étoit universel: les Monnoyes s'en ressentirent ainsi que le reste; autrefois le Marc d'argent étoit sur le pied de 9. Ecus dans tout l'Empire jusqu'à l'année 1561. que les malheurs des tems forcèrent le Grand Electeur d'avoir recours à toutes sortes d'expédiens pour fournir aux dépenses de l'Etat. Il fit publier la même année * un Edit qui fixoit le

prix des monnoyes courantes, & il fit battre des gros & des fenins, pour des sommes considerables, dont la valeur intrinsèque répondoit à peu près au tiers de la valeur réelle de ces espèces. Le prix de cette monnoye étant idéal, elle fut aussi-tôt décriée, & tomba à la moitié de sa valeur. Les vieux Ecus de bon aloi monterent à 28. à 30. gros; & de là vient ce que nous appellons l'Ecu de banque. Pour remédier à ces abus, les Electeurs de Brandebourg & de Saxe * s'abouchèrent à Cinna, & ils convinrent d'évaluër les Monnoyes sur un nouveau pied, moyennant lequel le Marc fin d'argent, avec ce qu'on appelle le Stile de monnoye, ou le remède, devoit être rendu au Public généralement dans toutes les espèces de monnoyes de l'Ecu jusqu'au fenin à 10. Ecus 16. gros. Depuis ce tems on frappa les florins & les demi florins, & le prix du marc d'Argent demeura fixé à 10. Ecus.

* En 1667.

Depuis en 1690. Frédéric I. se concerta avec l'Electeur de Saxe & le Duc de Hanovre sur les moyens de soutenir la monnoye sur le pied de la Convention de Cinna, mais en ayant reconnu l'impossibilité, ils convinrent que l'espece courante des florins & des 8. gros seroit frappée dans leurs Etats à raison de 12. Ecus: c'est ce qu'on appelle le pied de Leipzig, qui subsiste encore de nos jours.

Toutes les nouvelles Colonies que le grand Electeur avoit établies, ne furent véritablement florissantes que sous Frédéric I. Nous eûmes alors une Manufacture de haute-lisse égale à celle de Bruxelles, nos Galons égalerent ceux de France, nos Miroirs de Neustadt surpasserent par leur blancheur ceux de Venise, l'Armée fut habillée de nos propres draps. L'année 1700. les Troupes changerent d'armes, on abolit l'usage des piques, & l'Infanterie eut des fusils; la Cavalerie ne conserva de son armure que la Cuirasse, & on lui donna des habits d'ordonnance.

La Cour étoit nombreuse & brillante, les especes y devenoient abondantes par les subsides étrangers, le Luxe parut dans les Livrées, les habits, les tables, les équipages & les bâtimens. Le Roi eut à son service deux des plus habiles Architectes de l'Europe, & Schlüter qui ne leur cédoit point en mérite, & dont la Sculpture relévoit l'Architecture des premiers. Bort fit la belle Porte de Wefel, il donna les

desseins du Chateau & de l'Arſenal de Berlin, il bâtit la maison de Poſte au coin du grand Pont, & le beau Portique du Chateau de Potzdam, trop peu connu des amateurs. Loſander éleva la nouvelle aſſe du Château de Königsberg, & la Cour des monnoyes qui fut abba-
ruë dans la ſuite. Schlüter décora l'Arſenal de ces trophées, & de ces
beaux Maſcarons, qui font l'admiration des Connoiſſeurs, & il fit fondre
la Statuë equeſtre du Grand Electeur, qui paſſe pour un Chef d'Oeu-
vre. Le Roi embellit la Ville de Berlin de l'Egliſe du Cloitre, de
Arcades, & de quelques autres Edifices encore; & il orna les Mais-
on de plaifance d'Orangebourg, de Potzdam & de Charlottenbourg, par
toutes fortes d'augmentations & d'embelliſſemens.

Les beaux Arts, enfans de l'abondance, commencerent à fleurir.
L'Academie des Peintres dont Peſne, Mayer, Widemann & Leig-
ber étoient les premiers Profeſſeurs, fut fondée; mais il ne ſortit de
leur Ecole aucun Peintre de réputation. Ce qu'il y eut de plus re-
marquable, & ce qui intéreſſe le plus les progrès de l'eſprit humain,
ce fut la fondation de l'Academie Royale des Sciences en 1700. La
Reine Sophie Charlotte y contribua le plus. Cette Princeſſe avoit le
génie d'un grand homme, & les connoiſſances d'un ſavant; elle cr-
yoit qu'il n'étoit pas indigne d'une Reine, d'eſtimer un Philoſophe;
Vous ſentez bien que ce Philoſophe dont je vous parle, c'étoit Leibniz:
& comme ceux qui ont reçu du Ciel des ames privilégiées, s'éleve-
nt à l'égal des Souverains, elle admit Leibnitz dans ſa familiarité; elle
fit plus, elle le propoſa comme ſeul capable de jeter les fondemens de
cette nouvelle Academie. Leibnitz qui avoit plus d'une ame, ſi j'o-
ſe m'exprimer ainſi, étoit bien digne de préſider dans une Academ-
ie, qu'au beſoin il auroit représenté tout ſeul. Il institua 4 Claſſes,
dont l'une de Phyſique & de Medecine, l'autre de Mathematiques, la
troiſieme de la Langue & des Antiquités d'Allemagne, & la derniere des
Langues & des Antiquités Orientales. Les plus célèbres de nos Aca-
demiciens furent Meſſieurs Baſnage, Bernoulli, la Croze, Guillelmini,
Hartzöcker, Herman, Kirch, Römer, Stürmer, Varignon, des Vigno-
les, Werenfels & Wolff. Depuis on y reçut Meſſieurs de Beauſobre
&

le L'enfant, Savans dont les plumes auroient fait honneur aux Siècles d'Auguste & de Louis XIV.

Otton de Guericke fleurissoit encore à Magdebourg : c'est le même auquel nous devons l'invention de la pompe Pneumatique, & qui par une heureuse destinée a rendu son esprit philosophique & inventif héréditaire à ses descendans.

Les Universités prospéroient en même tems : Halle & Francfort étoient fournies de savans Professeurs. Thomasius, Gundling, Luewig, Wolff & Strick, tenoient le premier rang pour la célébrité, & étoient nombre de Disciples. Wolff commenta l'ingénieux Systeme de Leibnitz sur les Monades, & noya dans un déluge de paroles, d'argumens, de Corollaires & de Citations, quelques Problemes que Leibnitz avoit jetté, peut-être comme une amorce aux Métaphysiciens. Le Professeur de Halle écrivit laborieusement nombre de volumes, qui, au lieu de pouvoir instruire des hommes faits, servirent tout au plus de Catechisme de Dialectique pour des enfans. Les Monades ont mis aux prises les Métaphysiciens & les Géometres d'Allemagne, & se disputent encore sur la divisibilité de la matière.

Le Roy fonda même à Berlin une Academie, pour des jeunes gens de Condition, sur le modele de celle de Luneville : malheureusement elle ne subsista pas longtems.

Ce Siècle ne produisit aucun bon Historien. On chargea Teisendorff d'écrire l'Histoire de Brandebourg; il en fit le Panegyrique. Pufendorf écrivit la vie de Frédéric Guillaume, & pour ne rien omettre, il n'oublia ni ses Clercs de Chancellerie, ni ses Valets de Chambre. Tous Auteurs ont, ce me semble, toujours péché, faute de discerner les choses essentielles des accessoires, d'éclaircir les faits en les débrouillant, & de racourcir & resserrer leur prose trainante, & excessivement sujette aux inversions & aux nombreuses épithetes.

Dans cette disette de tout bon Ouvrage en prose, le Brandebourg eut un bon Poète. C'étoit le Sieur de Canitz; il traduisit heureusement quelques Epitres de Boileau, il fit des vers à l'imitation d'Horace, & quelques Ouvrages où il est tout à fait Original. C'est le poëte de l'Allemagne, le Poète le plus élégant, le plus correct & le

moins diffus, qu'il ait fait des vers en nôtre langue. Communément en Allemagne le Pédantisme affecte jusqu'aux Poètes ; la langue des Dieux est prostituée par la bouche de quelque Régent d'un Collège obscur, ou par quelque Etudiant dissolu ; & ce qu'on appelle honnêtes gens sont, ou trop paresseux, ou trop fiers. pour manier la Lyre d'Horace, ou la Trompette de Virgile. Mr. de Canitz, quoique d'une maison illustre, crut que l'esprit & le talent de la Poësie ne dérogeoit pas : il le cultiva, comme nous l'avons dit, avec succès ; il eut une Charge à la Cour, & puisa dans l'usage de la bonne Compagnie cette politesse & cette aménité qui plait dans son stile.

Les Spectacles Allemands étoient peu de chose. Ce qu'on appelle Tragédie, est communément un Monstre, composé d'enflure & de basse plaisanterie ; les Auteurs Dramatiques ignorent jusqu'aux moindres règles du Théâtre ; la Comédie est plus pitoyable encore. C'est une farce grossière qui choque le goût, les bonnes mœurs & les honnêtes gens. La Reine entretenoit un Opera Italien, dont le fameux Bononcini étoit le Compositeur ; nous eumes dès lors de bons Musiciens. A la Cour il y avoit une Comédie Française qui donnoit dans ses représentations les chefs d'oeuvre des Molières, des Corneilles & des Racines.

Le goût du Théâtre François passa en Allemagne avec celui des modes de cette Nation. L'Europe enthousiasmée du caractère de grandeur que Louis XIV. imprimoit à toutes ses actions, de la politesse qui régnoit à sa Cour, & des grands hommes qui illustroient son Règne, vouloit imiter la France qu'elle admiroit. Toute l'Allemagne y voyageoit ; un jeune homme passoit pour un imbécille, s'il n'avoit séjourné quelque tems à la Cour de Versailles. Le goût des François régla nos Cuisines, nos Meubles, nos habillemens, & toutes ces bagatelles, sur lesquelles la tyrannie de la mode exerce son empire : cette passion portée à l'excès dégénéra en fureur, les femmes qui outrent souvent les choses, la poussèrent jusqu'à l'extravagance. (a)

La

(a) La Mere du Poëte Canitz ayant épuisé la France en modes nouvelles, pour rencherir sur les autres Dames de Berlin, commit à un Marchand de faire venir de

La Cour ne donnoit pastant dans les modes étrangères que la Villamagnificence & l'étiquette y décoreient l'ennui. On s'en yit même en Cérémonies. Le Roi institua l'Ordre de l'Aigle noir, pour avoir un Ordre, comme en ont tous les Rois, que pour se curer à cette occasion une Fête, qui ressemble assés à une Mascap. Ce Roi qui avoit fondé une Academie par complaisance pour Epouse, entretenoit des Bouffons pour satisfaire à sa propre ination. La Cour de la Reine Sophie Charlotte étoit toute séparée l'autre. C'étoit un Temple où se conservoit le feu sacré des Vers, l'Azile des Savans, & le Siège de la politesse. On regretta d'au plus les vertus de cette Princesse qui celle * qui remplit le Trône is elle, se livra aux devots, & passa sa vie avec des hypocrites, race lisante, qui verse ses poisons sur la vertu, en sanctifiant ses propres is. Enfin des adeptes parurent à la Cour; un Italien, nommé Catano, assura le Roi qu'il avoit le secret de faire de l'or, il en dépensa xcoup, & n'en fit point. Le Roi se vengea de sa crédulité sur ce heureux, & Cataneo fut pendu.

* Princesse de Mecklenbourg, qui tomba ensuite en démence.

L'Etat changea presque entierement de forme sous Frédéric 1713.
L'ame: la Cour fut congédiée, & les grosses pensions souffrirent réduction; beaucoup de personnes qui avoient entretenu Catherine, marcherent à pied: ce qui fit dire au Public que le Roi avoit du l'usage des jambes aux perclus. Sous Frédéric I. Berlin étoit henes du Nord: sous Frédéric Guillaume elle en devint la Sparte. it le Gouvernement fut militaire; l'augmentation de l'Armée se fit,

de Paris un Mari jeune, beau, vigoureux, poli, spirituel & noble, supposant que cette Marchandise s'y trouvoit aussi communément que des pompons dans une Boutique. Le Marchand, tout nouveau dans cette espece de métier, s'acquitta de sa commission comme il pût. Ses Correspondans trouverent enfin un Epouseur. C'étoit un homme de 50. ans, il se nommoit le Sieur de Brinboc, d'un tempérament foible & valétudinaire; il arrive, Madame de Canitz le voit, s'effraye & l'épouse. Ce fut un bonheur pour les Prussiens que ce mariage tourna au mécontentement de la Dame, autrement son exemple auroit été suivi; nos Beautés auroient passés dans les mains des François, & les Berlinoises auroient été réduites comme les Romains à enlever les Sabines de leur voisinage.

fit, & dans l'ardeur de ces premiers enrollemens, quelques Artisans furent faits Soldats, ce qui répandit la terreur parmi les autres qui se sauverent en partie: cet accident imprévu causa de nouveau un dommage considerable à nos Manufactures.

Le Roi porta un prompt remede à ces abus, & il s'attacha avec une attention singuliere au rétablissement & aux progrès de l'industrie: il défendit par un arrêt sévère la sortie de nos Laines, il établit le Lagerhaus, * magasin d'où l'on avance des laines aux pauvres Manufacturiers, qu'ils restituent par leur ouvrage. Nos draps trouverent un débit assuré dans la consommation de l'Armée, qui fut habillée de neuf tous les ans. Ce débit s'étendit jusques chez l'Etranger: la Compagnie de Russie fut formée l'année 1725. nos Marchands fournissoient les draps pour toutes les Troupes Russes; mais les Guinées Angloises passerent en Moscovie, & elles furent bientôt suivies de leurs draps, de sorte que nôtre Commerce cessa, nos Manufactures en souffrirent au commencement, mais d'autres sorties s'ouvrirent. Les Ouvriers n'eurent plus aslés de nos propres laines, on permit aux Mecklenbourgeois de nous vendre les leurs, & dès l'année 1733. nos manufactures étoient si florissantes qu'elles debiterent 44. mille pièces de drap de 24. aunes chacune chez l'Etranger.

Berlin fut comme un Magasin de Mars: tous les Ouvriers qui peuvent être employés pour une Armée, y prospérerent, & leurs Ouvrages furent recherchés par toute l'Allemagne. On établit à Berlin des Moulins de poudre à Canon, à Spandow des Fourbisseurs, à Potzdam des Armuriers, & à Neustadt des Ouvriers, qui travailloient en ferronnerie & en cuivre.

Le Roi donna des immunités & des récompenses à tous ceux qui bâtiroient dans les Villes de tous ses Etats; il ajouta tout le Quartier de la Frèderic-Stadt à sa Capitale, & couvrit de maisons les places

* A peine qu'avoit occupé l'ancien rempart. Il créa la ville de Potzdam, & il la peupla; il ne fit pas le moindre Bâtiment pour lui même, mais tout pour ses sujets. L'Architecture de son Règne est généralement infectée par le goût Hollandois, il seroit à desirer que les grandes dépenses que ce Prince, fit en bâtimens, eussent été dirigées par de plus habiles

* A peine avoit-il 60. habitans dans cette ville, au lieu qu'il y en a présent plus de 30. mille.

habiles Architectes ; il eut le sort de tous les Fondateurs des Villes, qui, occupés par la solidité de leurs desseins, ont la plupart négligé ce qui avec la même dépense les auroit embellies & ornées davantage.

Berlin après son augmentation reçut une Police nouvelle * sur le pied à peu près de celle de Paris. On établit dans tous les quartiers de la ville des Officiers de police ; l'usage des Fiacres s'établit en même tems ; on purgea la Ville de ces fainéans qui se nourrirent à force d'importunités, & ces malheureux objets de nos dégoûts & de nôtre compassion, envers lesquels la Nature n'a été qu'une marâtre, trouvèrent des aziles dans les Hopitaux publics. en 1734.

Pendant que tous ces changemens se firent, le luxe, la magnificence & les plaisirs disparurent, l'esprit d'épargne s'introduisit dans tous les états ; chez le riche comme chez le pauvre. Sous les Régnes précédens, beaucoup de Nobles vendoient leurs terres pour acheter du drap d'or & des galons ; cet abus cessa. Dans la plupart des Etats Prussiens, les Gentilshommes ont besoin d'une bonne Oeconomie pour soutenir leurs familles, à cause que le droit de primogéniture n'a point lieu, & que les Pères ayant beaucoup d'enfans à établir, ne peuvent procurer que par leur épargne un revenu honnête à ceux qui après leur mort partageront leur maison dans des branches nouvelles.

Cette diminution dans la dépense du Public, n'empêcha pas beaucoup d'Artisans de se perfectionner ; nos Carosses, nos Galons, nos Velours & nos Ouvrages d'Orfèvrerie, se répandirent par toute l'Allemagne.

Mais ce qu'il y eut de déplorable, ce fut que pendant qu'on faisoit des arrangemens si utiles & si grands, on laissa tomber dans une décadence entière l'Academie des Sciences, les Universités, les Arts liberaux & le Commerce.

On remplissoit mal & sans choix les places qui venoient à vaquer dans l'Academie Royale des Sciences, & par une dépravation singuliere le Siècle affectoit de mépriser une Societé, dont l'origine étoit aussi illustre, & dont les travaux tendoient autant à l'honneur de

la Nation que de l'esprit humain. Pendant que tout ce Corps tomboit en léthargie, la Medecine & la Chymie se soutinrent. Pot, Margraff & Eller, combinoient & décomposoient la matiere, & éclairoient le Monde par leurs découvertes; & les Anatomistes obtinrent un Théâtre pour leurs dissections publiques, qui devint une Ecole florissante de Chirurgie.

La faveur & les brigues remplissoient les Chaires des Professeurs dans les Universités; les Dévots qui se mêlent de tout, acquirent une part à la Direction des Universités, ils y persécutoient le bon sens, & sur tout la Classe des Philosophes. Wolff fut exilé pour avoir déduit avec un ordre admirable les preuves sur l'existence de Dieu; la jeune Noblesse qui se vouoit aux armes, crut déroger en étudiant, & comme l'esprit humain donne toujours dans les excès, ils regarderent l'Ignorance comme un titre de mérite, & le Savoir comme une Pédanterie absurde.

La même raison fit que les Arts liberaux tomberent en décadence. L'Academie des Peintres cessa. Pesne qui en étoit le Directeur, quitta les Tableaux pour les Portraits; les Menuisiers s'érigerent en Sculpteurs, & les Maçons en Architectes. Un Chymiste, nommé Böttcher, passa de Berlin à Dresde, & donna au Roi de Pologne le secret de cette Porcelaine, qui surpasse celle de la Chine par l'élégance des formes & la finesse de la diaprure.

Notre Commerce n'étoit pas encore né; le Gouvernement l'étouffoit, en suivant des principes qui s'opposoient directement à ses progrès: il n'en faut point conclurre que la nation manque de Génie propre au négoce. Les Vénitiens & les Génois furent les premiers qui le saisirent, la découverte de la Bouffole le fit passer chez les Portugais & les Espagnols, il s'étendit ensuite en Angleterre & en Hollande, les François s'y appliquèrent les derniers, & ils regagnerent de vitesse ce qu'ils avoient négligé par ignorance. Si les habitans de Dantzic, de Hambourg, de Lubeck, si les Danois & les Suédois, s'enrichissent tous les jours par la navigation, pourquoi les Prussiens n'en feroient-ils pas autant? Les hommes deviennent tous des Aigles quand on leur ouvre

ouvre les chemins de la fortune ; il faut que l'exemple les anime , que l'émulation les excite, & que le Souverain les encourage. Les François ont été tardifs ; nous le sommes de même ; peut-être est-ce que notre heure n'est pas encore venue.

On songeoit moins alors à étendre le Commerce, qu'à réprimer les dépenses inutiles. Les deuils avoient été autrefois ruineux pour les familles. On donnoit des festins aux Enterremens, la pompe funebre étoit même coûteuse. Toutes ces coutumes furent abolies. On ne drapa plus les Maisons, ni les Carosses, on ne donna plus des livrées noires ; & depuis on mourut à fort bon marché.

Ce Gouvernement tout militaire influa dans les mœurs, & régla même les modes. Le public avoit pris par affectation un air aigrefin ; personne dans tous les Etats Prussiens n'avoit plus de 3. aunes de drap dans son habit, & moins de deux aunes d'épée pendues à son côté. Les femmes fuyoient la société des hommes, & ceux-ci s'en dédommageoient entre le vin, le tabac & les bouffons. Enfin nos mœurs ne ressembloient plus, ni à celles de nos ancêtres, ni à celles de nos voisins ; nous étions Originaux, & nous avions l'honneur d'être copiés de travers par quelques petits Princes d'Allemagne.

Vers les dernières années de ce Règne * le hazard conduisit à Berlin un homme d'un esprit malfaisant, obscur & rusé ; c'étoit une espèce d'Adeptes, qui faisoit de l'Or pour le Souverain, aux dépens de la bourse de ses sujets ; ses artifices lui réussirent un tems, mais comme la méchanceté se découvre tôt ou tard, ses prestiges disparurent, & sa malheureuse science rentra dans les ténèbres dont elle étoit sortie.

* Eckert.

Telles ont été les mœurs du Brandebourg sous tous ses différens Gouvernemens. Le Génie de la Nation fut supprimé par une longue suite de Siècles barbares, il s'éleva de tems en tems, mais il s'affaissa aussi-tôt sous l'ignorance & le mauvais goût ; & lorsque des circonstances heureuses semblerent favoriser ses progrès, survint une Guerre dont les suites funestes anéantirent l'Etat. Nous avons vu cet Etat renaissant de ses cendres ; nous avons vu par quels nouveaux efforts la Nation parvint à se civiliser, & si ce beau feu n'a jetté que de foi-

bles étincelles, il ne faut qu'une bagatelle pour le faire éclore au grand jour. Comme les semences ont besoin d'un terrain propre pour leur développement, de même les Nations demandent un concours de conjonctures heureuses, pour qu'elles sortent de leur engourdissement, & qu'elles reçoivent pour ainsi dire une nouvelle vie.

Tous les Etats ont eu un certain Cercle d'évenemens à parcourir, avant que d'atteindre à leur plus haut degré de perfection. Les Monarchies y sont arrivées avec une allure plus lente, & s'y sont moins soutenues que les Républiques; & s'il est vrai de dire que la forme de Gouvernement la plus parfaite, est celle d'un Royaume bien administré, il n'est pas moins certain que les Républiques ont rempli le plus promptement le but de leur Institution, & se sont le mieux conservées, par ce que les bons Rois meurent, & que les sages Loix sont immortelles.

Sparte & Rome, qui furent fondées pour être Guerrieres, produisirent, l'une cette phalange invincible, l'autre, ces Légions qui subjuguèrent la moitié du monde connu. Sparte enfanta les plus illustres Capitaines. Rome devint une pépinière de Héros. Athenes, à laquelle Solon avoit donné des Loix plus pacifiques, devint le berceau des Arts. A quelle perfection ses Poètes, ses Orateurs & ses Historiens, ne parvinrent-ils point? Cet azile des Sciences se conserva jusqu'à l'entière ruine de l'Attique. Carthage, Venise, & même la Hollande, furent par leur institution liées au Commerce, & elles le poursuivirent & le soutinrent constamment, reconnoissant que c'étoit le principe de leur grandeur, & le soutien de leur Etat.

Continuons encore cet examen pour un moment. En touchant aux Loix fondamentales des Républiques, on est sûr de les renverser de fond en comble, à cause que la sagesse des Législateurs a formé un tout, auquel les parties du Gouvernement tiennent essentiellement: rejeter les unes, c'est détruire les autres, par l'enchaînement des Conséquences qui les lie ensemble, & qui en forme un Système al-

Dans

Dans les Royaumes la forme du Gouvernement n'a de base que le Despotisme du Souverain: les Loix, le Militaire, le Negoce, l'Industrie, & toutes les autres parties de l'Etat, sont assujetties au caprice d'un seul homme, qui a des successeurs qui ne se ressemblent jamais; d'où il s'ensuit pour l'ordinaire qu'à l'avènement d'un nouveau Prince, l'Etat est gouverné par de nouveaux principes; & c'est ce qui porte préjudice à cette forme de Gouvernement. Il y a de l'unité dans le but que les Républiques se proposent, & dans les moyens qu'elles emploient pour y parvenir, ce qui fait qu'elles ne le manquent presque jamais. Dans les Monarchies un fainéant succede à un Prince ambitieux; celui-ci est suivi d'un dévot, celui-là par un Guerrier, celui-ci par un savant, celui-là par un autre qui s'abandonne à la volupté; & pendant que ce Théâtre mouvant de la fortune présente sans cesse des scenes nouvelles, le Génie de la Nation diverti par la variété des objets ne prend aucune assiette fixe. Il faut donc que dans les Monarchies les Etablissmens qui doivent braver la vicissitude des Siècles, ayent des racines si profondes qu'on ne puisse les arracher, sans ébranler en même tems les plus solides fondemens du Trône.

Mais la fragilité & l'instabilité sont inséparables des Ouvrages des hommes. Les Révolutions que les Monarchies & les Républiques éprouvent, ont leurs causes dans les Loix immuables de la Nature. Il faut que les passions humaines servent de ressorts, pour amener & mouvoir sans cesse de nouvelles décorations, que la fureur audacieuse des uns enleve, & que la foiblesse des autres ne peut défendre; que des ambitieux effrenés renversent des Républiques, & que l'artifice triomphe quelquefois de la simplicité. Sans ces grandes secousses dont nous venons de parler, l'Univers resteroit sans cesse le même; il n'y auroit point d'égalité entre le destin des Nations. Quelques Peuples seroient toujours civilisés & heureux, & d'autres toujours barbares & infortunés.

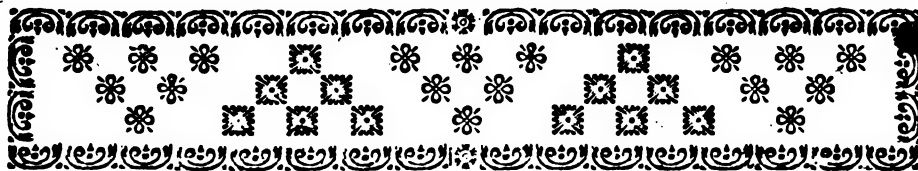
Nous avons vû des Monarchies naître & mourir, des peuples, de barbares qu'ils étoient, se policer & devenir le modele des Nations. Ne pourrions-nous pas en conclurre que ces Nations ont une révolution

tion semblable à celle des Planetes, qui, selon le sentiment de quelques Astronomes, après avoir parcouru en dix mille ans tout l'espace des Cieux, se retrouvent d'où elles étoient parties ?

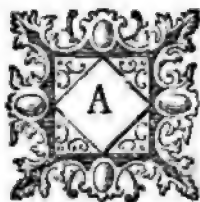
Nos beaux jours arriveront donc, comme ceux des autres; nos prétensions sont d'autant plus justes que nous avons payé le tribut à la Barbarie, quelques Siècles de plus que les Méridionaux.

Ces Siècles précieux s'annoncent par le nombre de Grands hommes en tout genre qui naissent à la fois. Heureux sont les Princes qui viennent au monde dans des conjonctures aussi favorables! Les Vertus, les Talens, le Génie, les emportent, d'un mouvement commun avec eux, aux choses grandes & sublimes.





R É P O N S E
D E
M. DE MAUPERTUIS.



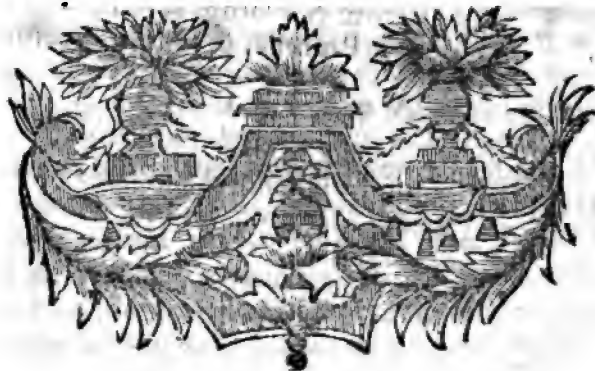
près les Mémoires, Monsieur, que vous avez leus dans nos Assemblées précédentes sur l'Histoire de ce País, il ne nous restoit plus à desirer que celui que nous venons d'entendre. On reconnoit dans tous le même Génie & le même Style : cependant, si je l'ose dire, celui-ci a sur les autres l'avantage que lui donne son sujet.

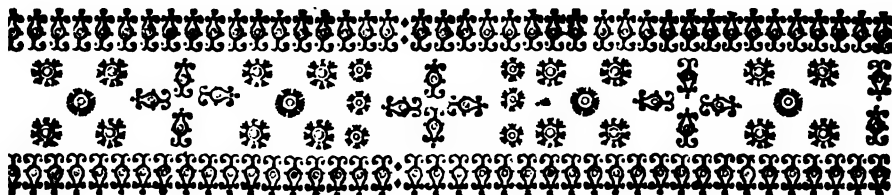
Représenter les événemens dans leur ordre, donner à chaque partie de l'Histoire sa proportion & sa mesure, écrire avec précision & élégance ; suppose un Esprit juste, une Imagination heureuse, & une connoissance parfaite de la Langue. Décrire les Mœurs & les Coutumes des peuples, remonter à leur origine, les suivre dans leur progrès ; marquer ce qui appartient à l'homme en général, ou à une Nation en particulier, n'est donné qu'à un Esprit profond.

Si un Ecrivain se trouve assés avantaagé de la Nature pour pouvoir remplir à la fois tous ces differens objets, combien ne sera-t-il pas superieur, & à l'Historien qui ne rapporte que les faits, & au Philosophe qui s'en tient aux speculations ? C'est que les événemens sont necessairement liés aux mœurs ; & en sont presque toujours
les

les suites, ou les causes. Un Esprit assés vaste embrasse cette relation; il pourroit en quelque sorte prévoir les moeurs qui doivent résulter d'une certaine chaine d'évenemens; prédire les événemens, qui seront la suite des moeurs.

Si un tel homme se trouvoit appelé au Conseil des Rois; s'il se trouvoit lui-même revêtu. d'une grande puissance; (car nous avons depuis Cesar l'exemple de grands Princes, qui ont été en même temps d'excellens Auteurs,) quel bonheur ne seroit ce point pour les Peuples qu'il auroit à gouverner! Quel bonheur ne seroit-ce point pour toute l'Europe!





DE LA SUPERSTITION ET DE LA RELIGION.



Je divise en trois parties ce morceau qui concerne la Religion & la Superstition, & je présenterai pour plus de clarté & d'ordre la Religion sous le Paganisme, sous le Papisme, & sous la Réforme.

ARTICLE I

De la Religion sous le Paganisme.

Le Brandebourg a suivi le culte différent des divers Peuples qui ont habité. Les Teutons qui furent ses plus anciens habitans, adoroient un Dieu, nommé Tuiston. César dit que c'est le *Dis Pater* engendré par la Terre, & qui avoit lui-même un fils nommé Man.

Le culte que les Germains rendoient à leurs Dieux étoit proportionné à leurs mœurs sauvages, grossières & simples ; ils s'assembloient dans des Bois sacrés, chantoient des Hymnes à l'honneur de leurs Idoles, & leur sacrifioient même des victimes humaines.

Il n'y avoit pas de Contrée qui n'eut son Dieu particulier ; les Scandinaves en avoient un, nommé Triglaiff. On en trouva encore un à Harlungerberg auprès de Brandebourg ; il étoit représenté avec trois têtes, ce qui marquoit * qu'il régnoit au Ciel, sur la Terre & dans les Enfers ; c'étoit apparemment la Trinité du Paganisme. Ta-
Memoires de l'Academie Tom IV. H h h cite

* Valentin
Eichstadt.

site rapporte que les Germains avoient un certain nombre de Chevaux blancs, qu'ils croyoient être instruits des Myſteres de leurs Dieux, & qu'on nourriſſoit un cheval noir pour la Déeſſe Trigla, qui paſſoit pour l'interprète de ſes volontés. * Ces Peuples adoroient auſſi des ſerpens, & l'on puniſſoit de mort ceux qui en tuoient.

Dans le V. Siècle les Vandales abandonnerent leur Patrie pour aller der la France, l'Eſpagne, & même l'Afrique. † Les Saxons qui revenoient alors d'Angleterre, firent une deſcende à l'embouchure de l'Elbe, & prirent poſſeſſion de ces Contrées entre l'Elbe, la Sprée & l'Oder, que les naturels du Pais avoient abandonnées. Leurs Dieux & leur Religion devinrent ceux du Brandebourg. La principale de leurs Idoles s'appelloit Irmanſeul, ce qui ſignifie Colonne d'Irman. Les ſavans Etymologiſtes d'Allemagne n'ont pas manqué de faire dériver le nom d'Irman de Hermes, qui eſt le même que le Mercure des Grecs.

Il eſt connu à tous ceux qui ſont verſés dans la Litterature Allemande, que c'eſt une fantaiſie générale parmi leurs Savans de trouver des rapports entre les Divinités de la Germanie, & celle des Egyptiens, des Grecs & des Romains. Il n'eſt malheureusement que trop vrai que l'erreur & la ſuperſtition ſemblent être le partage de l'humanité. Tous les Peuples ont eu la même pente pour l'Idolatrie; & comme ils ont tous à peu près les mêmes Paſſions, les effets n'ont pas manqué d'y répondre. La Crainte donna le jour à la crédulité, & l'Amour propre intereſſa bientôt le Ciel au deſtin des hommes. De là naquirent tous ces cultes différens, qui n'étoient à proprement parler que des ſoumiſſions modifiées en cent façons extravagantes, pour appaiſer la colere céleſte dont on redoutoit les effets. La Raiſon humaine, altérée & abrutié par la terreur que toutes fortes de calamités lui inſpiroient, ne ſavoit à qui ſ'en prendre pour ſe raffurer contre ſes craintes; & comme les malades ont recours aux remèdes les plus inſenſés, pour eſſayer ſ'ils n'en trouveront point un qui les guériffe; le Genre humain ſuppoſa dans ſon aveuglement une eſſence divine, & une vertu ſecourable, dans tous les objets de la Nature de puis

depuis les plus sublimes jusqu'aux plus abjects. Tout fut adoré; l'encens fuma pour des Champignons, le Crocodile eut des Autels, les Statuës des Grands Hommes, qui les premiers avoient gouverné des Nations, eurent des Temples & des Sacrificateurs, & dans les tems où des afflictions générales désoloient un païs, la superstition redou- bloit. Les Savans Allemans ont raison de dire en ce sens, que la su- perstition est la même chez toutes les Nations; quoiqu'elle soit en général une suite de la crédulité, elle se manifeste cependant sous des nuances variées à l'infini, & proportionnées au Génie des Nations. J'aurois peine à me persuader que les Fables ingénieuses des Grecs, que leurs Dieux, Minerve, Venus & Apollon eussent été connus dans ce Païs du tems du Paganisme. Mais nos profonds Etymologi- stes ne s'embarassent pas de si peu de chose; ils croyent ennoblir leur Mythologie en donnant à leurs Dieux des origines Grecques, ou Ro- maines, comme si le nom de ces Peuples pouvoit rendre l'Idolatrie plus respectable, & que l'extravagance des Grecs valût mieux que celle des Allemans.

Irmansäul n'étoit pas le seul Dieu des Saxons. On trouva sous une de leurs Idoles l'Inscription suivante. *Je fus autrefois le Duc des Saxons, j'en suis devenu le Dieu.* Angelus soutient qu'ils ado- roient le Soleil, sous la forme d'une tête radieuse, & que cette Idole dorma son nom à la Ville de Sonnenburg, où elle étoit placée. Le même Auteur prétend qu'ils adoroient de même Venus représentée à demi nue, ayant la mamelle gauche percée par une flèche, & trois Graces plus petites qu'elle qui l'entouroient. Ces Peuples la nom- moient Magda, ce qui veut dire fille; & Angelus assure qu'elle donna son nom à Magdebourg, où elle avoit ses autels, * On voyoit encore des ruines de son Temple dans cette ville, avant que Tilly l'eut sac- cagée. Ce qui paroît de plus remarquable dans le Culte que les Sa- xons rendoient à cette Divinité, étoient les jeux qu'ils célébroient à son honneur. Ils consistoient en des Tournois que représentoient tous les jeunes Gens des Bourgades voisines; ils déposoient une som- me d'argent entre les mains des Juges, pour doter une jeune fille qui

* Annales de Magde-
bourg.

étoit donnée en mariage comme un prix, à celui qui l'avoit emporté à la jouë. Les Annales de Magdebourg témoignent que ces jeux se célébroient encore, comme des restes du Paganisme, l'année 1279. & l'année 1387.

* Linder-
ock.

Le Luxe s'introduisit dans la Religion, lors que les Richesses augmentèrent. Anciennement les Peuples tenoient qu'il n'étoit pas convenable de placer leurs Dieux dans des Temples bâtis de main d'hommes, & ils les adoroient dans leurs Bois sacrés, mais à mesure que les mœurs s'adoucirent, leurs Dieux vinrent habiter les Villes.* Cependant l'ancien usage ne fut pas entièrement aboli; car on trouve que Charlemagne défendit aux Saxons d'adorer des Chênes, & de les arroser du Sang des victimes.

† Freins-
emius &
Schmidt.

Les Prêtres † de ces tems étoient plus artificieux & plus fourbes que le Peuple. Outre leur Sacerdoce ils exerçoient une triple Charlatannerie; ils fabriquoient des Oracles, & se mêloient de l'Astrologie & de la Médecine. Il ne falloit pas tant de ruses pour abuser un Peuple aussi grossier. Aussi-fut-il bien difficile de détruire une Religion ancrée par tant de superstitions dans les esprits. Toute l'Allemagne étoit encore attachée au Culte des Idoles, quand Charlemagne, & après lui Henri l'Oiseleur, entreprirent de convertir ces peuples. Après bien des efforts inutiles, ils n'y réussirent qu'en noyant l'Idolatrie dans des torrens de sang humain qu'ils versèrent.

ARTICLE II.

Conversion des Peuples au Christianisme; & de l'Etat de la Religion Catholique dans le Brandebourg.

La folie de tous les Peuples est d'illustrer la Noblesse de leurs Loix, de leurs Coutumes & de leur Religion, par l'antiquité de leur origine. Les Allemans non contents d'avoir dérobé leurs Dieux aux Grecs, ont voulu passer pour aussi vieux Chrétiens que les autres Nations de l'Europe. Ils ont trouvé dans St. Jérôme je ne sai quel passage qui dit, à ce que Staphonius & Smitius prétendent, que l'Apôtre Thomas vint prêcher l'Evangile au Nord de l'Allemagne. Il n'y prêcha

prêcha en vérité que l'incrédulité; car le peuple demeura Payen, bien longtems après lui.

Quoiqu'on dise, il ne se trouve aucune trace de Christianisme dans le Brandebourg que du tems de Charlemagne. * Cet Empereur, † Dans le
après avoir remporté différentes victoires sur les Saxons & les Bran- VIII. Siècle.
sebourgeois, vint établir son Camp à Wormerstedt † auprès de Mag- † Henri
sebourg, & il n'accorda la paix à ces Provinces qu'il avoit subjuguées, Meibomius.
qu'à condition qu'elles embrasseroient le Christianisme.

L'impuissance de résister à un ennemi aussi redoutable, & la crainte des menaces, conduisit ces Peuples au Batême, qui leur fut administré dans le Camp de l'Empereur; mais la sécurité les ramena tous à l'Idolatrie, dès que l'Empereur se fut éloigné avec son armée de leur voisinage.

L'Empereur Henri l'Oiseleur triompha ensuite à l'exemple de Charlemagne, des habitans des bords de l'Elbe & de l'Oder, & après bien du sang répandu, ces Peuples furent subjugués & convertis. Les Chrétiens détruisirent par zèle les Idoles du Paganisme, de sorte qu'il ne nous en est presque resté aucun vestige; les niches de ces Idoles vacantes furent remplies de Saints de toute espèce; & de nouvelles erreurs succéderent aux anciennes. 928.

Ce Siècle que Léon X. illustra en Italie, en y ressuscitant les beaux arts & les sciences, ensevelies depuis longtems sous l'ignorance & le mauvais goût; ce Siècle, dis-je, n'étoit point aussi célèbre pour les Ultramontains: l'Allemagne étoit encore plongée dans l'ignorance la plus grossière, & elle languissoit sous un Gouvernement tout barbare; point de mœurs, aucunes connoissances, & la Raison humaine privée des lumières de la Philosophie demouroit abrutie dans sa stupidité: les Convertisseurs, & les Néophytes, dans le même cas sur ces articles, n'avoient aucun reproche à se faire.

* Environ l'année 946. l'Empereur Othon fonda l'Evêché de Havelberg, & peu de tems après celui de † Brandebourg. Il crut apparemment d'opposer par ce moyen une digue au débordement de l'Idolatrie, à laquelle ces Peuples étoient enclins, comme les Prin- * Angelus.
† 960.

grosses Garnisons dans des Païs sur lesquels il n'avoit aucune Souveraineté. Mais dans ces temps les Peuples étoient abrutis, les Princes foibles, & la Religion triomphante.

Quand une fois le Christianisme eut poussé de profondes racines, il produisit des Fanatiques de toute espèce. * La Peste ravagea le Brandebourg en 1351. & c'en fut assés pour faire extravaguer la superstition, Pour appaiser la colere céleste, on batîsa des Juifs par force, on en brula d'autres, on fit des Processions, des Voeux aux Images miraculeuses, & l'imagination échauffée par tant d'inventions folles, ou bizarres, enfanta ensui l'Ordre des Flagellans. C'étoient des Chrétiens mélancholiques & atrabilaires, qui se fouëttoient avec des verges de fil d'archal dans les Processions publiques. Cependant le Pape eut horreur de ces macérations monstrueuses, & reprouva l'ordre & ses abus.

* Cramer, Baronius, Lockelius.

† Lockelius, Annales de Brandebourg.

On tourna la dévotion du Public sur des objets plus doux. Le Pape Jean XXII. établit des Bureaux d'Indulgences dans le Brandebourg. Les Augustins trafiquoient de ces Indulgences, & en envoyoit le produit à Rome. Les miracles devinrent à la fin si fréquens, † que les Auteurs rapportent qu'il tomba l'année 1500. une pluie de Croix rouges & blanches sur tous les passans. On trouva même de ces Croix dans le pain, ce qui fut regardé comme le présage d'un grand malheur.

Dans ce tems où les Prêtres abusoient si grossièrement de la crédulité des hommes, où ils se servoient de la Religion pour s'enrichir, où les Ecclesiastiques menoient la vie la plus scandaleuse, un simple Moine entreprit de réformer tant d'abus. Il rendit aux hommes par son exemple l'usage de la Raison, qui leur avoit été interdit pendant tant de Siècles, & l'esprit humain enhardi par le recouvrement de sa liberté, étendit de tous côtés la sphère de ses connoissances.

ARTICLE III.

De la Religion sous la Réforme.

Je ne considérerai point l'Ouvrage de la Réforme du côté de la

la Theologie & de l'Histoire ; les Dogmes de cette Religion, & les événemens qu'elle fit naître, sont si connus que ce n'est pas la peine de les répéter. Une Révolution si grande & si singulière, qui changea presque tout le Systême de l'Europe, mérite d'être examinée avec des yeux philosophiques.

La Religion Catholique, qui s'étoit élevée sur la ruïne de celle des Juifs & des Payens, subsistoit depuis XV. Siècles: humble & douce sous les persécutions, mais fiere après son Etablissement, elle persécuta à son tour. Tous les Chrétiens étoient soumis au Pape, qu'ils croyoient infallible ; ce qui rendoit son pouvoir plus étendu que celui du Souverain le plus despotique. Un misérable Moine s'éleva contre une Puissance si solidement établie, & la moitié de l'Europe secoua le joug de Rome.

Toutes les raisons qui contribuerent à ce grand changement extraordinaire, subsistant longtems avant qu'il vint à éclore, préparoient d'avance les esprits à ce dénouement. La Religion Chrétienne étoit si dégénérée, qu'on n'y reconnoissoit plus les Caractères de son Institution. Rien ne surpassoit dans son origine la sainteté de sa Morale, mais la pente du Coeur humain à la corruption en pervertit bientôt l'usage. Ainsi les sources les plus pures du bien sont devenues des principes de toutes sortes de maux pour les hommes. Cette Religion qui enseignoit l'humilité, la charité & la patience, s'établit par le fer & par le feu. Les Prêtres des Autels dont la sainteté & la pauvreté devoit être le partage, menerent une vie scandaleuse ; ils acquirent des richesses, ils devinrent ambitieux, quelques uns furent des Princes puissans. Le Pape, qui originairement relevoit des Empereurs, s'arrogea le pouvoir de les faire, & de les déposer, il fulmina des Excommunications, il mit des Royaumes en interdit, & il outra si prodigieusement les choses què, de quelque manière que ce fut, il falloit à la fin que le Monde se revoltât contre tant d'abus.

La Religion changea ainsi que les moeurs, elle perdit de siècle en siècle sa simplicité naturelle, & à force de fard, elle devint méconnoissable. Tout ce qu'on y ajouta, n'étoit que l'Ouvrage des hom-



* 327. mes, il devoit périr comme eux. Au Concile de * Nicée, la Di-
 † Origène vinité † du Fils fut déclarée égale à celle du Père, & le St. Esprit an-
 & St. Justin, nexé à ces deux personnes, forma la Trinité. On défendit aux Prê-
 n'étoient pas tres de se marier, par les Ordonnances du Concile de Tolède. * Ce-
 de ce senti- ment : le der- pendant ils ne se soumirent à la volonté de l'Eglise que dans le XIII.
 nier dit dans Siècle. Le Purgatoire prit naissance dans le VI. Siècle. Le Con-
 son Dialogue cile de Trente en fit un dogme. Le Culte des Images fut autorisé
 p. 316. que la par le second Concile de Nicée, † & la Transsubstantiation fut établie
 grandeur du par les Pères du Concile de Trente. * Les Ecoles de Théologie sou-
 Fils n'appro- tenoient déjà l'Infaillibilité du Pape, depuis que les Evêchés de Rome
 che pas de & de Constantinople se trouverent en opposition. Quelques solitai-
 celle du Père. res fonderent des Ordres Religieux, & rendirent toute spéculative
 * Tenu une vie, qui doit se passer en action pour le bien de la société; les
 l'année 400. Couvens se multiplièrent à l'infini, & une grande partie du Genre hu-
 † Tenu en main y fut enseveli. Enfin toutes sortes de supercheries s'inventè-
 781. rent pour surprendre la bonne foi du Vulgaire, & les faux miracles
 * 1645. devinrent presque communs.

Ce n'étoit pas cependant par ces changemens qui regardoient l'objet de la foi, que la Réforme pouvoit venir dans la Religion. Du nombre des gens qui pensent, la plupart tournent toute la sagacité de leur esprit du côté de l'intérêt & de l'ambition; peu combinent des idées abstraites, & encore moins réfléchissent profondément sur des matieres aussi importantes; & le peuple, la plus respectable, la plus nombreuse & la plus infortunée partie de la Société, suit les impressions qu'on lui donne.

Il n'en étoit pas ainsi du pouvoir tyrannique que le Clergé exerceoit sur les consciences; les Prêtres dépouilloient les hommes de leurs biens & de leur liberté.

Cet esclavage qui s'appesantissoit chaque jour, excitoit déjà des murmures. L'homme le plus stupide, comme le plus spirituel, dès qu'il a de la sensibilité, s'apperçoit du mal qu'il souffre; tous tendent à leur bien-être, ils endurent un tems, mais à la fin la patience leur échape, & les vexations que tant de Peuples souffroient, auroient in-
 manquablement donné lieu à quelque réforme, si le Clergé Romain
 forte-

fortement agité par des dissensions intestines, n'eut enfin donné lui-même le signal de la liberté, en arborant l'étendart de la révolte contre le Pape. Les Vaudois, les Wicléfites & les Hussites avoient déjà commencé à remuer, mais Luther & Calvin aussi audacieux, & nés dans des conjonctures plus favorables, consommèrent enfin ce grand Ouvrage.

Les Augustins étoient en possession du trafic des Indulgences, le Pape chargea les Dominicains de les prêcher ; ce qui excita une querelle furieuse entre ces deux Ordres. Les Augustins déclamerent contre le Pape ; Luther qui étoit de leur Ordre, attaqua avec véhémence les abus de l'Eglise, il arracha d'une main hardie une partie du bandeau de la superstition, il devint bientôt Chef de parti : & comme sa Doctrine dépouilloit les Evêques de leurs Bénéfices, & les Couvens de leurs Richesses, les Souverains suivirent en foule ce nouveau Convertisseur.

La Religion prit alors une forme nouvelle, & se rapprocha beaucoup de son ancienne simplicité. Ce n'est point ici le lieu d'examiner, s'il n'eut pas mieux valu lui laisser plus de pompe & d'extérieur pour qu'elle en imposât davantage au Peuple, qui n'est frappé, & ne juge que par les sens ; il paroît qu'un Culte tout spirituel, & aussi nud que l'est celui des Protestans, n'est pas fait pour des hommes matériels & grossiers, incapables de s'élever par la pensée à l'adoration des plus sublimes vérités.

La Réforme fut utile au monde, & sur tout aux progrès de l'esprit humain. Les Protestans, obligés de réfléchir sur des matieres de la foi, se dépouillerent tout d'un coup des préjugés de l'Education, & se virent en liberté de se servir de leur raison, de ce guide qui est donné aux hommes pour les conduire, & dont au moins ils devroient faire usage pour l'objet le plus important de leur vie. Les Catholiques vivement attaqués furent obligés de se défendre. Les Ecclesiastiques étudierent, & ils sortirent de l'ignorance crasse & honteuse, dans laquelle ils croupissoient presque généralement.

S'il n'y avoit qu'une Religion dans le monde, elle seroit superbe & despotique sans retenue ; les Ecclesiastiques seroient autant de

Tyrans, qui, exerçant leur sévérité sur le peuple, n'auroient d'indulgence que pour leurs crimes. La Foi, l'Ambition & la Politique leur asserviroient l'Univers. A présent qu'il y en a plusieurs, aucune de ces Sectes ne sort, sans s'en repentir, des voyes de la modération. L'exemple de la Réforme est un frein qui empêche le Pape de se livrer à son ambition, & il craint avec raison la défection de ses Membres, s'il abuse de son pouvoir : aussi devient-il sobre d'excommunications, depuis qu'une pareille démarche lui enleva Henri VIII. & le Royaume d'Angleterre. Le Clergé Catholique & Protestant, qui s'observe avec une disposition égale à la critique, est retenu des deux côtés à garder au moins une décence extérieure. Ainsi tout reste en équilibre. Heureux, si l'esprit de parti, le fanatisme, & un excès d'aveuglement, ne les précipitent jamais dans des guerres, dont la fureur est le partage, & que des Chrétiens ne devoient jamais se faire. En regardant la Religion simplement du côté de la Politique, il paroît que la Protestante est la plus convenable aux Républiques & aux Monarchies. Elle s'accorde le mieux avec cet esprit de liberté qui fait l'essence des premières. Car dans un Etat, où il faut des Négocians, des Laboureurs, des Artisans, des Soldats, des Sujets en un mot, il est sûr que des Citoyens qui sont voeu de laisser périr l'espèce humaine, deviennent pernicieux.

Dans les Monarchies la Religion Protestante, qui ne relève de personne, est entièrement soumise au Gouvernement ; au lieu que la Catholique établit un Etat spirituel, tout-puissant, second en complots & en artifices, dans l'Etat temporel du Prince ; que les Prêtres qui dirigent les consciences, (& qui n'ont de supérieur que le Pape,) sont plus maîtres des Peuples, que le Souverain qui les gouverne, & que par une adresse à confondre les intérêts de Dieu avec l'ambition des hommes, le Pape s'est vu souvent en opposition avec des Souverains, sur des sujets qui n'étoient aucunement du ressort de l'Eglise.

Dans le Brandebourg, & dans la plupart des Provinces de l'Allemagne, le peuple portoit impatiemment le joug du Clergé Romain. C'étoit une Religion trop onéreuse pour des païs aussi peu opulens. Le Purgatoire, la Messe des morts & des vivans, le Jubilé, les Anna-

tes, les Indulgences, les Péchés véniels & mortels, les Pénitences changées en Amendes pécuniaires, les Affaires matrimoniales, les Voeux, les Offrandes, étoient autant d'impôts que le Pape levoit sur la crédulité, & qui lui donnoient des revenus aussi solides que le Mexique en fournit à l'Espagne. Ceux qui les payoient, étoient épuisés & mécontents. Il n'étoit donc pas même nécessaire d'employer l'évidence des argumens pour disposer ces esprits à recevoir la Réforme; ils crioiént contre le Clergé qui les opprimoit: un homme vint, qui promit de les en délivrer, & ils le suivirent.

Joachim II. fut le premier Electeur qui embrassa la Religion Lutherienne. Sa Mère, qui étoit une Princesse de Dannemarc, lui communiqua ses sentimens. Car la nouvelle Doctrine avoit pénétré en Dannemarc, avant que d'être reçue dans le Brandebourg. Le Pais suivit l'exemple du Prince, & tout le Brandebourg se fit Protestant. Matthieu Jagow, Evêque de Brandebourg, administra le Sacrement sous les deux espèces dans le Couvent des Moines noirs. Ce Couvent devint ensuite la Cathédrale de Berlin. Joachim II. se distingua dans le parti, tant par les Lettres de Controverse qu'il écrivit au Roi de Pologne, que par les discours éloquens, (* à ce que disent les Auteurs,)
 * Lockelius, Annales de Brandebourg.
 que ce Prince prononça à la Diète d'Augsbourg en faveur des Protestans.

La Réforme ne put point détruire toutes les erreurs: quoiqu'elle eut ouvert les yeux du Peuple sur une infinité de superstitions, il s'en conserva encore beaucoup d'autres; tant la pente de l'esprit humain pour l'erreur est inconcevable. Luther, qui ne croyoit point au Purgatoire, admettoit les Revenans & les Démons dans son Système; il soutint même que Satan lui apparut à Wittemberg, & qu'il l'exorcisa en lui jettant un Cornet d'encre à la tête. Il n'y avoit alors presque aucune Nation qui ne fut imbuë de pareils préjugés. La Cour, & à plus forte raison le peuple, avoient l'esprit rempli de Sortilèges, de Divinations, de Revenans & de Démons. En 1553. deux vieilles femmes passèrent par l'épreuve du feu pour se purger de l'accusation de sorcellerie. La Cour avoit son Astrologue. L'un prédit à la naissance de Jean Sigismond, que ce Prince seroit heureux, à cause qu'au

même tems on avoit découvert au Ciel une Etoile nouvelle dans la Constellation de Cassiopée. L'Astrologue n'avoit pas prédit cependant, que Jean Sigismond se feroit Reformé, pour gagner les Hollandois, dont les secours lui devinrent utiles dans la poursuite de ses droits sur le Duché de Cleves.

Depuis que le Schisme de Luther séparoit l'Eglise, les Papes & les Empereurs firent toutes sortes d'efforts pour amener les esprits à la réunion. Les Théologiens des deux partis tinrent des Conférences, tantôt à Thorn, tantôt à Augsbourg. On agitoit les matieres de Religion à toutes les Diètes de l'Empire, mais toutes ces tentatives furent inutiles. Il s'ensuivit enfin une Guerre cruelle & sanglante, qui s'appaisa & se ranima à différentes reprises. L'ambition des Empereurs qui vouloient opprimer la Liberté des Princes & la Conscience des Peuples, l'alluma souvent. Mais la rivalité de la France & l'ambition de Gustave Adolphe, Roi de Suède, sauverent l'Allemagne & la Religion du Despotisme de la maison d'Autriche.

Les Electeurs de Brandebourg se conduisirent dans ces troubles avec sagesse. Ils furent modérés & tolerans. Frédéric Guillaume, qui avoit acquis par la paix de Westphalie des Provinces qui lui donnoient des sujets Catholiques, ne les persécuta point; il permit même à quelques familles Juives de s'établir dans ses Etats, & leur accorda des Synagogues.

Frédéric I. fit quelque fois fermer les Eglises Catholiques, par représailles des persécutions que l'Electeur Palatin fit souffrir à ses Sujets Protestans; mais le libre exercice de Religion fut toujours rendu aux Catholiques. Les Reformés essayèrent de persécuter les Luthériens dans le Brandebourg. Ils profiterent des dispositions où le Roi étoit en leur faveur, pour établir des Prêtres Reformés dans des Villages où il y en avoit eu de Lutheriens. Ce qui prouve bien que la Religion ne détruit pas les passions dans les hommes, & que les Genes d'Eglise, de quelque opinion qu'ils soyent, sont toujours prêts à opprimer leurs adversaires, quand ils se croient les plus forts.

Il est honteux à l'esprit humain d'avouër qu'au commencement d'un Siècle aussi éclairé que l'est le XVIII. toutes sortes de superstitions ridicules se soient encore conservées. Les gens raisonnables, comme les esprits foibles, croient encore aux Revenans. Je ne sais quelle tradition populaire portoit qu'un spectre blanc se faisoit voir à Berlin, toutes les fois qu'une Prince de la Maison devoit mourir. Le feu Roi fit saisir & punir un malheureux qui avoit joué le Revenant ; les esprits rebutés d'une aussi mauvaise réception ne se montrèrent plus, & le Public fut désabusé.

En 1708. une femme qui avoit le malheur d'être vieille, fut brûlée comme sorcière. Ces suites barbares de l'ignorance affectèrent vivement Thomasius, savant Professeur de Halle ; il couvrit de ridicule les Juges & les procès de forcellerie, il soutint des Theses publiques sur les causes physiques & naturelles des choses, & déclama si fort qu'on eut honte de continuer l'usage de ces procès : & depuis lui le Sexe put vieillir & mourir en paix.

De tous les Savans qui ont illustré l'Allemagne, Leibnitz & Thomasius rendirent les plus grands services à l'esprit humain, ils enseignèrent les routes par lesquelles la Raison doit se conduire pour parvenir à la vérité. Ils combattirent les préjugés de toute espece, ils en appellerent dans tous leurs Ouvrages à l'analogie, & à l'expérience, qui sont les deux Béquilles avec lesquelles nous nous traînons dans la carrière du raisonnement, & ils firent nombre de Disciples.

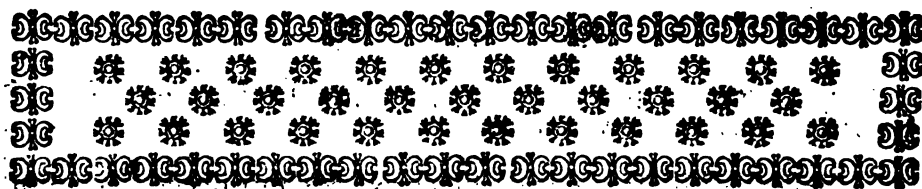
Les Réformés devinrent plus pacifiques sous le Règne de Frédéric Guillaume, & les querelles de Religion cessèrent. Les Luthériens profiterent de ce calme. Francke, Ministre de leur parti, établit par son industrie un College à Halle, où se formoient de jeunes Theologiens, & dont sortirent dans la suite des essains de Prêtres, qui formerent une Secte de Luthériens rigides, auxquels il ne manquoit que le Tombeau de Paris, & un Abbé Bécherand, pour gambader dessus. Ce sont des Jansenistes Protestans, qui se distinguent des autres par leurs rigidités mystiques. Depuis parurent toutes sortes de Quakers, les Zinzendorffiens, les Hychiliens, Sectes plus ridicules les unes

La Com-unes que les autres, qui, outrant les principes de la primitive Eglise,
munauté des tomberent dans des abus criminels.
Biens, & l'é-
galité des
Conditions.

On dit même Toutes ces Sectes vivent ici en paix, & contribuent également
qu'ils usent au bonheur de l'Etat, il n'y a aucune Religion qui sur le sujet de la
également Morale s'écarte beaucoup des autres; ainsi elles peuvent être toutes
des femmes égales au Gouvernement, qui conséquemment laisse à un chacun la
dans leurs liberté d'aller au Ciel par quel chemin il lui plaît. Qu'il soit bon Ci-
Assemblée. toyen, c'est tout ce qu'on lui demande.

Le faux zèle est un Tyran qui dépeuple les Provinces. La To-
lérance est une tendre Mère qui les rend florissantes.





DISSERTATION
SUR L'ILE DE LA D'ESSE HERTHAM,
QU'ERDAMME, ET SUR LES ADORATEURS DE
CETTE DIVINITE'.

PAR M. ELSNER.

Traduit du Latin.



Nous avons vu dans un Mémoire précédent, * quelle étoit cette *Hertbn*, la plus ancienne & la principale Déesse des Germains, décrite par Tacite; & nous avons donné un Commentaire étendu sur le passage de cet Auteur qui en parle, dans lequel nous avons expliqué tout l'appareil & toute la pompe des Cérémonies sacrées de cette Divinité.

Cet examen nous a fait voir en même tems, que Tacite n'a usé, à l'égard de cette Déesse & de son culte, d'aucune fiction accommodée à celles des Grecs ou des Romains, comme le prétend le célèbre Mr. *Mascow*, dans sa belle *Histoire des anciens Germains*. Nous avons vu clairement au contraire, que tout le culte que Tacite attribue aux Germains est l'ouvrage de la raison & de la nature, ou du moins qu'il a plutôt été emprunté des Orientaux & des Hebreux, une Tradition très ancienne l'ayant transmis à la posterité la plus reculée.

Memoires de l'Academie Tom. IV.

Kk k

Pour

* Voy. An.
née 1747. p.
446. & suiv.

Pour continuer à présent ce sujet, nous allons d'abord rechercher, quelle est cette Ile célèbre par l'ancien culte rendu à *Hertha*, & sur laquelle les opinions des Savans ont été extrêmement partagées.

C'est, dit Tacite, une Ile de l'Océan, où se trouve un bois sacré, dans lequel ils adorent en commun *Hersbam*, *Erdamm*, ou la Terre Mère. Cette manière si succinte de désigner ce lieu est également obscure & incertaine; & c'est ce qui a fourni un si vaste champ aux conjectures des Savans.

Il y a trois opinions principales sur cette Ile de l'Océan, où se trouvoit le bois sacré, dans lequel Tacite place la demeure & le Temple de la Déesse *Erdamme*. La première entend par là une Ile de l'Océan Septentrional, ou Germanique, dit vulgairement *Nord-See*, située à l'embouchure de l'Elbe, & connue sous le nom d'*Heiligeland*; la seconde se détermine pour l'Ile de *Rügen*, adjacente à la Pomeranie Septentrionale, & la troisième pour l'Ile de Zelande, où est la Capitale du Royaume de Danemarck. Commençons par les deux dernières, pour revenir en suite à la première.

Il n'y a pas longtems que M. *Albert George Schwartz*, Savant très versé dans l'Histoire de sa Patrie, a cru devoir donner la préférence à l'Ile de *Rügen*, & en a allégué les raisons dans un de ses Ouvrages. (*) Il prétend, que c'est dans cette Ile, & spécialement dans la Peninsule, nommée *Fasmund*, qu'est ce bois sacré, qui couvre tout son promontoire dans l'étendue d'une mille; qu'on apperçoit au milieu un rempart d'une hauteur immense, où existent de vastes débris, qui sont les masures du Temple de la Déesse *Hertha*; qu'à côté se trouve un grand lac, d'une extrême profondeur, qu'on nomme *noir*, à cause des poissons noirs qu'il renferme, & que les habitans vénèrent encore par une ancienne superstition; que du Temple il y a un chemin qui mène à ce lac, qui étoit le bain de la Déesse, & où l'on noyoit les esclaves: enfin qu'on rencontre aux environs divers chemins, qui vont aboutir à un Autel très éloigné, d'où il paroît qu'on amenoit la Déesse au Temple & au Lac. Voilà les fonde-

(*) Il est intitulé: *Brevi Introductio in Geographiam borealis Germaniæ*. 1745. Voyez la page 88.

demens sur lesquels M. Schwartz appuie son sentiment, & qui lui font regarder l'Île de Rügen, comme le lieu, auquel appartient préféablement à tous les autres, la gloire d'avoir été le domicile de la Déesse *Hersbam*.

Quelque attention que nous ayons apporté à l'exposition de ces preuves, nous ne sommes pas assez pénétrants pour découvrir la demeure de la Déesse dans cet endroit, plutôt que dans un grand nombre d'autres, auxquels les mêmes caractères conviennent. S'il suffit de rencontrer un bois, un grand lac, & quelques débris, avec un sentier, pour avoir trouvé le Temple de notre Divinité, il n'y aura presque point d'Île, où nous ne fassions cette découverte; & je ne doute point qu'on n'appergut les mêmes indices dans toutes les autres qui sont situées sur la côte de Poméranie. On fait que rien n'est plus commun, que de pareilles situations, surtout dans les lieux incultes; & par conséquent cela ne peut nous conduire à rien de certain sur le séjour de la Déesse.

Après cela je ne vois pas ce qui empêcheroit, qu'il n'y eut dans l'Île de Rügen quelque monument sacré plus récent, d'un Dieu, ou d'une Déesse des Slaves, qui ont occupé ces contrées au sixième siècle. Ce peut même être quelque Château, qui servoit de retraite à des brigands, à des Pirates. D'ailleurs les rochers, ou cailloux, qu'il prend pour des mafures du Temple, annoncent un édifice sacré d'une moindre antiquité. Les Temples des anciens Germains, dont parle Tacite, n'étoient point faits de semblables matériaux, & n'avoient point une si vaste enceinte; c'étoit un *bocage*, ou *bois sacré*, comme le passage que nous expliquons, & tant d'autres du même Auteur en font foi; on plaçoit quelque fois une Tente au milieu, & on l'environnoit de simples Cabanes, à l'usage de la Déesse & de ses Prêtres, suivant la coutume des Germains. Le mot de *nemus* ne convient point pour désigner une forêt horrible, & d'une aussi grande étendue que celle de l'Île de Rügen; ce terme réveille une idée d'agrément, plutôt que de grandeur.

Les expressions mêmes de Tacite sont fort contraires à la pensée de M. Schwartz. Il y a dans une Île de l'Océan un bois sacré. Il

ne peut entendre par là que l'Océan Septentrional, ou Germanique; qu'il désigne de même en plusieurs endroits de ce Livre. Il dit, par exemple, au Chap. I. *L'Océan environne tout le reste*, c'est à dire, l'Allemagne. Et d'abord après : *Le Rhin se mêle à l'Océan septentrional*. Au Chap. 37. il dit que *les Cimbres sont les plus proches de l'Océan*, & ailleurs. * Le même Tacite appelle cette Mer *l'Océan*, au Chap. 20. du second Livre de ses Annales; & on peut lui joindre *Ptolomée*, qui

* Liv. II. c. II. employe le nom d'*Océan Germanique*, * aussi bien que *Marcien & Hé-*

† p. 49 & 51. *rachée* dans son *Periple*. †
dans les *Geogr.*
Minor. de
Hudfon.

Or l'Île de *Rügen* est située sur la Mer Orientale, qu'on nomme aujourd'hui *Baltique*. Elle est adjacente, & presque adhérente à la Pomeranie, en sorte qu'elle paroît lui avoir été autrefois jointe; & par conséquent n'avoir pas été une Île. C'est en vain que notre Savant se retranche sur ce que la Mer Baltique a aussi porté le nom d'Océan, & que Tacite l'appelle ainsi dans ses Chapitres 43 & 44 des *Mœurs des Germains*. Car au Chap. 43 il s'exprime ainsi : *Protinus deinde ab Oceano Rugi*; ce qui ne favorise point l'idée de M. Schwartz; Tacite écarte au contraire les Rugiens de l'Océan, & les considérant des Pais Bas, il les sépare entièrement, *protinus*, c'est à dire, en suivant la route à droite par devant, de l'Océan Germanique.

De plus les Rugiens ont autrefois habité, non seulement l'Île qui porte leur nom, mais encore une partie du Duché de Mecklembourg, & de la Pomeranie Citérieure, comme notre savant Auteur l'a fait voir lui même, p. 8. Ainsi ils s'approchoient davantage de cet Océan, comme Tacite l'a fort bien dit.

Quant au passage du Chapitre 44. Tacite y met *les Villes des Suédois dans l'Océan même*. Il s'agit de la Scandinavie, que l'Océan Germanique & Septentrional baigne effectivement. Ainsi dans le passage même, qui fait le sujet de nos discussions, il ne peut avoir entendu par une *Île de l'Océan*, qu'une Île qui ait été effectivement située dans cet Océan.

La seconde opinion place le Sanctuaire d'*Hertbam* dans l'Île de *Sélande*, ou *Sialand*, en Dannemarc, où est, comme nous l'avons dit, la Capitale de ce Royaume. On peut regarder comme auteur de ce senti-

sentiment *Eriente Jean Stephanus*, autre fois Professeur célèbre dans l'Academie de *Sorø* en Dannemarc. Il l'a proposé dans ses Notes sur *Saxon le Grammairien*, où p. 74. il a mis la peinture de *Letbra*, la plus ancienne résidence des Rois de Dannemarc, & Château très fort avec la Vallée de la Déesse *Hertbam*, vulgairement dite *Ertevall*. *Resenius* a même ajouté le passage de Tacite dans son *Atlas de Dannemarc*, dont la plus grande partie des Exemplaires fut consumée dans le terrible incendie de Copenhague.

Enfin la même chose se trouve développée avec étendue, dans le bel Ouvrage de M. *Jean Pierre Ancherfen*, Professeur de Copenhague, intitulé *Origines Danica*. Dès l'entrée de la première Partie, il revendique la Déesse *Hertham* à la *Selande*, ou *Sialand*, il fait envisager ce sentiment comme étant hors de toute contestation, & il y bâtit même l'édifice de ses Origines Danoises.

Je suis cependant si éloigné de trouver de la certitude dans tout cela, que je n'y vois pas même un degré considérable de vraisemblance. Il s'agit de la *Vallée d'Ertevall* ; & Tacite ne parle d'aucune Vallée, il n'indique qu'un *bois sacré*. Ce n'est point non plus une chose indubitable qu'*Erte* denote ici la Déesse *Hertbam* : ce peut être aussi bien toute autre chose, par exemple, le nom d'un Cerf qu'on appelle *Ert*, (*) ou *Hert*, ou bien celui de quelque Seigneur, ou Dame, qui ont autre fois possédé cette contrée, suivant l'usage très fréquent de donner aux Terres & biens de campagne des noms composés de celui des Vallées où ils sont situés, & de celui de leurs Maîtres. C'est ainsi que nous avons dans la Marche *Joachimsthal*, Terre autrefois de l'Electeur *Joachim*, dont on pourroit faire tout aussi aisément une vallée d'*Hertha*, puisqu'on y trouve en effet une vallée, une montagne assez élevée, une forêt très ancienne, un lac, des sentiers, &c. C'est la seule affinité du mot *Erte* avec *Hertba*, qui a déterminé ces ingénieux Auteurs à penser à la Déesse, dont parle Ta-

Kkk 3

cite ;

(*) Il y aussi dans le Golfe Baltique une Ile Danoise, nommée *Ertholm*, qui a tiré ce nom des Cerfs & de leur chasse, de même qu'un Château celebre, & Maison de plaisance, dite *Hirschholm*, ou colline des Cerfs. Il a pu en être de même de la vallée d'*Ertevall*.

cîte ; tout comme dans nos contrées on s'amuse à faire venir le nom de *Reimberg* de *Remus*, Frere de *Romulus* ; celui d'*Aremberg* des Aigles Romaines, celui du *Stendal* de la base d'un trophée, celui de *Tristedt*, ou *Drustedt*, de *Drusus*. Ce sont des jeux d'esprit, mais il ne faut pas y chercher la verité.

Si pourtant, par un effet de cette liberalité ordinaire aux Savans, nous voulions accorder que cette vallée voisine de *Lethra* a tiré son nom de la Déesse *Hertha*, cela peut être venu de quelque ressemblance avec ce bois sacré, parce qu'on a eu coutume d'appeller les lieux agréables & élevés, *vallées* & *montagnes* de quelque Dieu, ou Déesse. C'est ainsi qu'on trouve aujourd'hui par tout des *Vallées de Marie*, des *Monts de Marie*, des *Bois* & des *Lacs de Marie*, &c.

Enfin, quand même la Déesse *Hertham* auroit eu effectivement un lieu sacré à *Lethra*, il ne seroit pas nécessaire que ce fut ce Sanctuaire commun des Nations dont parle Tacite ; cette Divinité ayant pu être adorée en plusieurs lieux, surtout dans les derniers tems en conservant néanmoins sa premiere demeure, & son séjour le plus auguste dans une autre Ile ; comme nous trouvons dans les Auteurs qu'il y avoit plusieurs Temples de la Diane d'*Ephese*, ailleurs qu'à *Ephese*. Aussi *M. Schwartz* reconnoit-il en termes formels, dans l'endroit déjà cité, qu'on a rendu aussi un culte à *Hertha* dans d'autres lieux.

Tacite n'est pas moins contraire à *M. Auchersfen* qu'à *M. Schwartz*, en ce qu'il met le Sanctuaire de la Terre Mere dans une Ile de l'Océan. Personne assurément n'appellera jamais la *Selunde* une Ile de l'Océan puisqu'elle est située dans la Mer Baltique, & même à son embouchure, & qu'elle est séparée par de petits détroits de diverses Iles voisines, & de la Scandie. *M. Auchersfen* veut à la verité que ce soient ces détroits que Tacite appelle des *fleuves* ; mais l'*omponius* Mela les nomme expressement *aquas inserfluentes*, & *freta*. * Qui est-ce, je vous prie, qui pourroit dire d'une semblable Ile, située dans l'Archipel Danois, comme l'appelle notre Savant, que c'est une Ile de l'Océan. Sans contredit les mots de Mer, ou Golfe Baltique, d'Archipel, & d'Océan, sont tout à fait differens, sur tout pour Tacite dans ce Livre, où il entend

entend constamment par *Océan*, l'*Océan Septentrional & Germanique*. Nous ne croyons donc pas pouvoir adopter cette opinion, quoique nous laissons à ses Auteurs & à ses défenseurs la gloire de l'avoir soutenue avec beaucoup d'esprit & de savoir.

Le troisième sentiment, que nous avons indiqué le premier, donne & assigne à la Déesse *Hersbam* une Ile de l'*Océan Germanique*, située vers l'embouchure de l'*Elbe*, & vulgairement nommée *Heiligland, Hilligland, & Helgeland*. Cette Ile est située dans la Mer, à six milles de l'*Elbe*, & à pareille distance du Duché de *Sleswick*. Elle a été autre fois beaucoup plus grande qu'elle ne le paroît aujourd'hui; les flots de l'*Océan* en ont couvert la plus grande partie, de sorte que quand le vent d'Orient les repousse avec véhémence, il re paroît plus d'un mille d'étendue de terrain. Elle passe aussi pour avoir été fort célèbre par un Temple de *Vesta*, dite en langage vulgaire *Fosta*, qui s'y trouvoit avant l'Ere Chrétienne. On la nommoit encore *Farrin*, ou plutôt *Pbaria*, à cause de sa ressemblance avec l'Ile si connue de *Pbaros* en Egypte, ayant comme elle, sur une de ses Montagnes, *Bredeberg*, un fanal destiné à guider les navigateurs. Enfin la Tradition porte qu'elle a servi de retraite à *Radbod*, Roi des Frisiens, qui aima mieux suivre ses Ancêtres dans la route de l'erreur, que de recevoir le S. Batême, & embrasser le Christianisme. * Divers Auteurs ont cru que c'étoit cette Ile qu'indique notre passage de Tacite; tels sont *Pontanus*, † *Petrus Saxius*, * & d'autres. Tout bien pesé, ce sentiment me paroît préférable aux autres, & je vais l'appuyer sur de nouvelles preuves.

L'Ile d'*Heiligland* a de la manière la plus sensible tous les caractères fournis par Tacite. C'est une Ile de cet *Océan Germanique, & Septentrional*, que cet Auteur a coutume de nommer l'*Océan*. Elle est en pleine Mer, & à six milles du Continent. Cet *Océan* étoit connu dès ce tems-là des Romains; on y avoit vu les flottes de *Tibère* & de *Drusus*, comme le témoignent Tacite, *Velleius Paterculus*, *Suetone*, & d'autres Auteurs. Au contraire, dans ce même tems, les flottes Romaines ne s'étoient pas avancées au delà du Promontoire *Cimbrique*, & par conséquent ne pouvoient avoir fait la découverte

* Voy. *Dankwerth*
Deser *Sleswick*
p. 151.
† Dans ses *Origines Daniae*.

* Dans son Livre de *principiis rebus gestis Frisiorum Septentrionalium*, qui a été inséré dans les *Monumenta Cimbrica* de l'illustre M. de *Westphal*, Tom. I. p. 1343

embouchure de la Mer Baltique, ou de l'île
au Continent de Pomeranie.
dans l'Océan, étoit regardée comme une
non seulement parce que ce morceau
au milieu du vaste Océan, paroît
admirable, mais aussi qu'on le jugeoit un domi-
à la Déesse Hartham, Epouse de l'Océan.
par une Tradition de l'Antiquité la plus recu-
trent leur origine de l'Océan & de Tethys.
& il le tenoit d'*Homere*, cette source de tou-
Déesse dépose la même chose, & célèbre l'Océan
Mère des Dieux. † *Platon* repete cette idée dans son
le Philosophe *Crates* l'inculque dans *Plutarque*.
à *Ovide* ; †

*Ad canam descendit in æquora Tethyn
Æthæaque senem, quorum reverentia movit
Sæpe Deos.*

même *Tethys* se prend pour l'Océan, suivant la remar-
* Cette même *Tethys* étoit la Terre, *τῆθη*, Nour-
des mortels, encore suivant les observations d'*Eusla-*
des *Scoliaſtes*, sur le même passage d'*Homere*. Ainsi la
ou *Erdamme*, étoit parfaitement la même que *Te-*
on appelloit *Terre*, comme l'a fait voir au long l'ingenieux
Walbeck, que j'ai cité dans mon Mémoire précédent. C'est
cela que cette Ile, sortant des flots de l'Océan, parut merveil-
lément propre à être la demeure de la Terre Mère, à cause de sa
situation singulière, qui faisoit que l'Océan l'embrassoit plus étroite-
ment, & de la même manière qu'il ceint & embrasse toute la Terre ;
doctrine déjà admirée dans *Homere* par *Hipparque*, comme *Strabon*
le rapporte au commencement de son Livre, en y joignant son pro-
pre suffrage.

D'abord, cette Ile se trouve dans cet Océan qu'on découvre du
Rhin, où *Tacite* étoit placé ; car ces Iles opposées aux Pais Bas, & à
la Frise, que nous appellons Orientale, n'étoient pas encore détachées
du

du Continent, & actuellement même elles en sont si proches qu'elles ne méritent pas le nom d'Iles de l'Océan. Ce ne peut donc être que cette première Ile que Tacite a eu en vue, & il n'est nullement vraisemblable que laissant là la principale Ile de l'Océan Germanique, il ait été chercher des Iles qui en sont séparées par un aussi grand intervalle, savoir celles de Danemarck, ou de Rügen, qui placées dans l'enceinte étroite du Golfe Baltique, & tout environnées des Terres voisines, ne sont, ni ne peuvent être appelées des *Iles de l'Océan*.

L'Ile d'*Heiligland* satisfait également à tous les autres caractères indiqués par Tacite. *Petrus Saxius* rapporte * qu'on y voit encore un bois ; & quand il ne s'y rencontreroit pas, personne n'auroit lieu de s'étonner qu'il ait disparu d'une Ile si souvent ravagée par les incursions des Ennemis, & en grande partie submergée sous les flots de l'Océan. * Dans l'en-
droit déjà
cité.

Adam de Breme rapporte que cette Ile est toute bordée de rochers & d'écueils, & qu'il n'y a qu'un seul endroit accessible : bienfait de la nature, qui la met à l'abri des Ennemis. De là vient que *Radbod* l'avoit choisie pour en faire sa retraite, & y avoit outre cela bâti une forteresse sur une fort haute montagne.

Une Ile revêtuë de tous ces avantages méritoit bien d'être le Sanctuaire de la principale Déesse des Germains. C'étoit en effet une coutume religieuse très ancienne de placer les simulacres & les Temples des Dieux dans des lieux élevés, & fortifiés par la Nature, ou par l'Art. Quoique les Perses, aussi bien que les anciens Germains, détestassent les Edifices, & les Temples, destinés à renfermer les Dieux ; cependant ils avoient coutume d'offrir des victimes sur des montagnes très élevées, où ils croyoient que les Dieux faisoient leur demeure, comme on en trouve des témoignages très abondans dans *Herodote*, & dans *Xenophon*. Il s'étoit aussi introduit une très ancienne superstition parmi le peuple d'Israël, c'étoit celle de sacrifier sur les hauts lieux ; & elle y avoit jetté de si profondes racines, que les ordres de Dieu les plus exprés, & les plus fréquemment réitérés, ne purent l'extirper. C'est par la même raison qu'une vieille opinion a assigné les lieux élevés pour demeure aux Dieux, comme moins assujettis à l'usage com-

mûn, & plus inaccessibles. De là vient enfin que les domiciles des Dieux étoient autant de bonnes forteresses, également propres à écarter les profanes & les ennemis, & qui laissoient à peine un passage fort étroit aux adorateurs.

Le Capitole, ce Temple si magnifique de Jupiter, & de toutes les autres Divinités des Romains, & qui étoit comme un autre Ciel, placé au sommet de la haute roche Tarpeïenne, étoit un vrai Fort, inexpugnable même à de grandes armées, au jugement de notre pro-

* Tacit. Hist. pre Auteur. *

Lib. III. c. 78.

Il en étoit de même de l'Oracle de Delphes, qui étoit autrefois celui de la Terre Mère, comme le témoigne *Pausanias*. † Il étoit placé dans la partie la plus haute de la Ville, qui alloit de tous côtés en pente roide & ceinte de rochers, de sorte qu'on pouvoit difficilement arriver à ce lieu, & le forcer, comme les Gaulois, sous la condui-

te de Brennus, l'éprouverent à leur dommage. *

* Tacit. Hist. 3. p. 818. &

cap. 23. p. 853.

Le *Palladium*, ce gage de l'Empire & du Salut de Troye, dont la vue étoit interdite aux mortels, aussi bien que celle de la Déesse *Hertbam*, se conservoit dans la Citadelle, d'où les Grecs l'enlevèrent par un crime atroce, que Virgile déteste ainsi ; †

† Æneid. Lib. II. v. 162.

*Omnis spes Danaum Et coepti fiducia belli
Palladis auxiliis semper stetit : impius ex quo
Tydides, sed enim scelerumque inventor Ulysses,
Fatale aggressi sacras avellere templo,
Palladium caesis summae custodibus arcis.*

A' Athenes, Minerve, Déesse tutelaire de la Ville, residoit à l'*Acropole*, qui étoit le lieu le plus élevé, auquel on n'arrivoit que par une seule avenue, bordée de toutes parts de rochers escarpés, & ceinte d'un fort mur. *

* Pausan.

Att. c. 22. p. 51.

Enfin *Velleda*, cette Prophetesse si célèbre des Germains, qui tenu le rang de Déesse, demouroit dans une tour, ou au haut d'un roche escarpé, comme Tacite nous l'apprend. En général la Terre Mère passoit pour aimer les pierres & les rochers ; c'étoit ses enfans & ses os, suivant l'expression d'*Ovide*. †

† Metam.

Lib. I. v. 383.

Offe.

Offaque post tergum magna jactate parentis,
un peu plus bas, *

v. 397

Magna parens terra est : lapides in corpore terræ
Offa rear dici.

e là vient ce que Pausanias rapporte, que sa Statuë & son Thrône oient faits de pierre. Et n'avons-nous pas même vu dans le Mémoire précédent, que la Mère des Dieux passoit pour être née d'un and rocher, sur lequel on avoit placé sa Statuë?

On avoit aussi consacré les lieux les plus élevés aux Dieux, & tout aux Divinités tutélaires, comme à la Minerve d'Athenes, à Apollon de Delphes, afin que ces Divinités pussent étendre leurs regards, veiller à la conservation de leurs adorateurs, & repousser les maux qui pourroient les menacer. Les Dieux tutélaires portoient à luse de cela les noms d'Επόψιοι, Σκοποὶ & Επίσκοποι, comme tant les yeux percans, & se tenant toujours à portée de secourir. l. de Spanheim a expliqué tout cela avec étendue dans ses Notes sur *allimaque*. †

† In Hym-
num ad Jove-
nem v. 82.

Ainsi l'île d'*Heiligland*, qui étoit toute bordée d'ecueils, & où trouvoit une très haute Montagne, étoit une très digne demeure, n Sanctuaire très convenable, de la Terre Mère, Déesse gardienne & tutelaire, un lieu d'où elle pouvoit également exclurre les profanes & ses ennemis, & veiller en même tems de toutes parts sur ceux qu'elle protégeoit. On peut joindre à cela cette Tradition qui porte que ans des tems moins éloignés, mais encore antérieurs au Christianisme, y a eu dans cette île un Temple de Vesta, dont la prononciation arbare de Frisiens avoit changé le nom en celui de *Fosta*. Or Vesta étoit la même que la Terre Mère, ayant comme elle pour symbole un pyer construit de terre, où bruloit le feu qui lui étoit consacré; d'où vient encore le mot Allemand *Herd*, foyer, d'*Erde*, la terre, comme tant fait de terre, comme nous l'avons déjà remarqué dans notre premier Mémoire. Pour la Déesse *Erdamm*, elle paroît avoir reçu le nom de Vesta, depuis que les Germains eurent appris que la Vesta des Romains étoit la même que leur Terre Mère; car alors, afin de ne pas



paroître inférieurs aux Romains, & de pouvoir se vanter qu'ils adoroient la même Divinité, ils ajoutèrent le nom de Vesta au premier, ou l'y substituerent tout à fait. De cette manière le lieu que les Germains avoient d'abord appelé la demeure d'*Hertbam*, & veneré en cette qualité, devint dans la suite celle de Vesta.

Une nouvelle & considérable preuve de notre assertion se tire du nom de l'Ile, que les Germains, dès les tems les plus reculés, ont nommé *Heiligland*, *Hilligland*, & *Helgeland*; indice frappant que cette Ile de l'Océan avoit été spécialement & solennellement consacrée au culte de la Déesse *Hertbam*. *Heiligland* veut dire, *Terre, ou Contrée sainte*, sans doute à cause de la demeure de cette grande Divinité, & du bois sacré qu'elle y avoit. De semblables contrées, célèbres par le domicile de quelques Dieux, ou Déeses, ont toujours porté le nom de saintes, *ιεραί*. La Ville seule d'Athenes n'étoit pas sainte, à cause du séjour de Minerve, cela s'étendoit à toute l'Attique; (*) & Aristophane l'appelle *ιερωτάτη χώρα*. * De même Diane par sa présence rendoit sacrée & inviolable la Ville d'Ephese, & tout son territoire. Delos par une semblable raison étoit dite *ιερά & αγιώτατη*, comme l'a prouvé M. de *Spanheim*, dans ses Remarques sur le commencement de l'Hymne de *Callimaque* sur Delos.

* In *Equi*.
v. 578.

† *Diod. Si*.
L. III. p.
Edit. nov.

C'est surtout à cause de cela que le nom de *sacrée* a été donné d'une façon singulière à l'Ile de *Samothrace*, où la Mere des Dieux se plaçoit, y ayant placé ses fils les Corybantes, & dans laquelle on lui avoit consacré des Autels, & un bois, *τεμένος*, sacré & inviolable. † Tout cela fait assez voir qu'en vertu de cette ancienne & constante superstition, cette Ile a reçu à bon droit des Germains le nom d'*Heiligland*, à cause du séjour qu'y faisoit la Déesse *Erdamme*, laquelle étoit réputée la même que la Mere des Dieux, & résidoit dans ce bois sacré, d'où elle protégeoit ces anciens Germains, qui étoient nés d'elle, & les habitans des environs.

Le

(*) *Ιερά μὲν τῆς Ἀθηνᾶς ἐστὶν ἢ τε ἄλλη πόλις, καὶ ἡ πᾶσα ὁμοίως γῆ.*
Pausan. L. I. c. 26. p. 63.

Le nom de cette Ile prononcé d'une autre maniere, nous découvre encore plus évidemment celle dont Tacite a voulu parler. On a pu dire *Heiligland*, & il paroît que c'est ainsi qu'ont prononcé ces anciens Peuples Septentrionaux. D'abord cependant on disoit *Heilig*, *Hilig*, ou *Helgo-lund*, mais dans la suite le mot *lands* étant introduit, & la coutume étant venue de l'ajouter au nom de plusieurs contrées, on a changé *lund*, en *land* (*). Or dans les Langues Septentrionales un *bois*, une *forêt*, se nomment *Lund*, *Lundur*, comme on le trouve aussi dans le *Lexicon Islandique d'Hickefus*, que contient le *Thesaurus Septentrionalis*. La même signification a encore lieu en Suede & en Dannemarc. *Jean Loccenius* rapporte * ces paroles tirées des plus anciennes Loix : *Engin skal å lunda euer steena tro*, c'est à dire, *personne ne doit se fier à un bois ou à un rocher*. C'est de cette ancienne langue qu'est resté un mot, dont nous nous servons encore, *Hollunder*, de *Hol* & *lund*, ou *lunder*, un *arbre*, ou *bois creux*. On dit aussi *bois* pour *forêt*; les Germains & les Hollandois appellent une forêt, *das Holz*, *Hes Hous*. Le Dictionnaire de notre défunt Confrère *Frisch* nomme *Lunden* une sorte particuliere de bois. *Hiliglund* seroit donc le bois consacré à la Déesse; & les Peuples Septentrionaux ont plusieurs bois semblables, qu'ils appelloient *Hilgolundar*, ou *Lundur*. Le bois consacré à Odin auprès d'Upsal, portoit le nom d'*Odenslund*, au rapport de *Loccenius*. † Si donc notre Ile a été consacrée par les Nations Septentrionales à la Déesse, dont ils prétendoient tirer leur origine, ils auront nommé cette Ile dans leur Dialecte accoutumée *Hilgolund*; nom que Tacite nous a rendu avec la dernière exactitude par *castum nemus*, & l'Ile de la Déesse *Erdamme*, située dans l'Océan, & dite *Hilgolunde*, s'est conservée assez heureusement jusqu'à nos jours.

* *Antiq.*
Sueo-Gothic.
L. I. c. 3 p. 10.

† L. c. p. 18.

Il s'agit présentement de parler des Peuples, qui rendoient un culte religieux à cette Divinité. Nous allons passer en revue ceux
LII 3 que

(*) De même l'Ile capitale du Dannemarc, *Sialand*, a été dite autrefois *Saelundur*, *bois de la mer*, suivant le témoignage de *Stephanus*, dans ses notes sur *Sax. Gramm.* p. 20.

que Tacite indique, & répandre autant de jour sur eux, que le permet une matiere aussi abstraite, & éloignée de tant de siècles des tems où nous vivons.

Tacite nomme sept peuples Sueves, adorateurs de la Déesse, & les range dans l'ordre suivant. „Après (les Lombards) viennent les „Reudigaiens, Avions, Anglois, Ovarins, Eudoses, Suardons, & „Nuithons, qui sont remparés par des forêts, ou par des fleuves. „Ceux-là n'ont rien de particulier, sinon qu'ils adorent la Terre, „comme nôtre Mère commune, qu'ils appellent *Hersbe*, & croient „qu'elle se promene par le Monde, & qu'elle se mêle des affaires des „hommes.“ (*). Voilà donc les noms des Peuples de la Germanie Septentrionale, issus, à ce qu'ils prétendoient, d'une origine commune; mais ces noms ont vieilli, on ne les connoit plus, la plupart ne se trouvent que dans Tacite, & n'existent même que dans ce passage. De plus, la négligence des Copistes, & les fautes qu'ils ont coutume de commettre, surtout à l'égard des mots étrangers, a défiguré ces noms, au point que les plus savans Interprètes, partagés en mille opinions toutes différentes, n'ont pu s'en démêler, & ont au contraire épaissi les ténèbres dont ce passage est enveloppé. Je vais essayer si je serai plus heureux à déterrer ces Peuples inconnus, & à les rendre reconnoissables par quelques caractères certains.

D'abord, il est évident que ce sont des Peuples de la Germanie Septentrionale que Tacite a ici en vûe, & en particulier ceux qui habitoient la côte maritime; puisque la Déesse tutelaire de la Nation résidoit dans une Ile de l'Océan Germanique Septentrional, comme nous l'avons vû ci-dessus. On ne sauroit avec raison trop éloigner de cette Ile d'*Helgeland*, ou *Helgelund*, des Peuples, qui dans certains tems marqués de l'année devoient venir y rendre un culte solennel à la Déesse, des peuples des affaires desquels la Déesse devoit se mê-

les,

(*) *Reudigni deinde, & Aviones, & Angli, & Varini, & Eudoses, & Suardones, & Nuithones, fluminibus aut silvis muniuntur. Nec quicquam notabile in singulis, nisi quod in commune Herthum, id est, Terram matrem colunt, eamque intervenire rebus hominum, in rebus populis arbitrantur.*



ler, & parmi lesquels elle se promenoit, suivant les expressions de Tacite. C'est donc dans le voisinage de la Déesse qu'il faut chercher les adorateurs, ceux qui vivoient sous sa garde & sa protection, la révéranr comme leur Mère & le principe de leur origine.

Ensuite, Tacite place ces Peuples *après les Lombards*, qui occupoient les régions intérieures de la Germanie sur l'Elbe, & dit au Chap. XII. qu'ils s'étendoient encore plus avant dans le fond de la Germanie, *qui in secretiora Germania porrigitur*. Or il faut toujours se souvenir que c'est des Pays-Bas que Tacite regardoit la Germanie, & chercher par conséquent ces Peuples autour de l'embouchure de l'Elbe, où la Germanie va en quelque sorte en s'enfonçant, dans le Duché de Brême, dont la partie postérieure confine à l'Elbe, dans les Duchés de *Holstein* & de *Sleswick*, & dans le *Futland*. Je pense au moins que c'est ainsi qu'en jugeront tous ceux qui examineront la chose d'une manière attentive & impartiale. Je vais donc, en suivant Tacite, passer à l'examen des Noms de ces Peuples, & de leurs demeures.

A la tête se présentent les REUDIGNIENS, ou comme d'autres lisent, les *Reudigiens*, les *Redigniens*, & ils tiennent aussi le premier rang en fait d'obscurité. Cluvier * & Bucherius † entendent par là les *Thuringiens*, ou *Deuringiens*, mais cette conjecture n'est appuyée sur rien ; car non seulement il y a une grande différence entre *Reudigniens*, & *Thuringiens*, (pour *Deuringiens*, personne ne se sert de ce nom,) mais il est aussi constant que les *Thuringiens* occupoient la partie intérieure de la Germanie Australe ; au lieu que les *Reudigniens* doivent se trouver sur les bords de la Germanie Septentrionale, & que Tacite les place dans le voisinage d'une Ile de l'Océan, & même à la gauche des Lombards. Le célèbre Leibnitz, si habile & si heureux dans la découverte des choses les plus cachées, avoué qu'il ne connoît point les *Reudigniens*.

M. Ancherfen * met les *Reudigniens* dans les Iles de Danemarck, qui portent le nom de *Lolland*, *Falster* & *Moen*, mais sans donner la moindre preuve qu'elles aient été autre fois habitées par un Peuple connu sous ce nom. Il ne fait cette supposition que pour

* Germ.
Ant. L. III. c.
27.
† Dans son
Belgium.

* Orig. Dan.
Part. I. p. 195.

soutenir

soutenir celle, par laquelle il donne l'Île de Sialand pour la demeure de la Déesse *Hertham* ; & comme nous avons déjà détruit celle-ci, il seroit superflu de nous arrêter à l'autre.

S'il n'y a pas une pleine évidence, il y a du moins une grande apparence de vérité dans l'idée où je suis, que les Reudigniëns sont les KEIDINSIENS, dont la contrée est dans le Duché de Breme, sur l'Elbe. C'est un Canton des plus anciens Saxons, dont les habitans s'appellent *Küdinger, Keding, Kaidinger, und Keidinger*. La grande ressemblance entre les Lettres K & R rend le changement de l'une en l'autre très facile. Soit donc qu'on lise dans Tacite *Keidigni, Keidingi*, ou *Kedingi*, cela s'accordera assez avec mon système. La situation de l'Île d'Helgeland, où étoit le Sanctuaire de la Déesse *Er-damme*, convient merveilleusement à ce peuple ; & peut-être même les Keidingiens étoient-ils venus du Holstein au lieu qu'ils habitoient, afin que les adorateurs de la Déesse occupassent l'une & l'autre rive de l'Elbe, dont le cours va aboutir à l'Île, où résidoit la Déesse.

Viennent ensuite dans Tacite les AVIONS, mot que Cluvier remarque * ne se trouver nulle part ailleurs, & qu'il conjecture, sans aucun fondement, devoir être le même que celui de *Cavions*, dont *Stramertinus* fait mention dans le Panegyrique de Maximien. M. *Ancherfen* † derive le nom des *Avions* de la *Fionie*, Île du Danemarck ; en quoi il suit *Althamer*. La dérivation paroît heureuse, quand on ne fait attention qu'au son des mots ; mais elle enlève aux *Avions* la Lettre A, qui en est la tête, & M. *Ancherfen* n'est si ardent à saisir cette idée, qu'à cause du voisinage entre la *Fionie*, & sa chère *Sialand*. Pour moi, jecrois qu'il faut tirer le nom d'*Avions* de la nature & des propriétés du pays que ce Peuple habitoit. Les Allemands appellent *Auen, Awer, Auer*, les vallées, les plaines arrosées de ruisseaux, qui en font des prairies fertiles, & ils donnent le même nom à leurs habitans. Les mots *Au* & *Auen*, sont surtout d'un usage extrêmement fréquent dans les Duchés de Holstein & de Sleswick, où on appelle ainsi & les fleuves, & les lieux qui les environnent, comme *Pinneberger au, Schodburger au, Coldinger au*, & quantité d'autres qu'on peut voir

voir dans *Dankwerth*. (*) Je mettrois donc les Avions dans les campagnes voisines de Hambourg, sur ce qu'on appelle les *quatre terres*, qui sont communes entre cette Ville & celle de Lubec, & qui s'étendent dans le Comté de Pinneberg jusqu'à l'Elbe. Les Avions peuvent avoir tiré leur nom de la nature de la contrée, *Auer*, à aussi bon droit que les *Brüsteres* de leurs marais, *Brücher*, & les *Marses* de leur terre grasse & marécageuse, *Marsch* & *Masch*. Le nom le plus ancien de cette région unie, & abondante en ruisseaux, paroît avoir été *Auen*; car on fait que les noms de *Pinneberg* & de *Holstein*, usités aujourd'hui, sont récents. Si quelcun vouloit pourtant faire attention au fleuve *Hewer*, ou *Éwer*, qui est le plus considérable de cette contrée, on pourroit en tirer les *Evions*, & de là par le changement de l'E en A, les Avions, comme cela est arrivé aux noms, *Albis*, *Anglia*, *Aliso*, *Angria*, &c.

Les ANGLI sont des Peuples très connus du Duché de Sleswick, qui s'étant associés aux Saxons dans le V. Siècle, passèrent avec eux en Bretagne, & lui donnerent le nom d'*Angleterre*. L'ancienne *Anglia* étoit située entre les Saxons & les *Gjotes*, dits vulgairement *Jutes*. Elle avoit pour Capitale la Ville qui en Saxon se nomme *Sleswick*, & en Danois *Haitby*. C'est que nous apprend *Leibnitz*, en se fondant sur l'autorité d'*Ethelred*, Roi des Anglo-Saxons. Il y a encore aujourd'hui une contrée entre *Flensbourg* & *Sleswick*, qu'on appelle *Angeln*. *

On met ordinairement les VARINI dans le Duché de Meck¹⁰ *lembourg*, auprès du fleuve *Varne*, dont ils doivent emprunter leur nom; mais de cette manière on les éloigne trop, & la *Warne* semble plutôt être ainsi dite des *Venedes*, qui ont aussi été appelés *Warne-Venedes*. Il est plus vraisemblable que ces *Varins* sont les habitans de la *Wagrie*, excellente contrée du Holstein; qui s'étant autrefois nommés *Wagri* & *Vairi*, ont été changés, en adoucissant la prononciation, en *Vari* & *Varini*.

Les

(*) Dans sa *Descr. Holf. & Slesw.* *Keyser* rapporte aussi plusieurs noms de contrées de Villes, & de Villages, qui dérivent d'*au*, & d'*auem*. *Antiq. Septentr.* p. 423.

On ne les regardés comme un des Noms les plus anciens. *Spener* les relegate * dans la Pomeranie autour du fleuve de *Teut*, & sans la moindre apparence de vérité. *Strabo*, il avoüe son ignorance sans détour. Je ne sçais de la dérivation tirée du fleuve remarquable *Eud*, qui étoit autre fois *Eut*, *Eit*, suivant le témoignage de *Strabo*. On en a vu venir EUDONES, comme de *Teut*, TEUTON. Cela veut dire, ceux qui habitent les bords de l'*Eud*. *Strabo* nous fournit encore aujourd'hui la contrée d'*Eut*, où les habitans s'appellent *Eidermännner*, c'est à dire, *Eudons*. Le fleuve il y a une grande contrée occupée par les *Ditmarschen*, qui le même fleuve environne aussi du côté Oriental. Je crois que le nom de *Ditmarsen* vient encore du même *Eud*, ou *Eut*, & de l'article prépositif des anciens Germains *de*, qui a fait *de Eut*, d'où par le changement fréquent d'*eut* en *ie*, & par l'addition de l'article *de*, à cause de la voyelle suivante, s'est formé *Ditmarschen*. *Marsch* signifie une région basse, marécageuse, & grasse, où on ne voit point de hauteurs, dite vulgairement *Maschland*. On trouve dans le voisinage le distrit de *Wulsternarsch*.

Venons aux SUARDONS. *Spener* conjecture * que leur nom vient de *Swerd*, & *Sward*, c'est à dire, des *larges épées* qu'ils avoient, comme celui des *Saxons*, de leurs *courtes épées*. Cette conjecture n'a pas la moindre ombre de vraisemblance. *Cluvier* croit que ce sont les mêmes que *Ptolomée* a nommés *Σαργονες*, qu'il change en *σάργονες*, & les place auprès de Stettin en Pomeranie. *M. de Bérin* les renvoie plus loin, mais sans fondement, dans la partie Occidentale de la Scanie. J'entens ici par *Suardons*, les *Swandons*, habitans les plus anciens de la contrée de *Swanten*, ou *Swanten*, dans le Duché de Sleswik, qui conservent encore aujourd'hui leur nom, & qu'on trouve souvent associés avec les *Angli*. Les Critiques n'ignorent pas que R se met quelque fois pour N. Il y a aussi dans le Holstein un fleuve, nommé *Swartow*, † dont les *Suardons* auroient pu recevoir

voir le nom ; mais je soupçonne que le nom de ce fleuve est plus récent, & je préfère la première Etymologie.

Les derniers Peuples sont les NUI THONS, nom encore très obscur, que *Conringius* a changé en celui de *Vithons*, c'est à dire, blancs, pour les opposer aux *Suardons*, ou noirs. M. *Ancherfen* fait de grands efforts pour amener ici les Teutons, désignés sous le nom de THUITONS, & il prétend * que cette correction est la plus aisée du monde, puisqu'elle ne demande, que la changement très simple de la Lettre N en T ; changement d'ailleurs tout à fait nécessaire, puisque sans cela on auroit une extreme négligence à reprocher à Tacite, d'avoir omis le nom des *Teutons* dans sa Germanie. † Cet Auteur agit en tout cela conséquemment à l'hypothèse, par laquelle il veut placer les THUITONS avec le Sanctuaire de Hertha dans la *Sialand* ; & autour de cette *Sialand*, ou *Codanone*, toutes les autres Nations rapportées ci dessus, dans le voisinage, & formant une espèce de cercle. Cette correction lui plaît infiniment, & il s'en applaudit un peu plus que de raison. Pour moi je dirai, avec la permission de cet habile homme, que je ne vois dans cette correction, ni la facilité, ni la vérité, ni la nécessité qu'il y trouve. Je dis d'abord la facilité ; car il ne s'agit pas, comme il le prétend, du changement d'une Lettre en une autre, mais d'une Lettre en deux ; pour écrire THUITONES, il faut au lieu de N, inserer T & H. En second lieu la vérité y manque ; car Tacite appelle ces Peuples *Teutones*, & non *Thuitones*, au chap. 73. du IV. Livre de son *Histoire*, où il parle expressément des combats contre les Cimbres & les TEUTONS ; & tous les Auteurs écrivent de même, *Cesar*, *Plin*, *Pomponius Mela*, *Florus*, * & même les Grecs, *Proclame* & *Plutarche*. Qui est-ce donc qui se persuadera que Tacite ait voulu employer ici le nom nouveau & inusité de *Thuitones*, après s'être con-^{37.}formé ailleurs à l'usage reçu par tous les Auteurs. De ce qu'il a nommé, au premier Chapitre de la Germanie, l'Auteur de la Nation *Thuislon*, ou *Tuiscon*, on n'est pas en droit de conclure qu'il ait dû écrire ici *Thuitons*, comme le veut M. *Ancherfen*. † car, comme on

* p. 122.

† p. 166.

* Lib. III.

† p. 166.

vient de le remarquer, leur vrai nom de *Teutons* étoit un mot très connu. Et d'ailleurs si leur nom devoit dériver de celui de leur Fondateur, ils devroient s'appeller *Tuistons*, ou *Tuiscons*, plutot que *Thuitons*. Mais de cette maniere, ce seroit moins désigner la postérité de *Tuiston*, qu'autant de *Tuistons* & de *Tuiscons*, Fondateurs de la Nation. Quant à la dernière difficulté de notre savant Auteur, savoir qu'il y auroit une négligence impardonnable de la part de Tacite, d'avoir oublié dans sa Germanie le nom des *Teutons*, ou *Thuitons*, cela n'est pas assez considerable pour autoriser une pareille correction. Ce n'étoit point au Chap. XL. que se trouvoit l'occasion de parler des Teutons ; il y fait l'enumeration des sept Peuples des Sueves, il y décrit *partem Suevorum*, comme il le dit au Chap. XLI. Or les Teutons n'étoient point une partie des Sueves, encore moins la dernière, ou une espece d'appendice, comme Tacite a placé les *Nuitons* ; ils étoient au contraire les premiers, & les plus grands Peuples de l'Allemagne, ceux qui tenoient immédiatement à *Thuiston*, l'Auteur de la Nation. Après cela que M. *Ancherfen* voye lui-même de quel droit il mêle parmi les Sueves, & place à leur extremité, les Teutons, qui de son propre aveu sont les plus considerables Peuples de Germanie. Ensuite, si l'on admet la supposition qui place les Thuitons en Sialand, où ils habitoient, & avoient le Sanctuaire d'*Hertha*, & qui dispose les autres Peuples indiqués par Tacite, en forme de cercle autour de la Sialand & des Thuitons, comment Tacite a-t-il pu mettre au dernier rang les *Nuitons*, ou suivant l'hypothese les *Thuitons*, eux à qui le premier appartenoit, tant à cause de la dignité de la Nation, & du Sanctuaire d'*Hertha*, que par la situation même du lieu, qui en faisoit une espece de centre, qu'il auroit falu d'abord indiquer, pour passer de là à l'enumeration des autres Peuples, qui en formoient la circonference. Pour ne pas ajouter, que malgré toute la peine que le savant *Ancherfen* a prise, il n'a point produit d'argumens suffisans pour établir que la *Codanonie*, & les *Teutons*, appartiennent uniquement à l'Ile de Sialand.

Je ne suis pas au reste fort surpris que le nom des Teutons ne se

se trouve, ni dans ce Chapitre de Tacite, ni dans les suivans. Ce nom, aussi bien que celui des Cimbres, dont il avoit parlé ailleurs, * étoit devenu plus obscur de son tems, comme M. *Ancherfen* l'avoüe lui-même. Cependant Tacite, quoique sans les nommer, paroît avoir compris les Teutons, dans cette Germanie, dont il dit, *qu'elle revient par un grand détour au Septentrion*, (*) par où il entend non seulement la Chersonese Cimbrique, la Norwege & la Suede, qui revient se joindre au reste de l'Allemagne vers le Midi, en faisant effectivement un grand détour par la Finlande, la Livonie & la Prusse. C'est en vain que notre Savant veut restreindre cette Germanie, qui revient par un grand détour, à la seule Chersonese Cimbrique avec les Iles du Danemarck. Le circuit de la Cimbrie ne merite pas le nom de grands; & l'on ne peut pas dire non plus, que la Germanie vienne se rejoindre de la sorte au reste de la Germanie, puisqu'après les Iles du Danemarck, elle retourne plutôt à la Mer Baltique, & va se terminer dans ses flots.

Je trouverois donc un moyen plus facile & plus vrai de faire connoître les *Nuitones* de Tacite; ce seroit de les changer en *Guthbarnes*, comme Pline les appelle, † en les joignant aussi aux *Varins*, dont Tacite a fait mention. Ce sont les mêmes que les GIOTHONES, JUTONES, *Juti*, *Juta*, ou *Vita*, comme *Beda* les a nommés. * Ils habitoient la même Chersonese, & s'étendoient jusqu'aux Cimbres, qu'ils comprirent à la fin dans leur nom. Ces *Guthbarnes* se sont changés bien aisément en *Nuitons*, car le G & l'N se mettent souvent l'un pour l'autre, comme les Latins substituent leur N pour le T des Grecs; & l'I avant THONES devient sans peine un T. Ou bien, si vous omettez la premiere lettre N dans NUI-THONES, vous aurez UITHONES, ou VITHONES, c'est à dire, les *Vita* de *Beda*. C'est de la même maniere qu'on dit *Frisii* & *Frisones*, *Santi* & *Santones*, *Swanti* & *Swantones*, &c. Cette explication est préférable par quantité d'endroits. En la recevant, les peuples indiqués par Tacite se trouvent placés de la maniere la

Mmm 3

plus

(*) *In Septentrionem ingenti flexu redit.* Cap. 35.

c. 74

† *Hist. Nat.*
L. IV. c. 38.

* *Hist. Eccl.*
Angl. L. I. c. 15.

plus convenable dans le voisinage de l'Île de l'Océan, *Helgeland*, & ceignent en quelque sorte le Sanctuaire de la Déesse. Tacite dans sa description passe d'un peuple à l'autre à peu près dans l'ordre, où chacun d'eux avoit fixé sa demeure; quoiqu'il ait pu arriver que quelcun de ces peuples se soit autrefois étendu plus loin.

Ces mêmes Peuples sont *remparés de fleuves & de forêts*, au rapport de Tacite; & en effet les fleuves, les ruisseaux, les étangs, les lacs & les bois, sont très fréquens dans ces contrées du Holstein, de Sleswick & de Jutland, & y servent encore à les défendre: les forêts surtout y étoient beaucoup plus abondantes dans ces anciens tems. Enfin toute l'étendue de pais occupée par ces Peuples est comme à l'écart, *secreta*, vers le Septentrion, & s'étend jusque'à l'Océan Septentrional; situation, que chaque Carte Géographique peut mettre sous les yeux. Ce sont donc là visiblement les Peuples, desquels Tacite ajoute, au commencement du Chap. XLI. *per Suevorum in secretiora Germania porrigitur*. Tous les caractères qu'il leur attribue, conviennent aux Peuples, que nous avons proposés, & semblent les montrer au doigt.

Ces Peuples, suivant le témoignage de Tacite, avoient un tems marqué dans l'année, auquel ils s'assembloient pour aller célébrer leur culte en commun dans une Île de l'Océan. Là ils adoroient *Hertbam*, c'est à dire, la Terre Mère, *croyant qu'elle se mêloit des affaires des hommes, & qu'elle se promenoit par le monde*. M. *Ancherfen* est encore ici d'un sentiment tout opposé, il pense que cette Déesse se rendoit chez ces Peuples, & qu'elle y venoit par mer. Voici ses propres termes. * „Il n'est pas raisonnable de croire que la Déesse *Hertba* ait fait un long chemin par terre avec ses Vaches, & quelle ait pu aller au delà d'un mille d'Allemagne, sans crainte de verser &c. „Ces raisons jointes à ce qu' *Hertba* avoit choisi une Île pour demeurer, & que l'expression, *invebi populis*, peut s'appliquer également à un Vaisseau, & à un Char; ces raisons, dis je, donnent beaucoup de vraisemblance à l'opinion que la Déesse alloit & revenoit le plus souvent par mer, & à la rame plutôt qu'à la voile, pour courir d'autant moins de risques.“

Mais

Mais ces paroles répugnent en plusieurs manières à la coutume très ancienne de ces Peuples, & au récit de Tacite. Les Peuples de la plus haute antiquité, qui étoient attachés au culte du même Dieu, ou de la même Déesse, & lui rendoient un culte commun, alloient s'en acquitter au séjour & dans le Temple de la Divinité; ce n'étoit point les Dieux, qui venoient trouver les Peuples, & parcourir leurs pays; beaucoup moins passaient-ils les Mers, & s'embarquoient-ils pour de longs voyages chez leurs Adorateurs. Il est plus conforme à la raison que les inférieurs aillent chez leurs Supérieurs, les hommes chez les Dieux immortels, comme ils les appelloient, & que des Nations unies par une Alliance commune eussent un lieu fixe, où elles vaquassent en commun à leurs Cérémonies religieuses. C'est ainsi que celles d'Ionie avoient pour lieu commun *Mycalé*, dite à cause de cela, *Μυκάλιον*, où *Herodote* * nous apprend que les Ioniens se rendoient de toutes leurs Villes à un tems marqué pour célébrer un culte commun. Les Peuples de la Grèce, surtout les Atheniens, & même les Hyperboréens, avoient pareillement coutume d'envoyer tous les ans des députations à l'Île de Delos, pour y faire des sacrifices en leur nom, comme *M. de Spanheim* l'a fait voir avec une riche érudition. † Ad Colli- Tous ces peuples semblent avoir imité les Israélites, qui dans leurs Fêtes solennelles quittoient les Villes & la Campagne, pour se rendre à ce Temple commun & unique de toute la Nation, qui étoit à Jérusalem, suivant l'obligation expresse que leur en imposoit la Loi Divine. Mais pourquoi vais-je chercher bien loin les exemples de cette coutume? Tacite lui-même l'attribue aux *Sueves*, dits *Semnoni*, dans ce passage formel du Chapitre XXXIX. „La fidélité est confirmée par d'anciennes pratiques de Religion. Dans un tems marqué tous les Peuples qui sont du même sang se rassemblent par Députés, (les Grecs nomment ces députations *Θεωρία*;) dans une forêt consacrée par les augures de leurs pères, & par une ancienne frayeur, & après avoir publiquement égorgé un homme, commencent ainsi la célébration de leurs barbares rites.“

J'estime que ces exemples fussent pour détruire entièrement la pensée de *M. Auchersen*, sur les voyages de la Déesse *Hertham* chez

* L. I. c. 148.

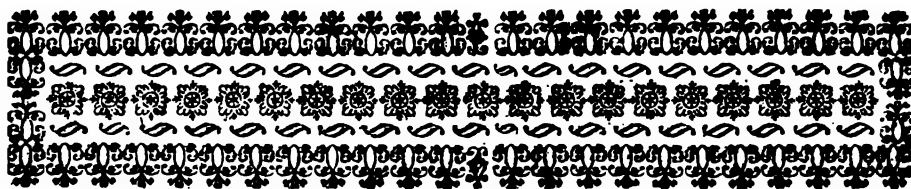
† Ad Colli-
machi Hym-
num in Delum,
p. 279.

chez les Peuples qui l'adoroient, & pour faire voir que ces Nations Sueves qui ont été indiquées, suivoient plutôt la coutume universelle des Nations, dictée par la raison même, en se rendant à certains tems marqués dans l'Île sacrée, où résidoit la Divinité.

Enfin Tacite est entièrement contraire au Voyage par mer, que notre Savant croit avoir été fait par la Déesse, pour aller visiter les Peuples. L'expression, *invehi populis*, & le *vehiculum* de la Déesse dont il parle aussi-tôt après, peuvent-ils réveiller à quelcun l'idée d'une navigation, & persuader que c'étoit sur un vaisseau, que la Déesse faisoit son voyage. Le Sacrificateur, continue Tacite, *suivoit avec beaucoup de vénération la Déesse traînée par des vaches*. Peut-on entendre ces paroles que d'un chemin par terre, & le Sacrificateur pouvoit-il suivre autrement qu'à pied un char traîné par des Vaches? Quant à ce que M. *Ancherfen* ajoute des *risques de verser*, on ne sauroit s'y arrêter, dès qu'on fait que la route de la Déesse étoit tracée d'avance, qu'elle étoit censée conduire elle même le char, & qu'il arrivoit fréquemment dans les pompes, que les simulacres des Dieux faisoient de longues routes sur leurs chars, sans qu'il y ait d'exemple que ces chars ayent versé; tant leurs religieux conducteurs y appor-toient de précautions.

Voici comment j'estime que toute la Cérémonie se passoit. Dans un tems marqué de l'année, les Peuples nommés par Tacite envoient des Députations sacrées à l'Île d'Helgeland, ou d'Helgelund, Sanctuaire de la Déesse Hertha, pour y adorer au nom de tous ces Peuples cette Divinité, qu'ils regardoient comme leur Mère, & la source auguste de leur origine. La Déesse, pour témoigner que ce culte lui étoit agréable, sortoit de chez elle en pompe sur son char, pour aller visiter les Députés de chaque Peuple, & les honorer de sa présence; *adventu, hospitioque dignata est*, dit Tacite. Elle étoit reçue par tout avec les plus grandes démonstrations de joye, & au bruit des acclamations; on faisoit des Jeux & des Danses sacrées. Pendant ce tems là, ni les Députés, ni les Peuples qui les envoient, ne pouvoient prendre les armes, ni se mêler d'aucune guerre; il n'y avoit que paix & tranquillité, comme Tacite nous l'apprend, & comme nous l'avons suffisamment prouvé dans notre premier Mémoire.

RE-



RECHERCHES SUR L'ABROGATION DU DROIT D'ELIRE

UN ROI DES ROMAINS, FAUSSEMENT IMPUTÉE A

L'EMPEREUR HENRI VI.

PAR M. LE COMTE DE KEYSERLING.

Traduit du Latin.



I.

Il passe aujourd'hui pour certain parmi les Savans, que l'Empereur Henri VI. s'est occupé pendant son Règne à rendre héréditaire pour la postérité l'Empire, qui dépendoit de la libre élection des Princes. Cette opinion a même eu tant de force au jugement de M. *Gundling*, qu'il n'a pas balancé d'en inferer * que la puissance d'elire les Empereurs, appartenoit dès ce tems-là aux Electeurs. Et *Meibomius*, dans son *Apologie pour Otton IV.* † l'a soutenu avec autant de chaleur, que si la cause d'Otton qu'il défend, ou le salut de la République, eussent dépendu de cette créance.

* *Gundling.*

giam. P. XVII.

P. 169.

† *Rer Germ.*
Tom. III.

II. L'un & l'autre de ces Auteurs s'appuyent sur le Compilateur de la grande Chronique Belgique, qui a cité un certain Moine *Jean Gobelinus Persona*, & la Chronique de Halberstadt. Pour répandre du jour sur ce fait, & faire voir s'il doit être regardé comme certain, ou

Memoires de l'Académie Tom. IV.

Nnn

dou.

douteux, il sera nécessaire d'examiner avec attention le degré de foi que méritent les Témoins allegués, & leurs témoignages. Mais avant que de nous mettre à cet examen, rapportons les témoignages mêmes.

III. Voici ce que nous lisons dans la grande Chronique Belgi-
 * Ap. Pi- que. * „Cet Empereur Henri, voyant que l'Empire d'Allemagne avoit
storum in „souffert plusieurs maux, de même qu'autrefois l'Empire Romain, à
Scriptor. VI. „cause des fréquens changemens d'Empereurs, avant que les suffrages
d. 203. „des Princes se réunissent pour une nouvelle Election, il ordonna qu'il
 „ne se feroit plus à l'avenir d'Election, mais que l'Empire seroit dé-
 „volu par la seule succession du sang, en sorte que celui qui se trouveroit le
 „plus proche parent de l'Empereur défunt, parviendroit à cette di-
 „gnité par droit héréditaire. Et pour commencer par son fils Frédéric,
 „qu'il avoit eu de sa femme Constance, Henri réunit à l'Empire Ro-
 „main le Royaume de Sicile & de Calabre, le Duché de la Pouille, &
 „la Principauté de Capoue, que son Fils tenoit héréditairement de ses
 „Ancêtres, afin qu'il devint Seigneur unique & perpétuel de tous
 „ces Etats. Il ordonna aussi que les Femmes succederoient au défaut
 „des Mâles, & que l'Empereur ne prétendroit plus à l'avenir aux droits
 „de main morte sur les biens des Ecclesiastiques. Cette Constitution,
 „qui auroit été si utile, fut approuvée par la Cour de Rome, & par
 „LII. Princes, qui avoient coutume d'elire, & qui apposerent leurs
 „Sceaux aux Lettres Patentes qui en furent dressées.”

IV. Le recit de *Gobelinus Persona* † est conçu en ces termes.
 † Ap. Mei- „Henri fit un accord avec les Princes de l'Empire, que ses Enfans lui
ben, Tom. I. „succederoient par droit hereditaire, mais les Princes de Saxe s'y op-
Rev. Germ. P. „posèrent. A cause de quoi l'Empereur dégagea lui-même ces Princes
275. „de leur promesse, & du serment qu'ils avoient prêté dans cette
 „occasion.”

V. Passons à la Chronique de Halberstadt. * „Conrad Arche-
 * Ap. Leib- „vêque de Mayence avoit conspiré avec les Princes de Saxe contre
nit. Script. „l'Empereur Henri VI. parce qu'il leur avoit demandé que la Succes-
Brunsw. Tom. „sion de l'Empire passât à ses heritiers. On venoit d'elire alors pour
II. p. 138. „Evêque d'Halberstadt Gandolfe, dont l'ordination fut différée de
 „quel-

quelque tems à cause de cette affaire. Mais ce même Gardolfe ar-
rêta le messager qui portoit aux Princes les Lettres de la conjuration,
& intercepta ces Lettres. Les ayant ensuite communiquées à l'Em-
pereur, ce Prince, en homme sage & prudent, se désista de la de-
mande qu'il avoit faite.

VI. Si nous faisons attention au tems où a vécu le Compilateur
de la Chronique Belgique, il est constant qu'il étoit contemporain
de Charles le Hardi, Duc de Bourgogne. Car à la fin de cette Chro-
nique il parle du Siège de Nuis formé par ce Prince, comme y ayant
assisté ; „Le bruit des Bombes, dit il, * rétentissoit dans l'air avec
„un tel fracas, qu'à peine pouvois-je le soutenir, en me bouchant les
„oreilles.“ Or ce Siege tombant sur l'année 1447. comme le témoi-
gne *Pontus Heuterus*, † il en résulte que notre Chroniqueur florissoit
vers la fin du XV. Siecle. Mais l'Empereur Henri VI. n'ayant pouf-
sé son Règne que jusqu'à l'an 1197. il en résulte clairement qu'il y a
un intervalle de près de trois Siecles entre le tems où Henri a régné,
& celui auquel le Compilateur a écrit sa Chronique Belgique. C'est
ce qui fait que je suis surpris qu'on ajoute foi à cet Ecrivain sur des
choses si éloignées de son tems. Il est vrai qu'il en appelle à l'auto-
rité d'un certain Moine *Jean* ; mais sans dire, ni si ce Moine étoit un
Auteur contemporain, ni où ses Ecrits existent, & peuvent se lire.

VII. D' *Acheri* a inseré dans son *Spicilegium* * quelques Ecrits
d'un Moine *Jean*, Ecrivain du XII. Siecle ; mais leur contenu ne
s'étend pas jusqu'au tems d'Henri VI. Il y aussi dans *Muratori* † une
Chronique de Vulturne par un Moine *Jean*, mais elle n'embrasse que
depuis DCCIII. jusqu'à MLXXI. & par conséquent ne va point jus-
qu'à Henri VI. Et dans les fragmens qu'on y a ajoutés, il ne se trouve
pareillement rien qui ait du rapport à ce que le Compilateur de la
Chronique Belgique nous dit d'Henri VI. *Gundling* prétend * que
ce *Jean* étoit un Moine de S. Vincent, & Auteur contemporain.
Mais puisque *Jean Vincentius*, Moine de l'ordre des Prédicateurs,
dont *Leibnitz* fait mention, n'a aucun caractere qui puisse faire croire
que c'est celui dont il s'agit ici ; & que d'un autre côté *Jean*, Moine
de

* l. c. p. 420.

† *Scriptor.*
Burg. L. V. c.
X. p. 138.

• Tom. III.
p. 234.

† *Scriptor.*
Rev. Italic.
Tom I. P. 2.
P. 325.

• l. cit.

de *S. Vincent*, près de la source du Vulturne en Campanie, n'a fleuri qu'après le milieu du XV. Siècle, sans que parmi tous les autres Compilateurs de vieux monumens il existe, que je sache, un autre Moine *Jean*, ni que *Gundling* ait pu montrer aucune trace, ou vestige de cet Auteur, & du passage qu'on cherche ; il est evident que cet Ecrivain & son témoignage sont ensévelis dans une profonde obscurité, & qu'ainsi il est tout à fait douteux, s'il est digne qu'on y ajoute la moindre foi. A' quoi je pourrois ajouter que les vrais Ecrivains de ce tems-là, comme *Conrad d'Ursperg*, *Arnold de Lubec*, *Otton de S. Blaise*, n'ont point entrelacé cette circonstance dans le fil de leur histoire.

VIII. Quant au fonds même du témoignage, il s'y trouve plusieurs choses, qui sont entierement éloignées de la Verité. Premièrement, ce qui est dit, que l'Empereur ordonna qu'on ne feroit plus d'Élection, mais que l'Empire écheoiroit par la seule succession du sang : au lieu que les Auteurs contemporains, déjà nommés plus d'une fois, déclarent positivement, qu'Henri prit soin de faire élire son Fils par les Grands du Royaume, & qu'il reçut d'eux les Lettres nécessaires pour donner de la validité à cet acte. Ces Lettres ont dû contenir l'abrogation des Elections pour l'avenir, ou non. Si elles l'ont contenue, il est incroyable que les Ecrivains qui ont parlé de ces Lettres, ayent passé sous silence un changement aussi considerable, & il ne l'est pas moins que l'Empereur ait demandé aux Princes un semblable acte, qui leur mettoit tout à la fois sous les yeux le Droit d'Élection dont ils avoient jouï, avec l'exercice qu'ils en avoient fait, & l'abrogation de ce même droit. Si ces Lettres n'ont rien exprimé sur ce sujet, la fausseté du témoignage que nous attaquons, est démontrée.

IX. Ce que le Pape Innocent III. dit dans sa *déliberation sur le fait des trois élus à l'Empire*, s'accorde avec notre raisonnement.

* *Epist. Tom. I. p. 697.* „Depuis cependant, dit-il, * son Père, (Henri Père de Frédéric) „s'appercevant qu'il avoit fait une fausse démarche, dégagea les Princes de leur serment, & leur rendit les Lettres d'Élection ; mais ensuite

„suïte les mêmes Princes l'elurent, quoiqu'à peine sorti de l'enfance;
 „en l'absence de son Pere, de leur propre mouvement, & d'une ma-
 „niere unanime.“ Assurément si Henri, outre l'election de son fils, s'e-
 „toit proposé l'introduction d'un Droit purement héréditaire, ce Pon-
 tife extremement acharné contre tous les Empereurs de cette famille,
 ne l'auroit pas épargné là dessus, & lui auroit amèrement reproché
 cet attentat aux Droits & à la Liberté de l'Empire. Ainsi ne l'ayant
 pas fait, cela prouve assez que cette prétendue entreprise étoit une
 chose inconnue dans ce tems-là.

X. Il y a à la verité un passage dans la Lettre d'Innocent, * qui * *ibid.*
 pourroit faire soupçonner Henri d'avoir fait quelques tentatives con- P. 695.
 tre la liberté des Elections. Il est conçu en ces termes. „Ils avan-
 „çoient aussi que ce qui ne faisoit pas peu contre lui, c'est qu'il s'es-
 „forçoit d'usurper le Royaume par un droit héréditaire contre la li-
 „berté de l'Empire. D'où arriveroit que, si comme autrefois le frere
 „avoit succédé au pere, le frere présentement succédoit au frere, la
 „liberté des Princes seroit détruite, puisqu'il parviendroit à la Cou-
 „ronne, non par leur élection, mais plutôt par succession.

XI. Mais cette difficulté est aisée à résoudre, si l'on fait les remar-
 ques suivantes ;

1. Que cette Lettre ne traite que de la controverse qui étoit agi-
 tée entre Philippe, & Othon, & par conséquent qu'elle n'a aucun
 rapport aux fausses imputations, dont Henri a été chargé.

2. Que le Pape rapportant simplement les Objections faites contre
 Philippe par le parti contraire, ce n'est point là où il faut chercher la
 verité des faits, dont un ennemi ne se met pas ordinairement fort en
 peine.

3. Que l'Objection rapportée contient plutôt l'interprétation
 fournie par les ennemis de Philippe, que les faits réels : car le Pape
 parle de la crainte, vraie ou feinte, qu'ils avoient conçue que l'Em-
 pire ne demeurât dans la Famille de Stauffen ; & il ne dit point que
 la raison en fut prise de l'abolition du Droit d'Election : on ne crai-

gnoit que cette continuation de l'Empire dans la même Famille, qui ne pouvoit s'accorder avec la liberté d'élection.

4. Que ces mêmes adversaires de Philippe n'ont point allégué l'action de l'Empereur Henri, telle qu'on la lui attribué ordinairement, quoique les raisons de leur crainte eussent paru beaucoup plus considérables & plus solides, s'ils avoient été en état de produire quelque entreprise déjà formée contre la liberté.

* *Epist.*
Tom. I. C.
XIX. p. 5.

XII. A tout cela on peut ajouter les paroles suivantes, qui se lisent dans les *Gestes d'Innocent III.* * „Depuis donc que l'Empereur „Henri eut acquis la possession du Royaume de Sicile tout entier, „après l'avoir dépouillé de l'or, de l'argent & des pierres précieuses „qui s'y trouvoient, il revint en Allemagne avec un grand triomphe, „& obtint des Princes, qu'ils élussent pour Roi des Romains son fils „Frédéric, enfant de deux ans, & qui n'avoit pas encore été bûtsé, „& qu'ils lui prêtassent serment de fidélité ; & parmi ces Princes, Philippe dont on a parlé ci-dessus, prêta aussi le même serment.“ On voit par ces paroles, que l'Auteur d'où elles sont tirées n'a pas eu dessein de dépeindre la conduite de Henri du beau côté, mais qu'il a plutôt cherché à lui attirer la haine & le blâme, en disant que cet Empereur avoit pillé la Sicile, & avoit fait élire son fils Frédéric, avant même qu'il fut baptisé. Si donc ce même Empereur avoit travaillé à détruire la liberté des élections pour y substituer le droit héréditaire ; assurément un Ecrivain devoüé à la Cour de Rome n'auroit pas laissé échaper cette occasion de le noircir. Car cet attentat pouvoit le rendre beaucoup plus odieux que les dépouilles qu'il avoit emportées de la Sicile ; ses prédécesseurs dans l'Empire d'Allemagne rendoient cette dernière action en quelque sorte légitime, l'ayant autorisée par leur exemple, au lieu qu'il n'y avoit point d'exemple du dessein de rendre l'Empire patrimonial, & de faire élire comme Successeur à l'Empire un enfant, qui n'avoit pas encore reçu le S. Bâteme.

XIII. Une seconde chose qui se présente à remarquer contre la foi due au temoignage, que nous avons tire de la Chronique Beigique ; c'est ce qu'elle avance, que l'Empereur Henri, pour arriver plus aisément à ses fins, unit à l'Empire Romain le Royaume de Sicile & de Calabre, le Duché

ché de la Pouille, & la Principauté de Capoue, qui avoient été transmis à son Fils par ses Ancêtres. Si pareille chose étoit arrivée, pourquoi, je vous prie, ne demeureroit-il pas le moindre vestige d'une union aussi mémorable ? Pourquoi tous les Ecrivains auroient-ils gardé là dessus le silence le plus profond ? Pourquoi le Pape, dans l'Ecrit que nous avons déjà cité, * en parlant de l'union du Royaume de Sicile, dont il prétendoit avoir le Domaine Souverain, & de la confusion qui en résulteroit entre l'Eglise & l'Empire, auroit-il proposé cet événement comme une chose à craindre, à cause de l'accord fait entre les Princes de l'Empire à ce sujet, & n'auroit pas plutôt fondé ses craintes sur la seule promotion de Frédéric, si elle avoit déjà existé ? Ignoroit-il la grande différence qu'il y a entre des choses déjà réellement passées, & celles qui n'ont qu'une possibilité à venir ? Il est au contraire de la dernière vraisemblance, que si cette union avoit été mise sur le tapis par Henri, pour faciliter à son Fils l'acquisition du droit héréditaire à l'Empire, le Pape ne se seroit pas tû sur une pareille chose. p. 698.

XIV. Passons en troisième lieu au droit de succéder, accordé aux femmes, au défaut des Mâles, & au droit de dépouilles, dont la Chronique Belgique fait mention, depuis ces mots, *Il ordonna aussi, &c.* jusqu'à la fin du passage cité. On y voit manifestement, que l'extension du droit de succéder aux Fiefs, accordé au sexe féminin, & le renoncement aux droits de main morte sur les biens Ecclesiastiques en Italie & en Allemagne, devoient être des choses dont la connoissance étoit universellement répandue dans ce tems-là, puisqu'on prétend que la Cour de Rome, & LII. Princes avoient accordé leur consentement à cette Constitution, dont l'Allemagne auroit retiré de grands avantages. Je fais bien que le silence d'un, ou de deux Ecrivains, ne donnent pas le droit de conclurre contre l'existence d'une chose, dont il y auroit d'autres preuves. Mais il s'agit du silence universel de tous les Historiens de ce tems-là, tant d'Italie que d'Allemagne, qui n'ont fait aucune mention d'une chose cependant si importante, & qui doit s'être passée de la manière la plus publique. On ne

ne produit qu'une narration faite au bout de près de trois Siecles, & appuyée sur l'autorité de je neſçai quel Moine *Jean*, dont la personne & les ouvrages ſont tout à fait inconnus. C'eſt donc à bon droit qu'une telle narration eſt ſuſpecte.

* *Epist. In-*
nocent. III.
Tom. Lp. 689.

XV. Voyons auſſi un peu, comment cette rélation ſ'accorde avec les expreſſions qui ſe trouvent dans les Lettres des Princes, qui élurent Otton IV. pour Empereur, après la mort de Henri. Voici ce qu'on y lit, * Lettre IX. „Il ſ'eſt auſſi libéralement déſiſté en faveur „de nous & des autres Evêques de la mauvaiſe coutume qu'avoient les „Empereurs précédens de ſ'emparer de tous les biens meubles, qui ſe „trouvoient au decés des Evêques & Abbés Princes.“ Et dans la Lettre X. „De plus détruiſant entièrement la mauvaiſe coutume „qu'avoient conſervée juſqu'à préſent ſes Prédeceſſeurs à l'Empire, de „ſ'emparer des biens meubles, qui ſe trouvoient au decés des Evêques & „Abbés Princes, il nous a delivrés, nous Princes Eccleſiaſtiques, avec une „benéſcence Royale, de cette injuſte véxation, & a libéralement ſtatué que „les biens de ceux qui décederoient, paſſeroient à leurs heritiers. Nous „avons donc cru devoir ſupplier Voſtre paternité, comme nous fondant „ſur la fidelité & le devouément de notre Seigneur Roi &c.

XVI. Ces paſſages nous enſeignent ouvertement, 1. qu' Otton eſt le premier, qui ait renoncé à ce droit de dépouilles, puis qu'on y dit que cette mauvaiſe coutume avoit ſubſiſté juſqu'à ſon tems.

2. Que cette renonciation lui étoit imputée comme un merite tout à fait nouveau, auquel le Pontife eſt ſupplié d'avoir égard, comme à une preuve marquée de la fidelité & du devouément d'Otton.

S'il étoit vrai, comme le prétend la Chronique Belgique, que Henri VI. eut déjà réglé que le droit de dépouilles ne ſ'exigeroit plus à l'avenir, aſſurément, on ne ſauroit concevoir, comment les Lettres qui viennent d'être alleguées, peuvent porter, que cette mauvaiſe coutume avoit duré juſqu'au tems d'Otton IV. & que c'étoit lui qui l'avoit enfin détruite. On dira peut-être que le renoncement à ce droit peut être également attribué à Henri & à Otton, de maniere que le premier en ait fait la déclaration, mais ſans l'exécuter, ce qui

aura

aura fourni au second l'occasion de proceder réellement à cette renonciation. Mais alors nous demandons, comment cette ordonnance de l'Empereur Henri, les raisons qui l'engagerent à la faire, & celles qui en empêcherent l'execution, ont échappé aux Ecrivains de ce tems, qui n'étoient pas moins revêtus de la qualité de témoins oculaires, que ceux du tems d'Otton ? Pourquoi les Archives de la Cour de Rome, ni celles de l'Empire, n'en ont-elles pas conservé la moindre mémoire, puisqu'on prétend que ces choses ont été réglées du consentement commun de ces deux Cours, & que la connoissance s'en est répandue dans le Public ? Le Clergé ordinairement si attentif à tous les Droits & Benefices qu'on lui accorde, auroit-il pu mettre en oubli une chose qui lui procuroit de si grands avantages, en sorte qu'un Moine Jean, caché dans une profonde obscurité, soit le seul qui en ait parlé ? Pourquoi l'Archevêque de Cologne, & les Princes, dans les Lettres que nous avons alleguées, ne disent-ils pas un mot de la renonciation de Henri, se bornant à citer celle d'Otton, comme une preuve singuliere de sa fidelité & de son devoiement. Assurément, si Henri avoit fait une pareille renonciation, nous trouverions bien un autre nombre d'Ecrits, ou d'Actes de ces tems là, & des suivans, que ceux dont la Chronique Belgique fait mention. Nous sommes donc obligés d'avoüer que le passage de cette Chronique que nous avons rapporté, nous est encore fort suspect par cet endroit là.

Toutes les particularités rapportées par le Moine Jean, étant donc telles qu'on ne peut les accorder avec celles que nous ont transmises les Ecrivains les plus dignes de foi de ce tems-là ; cela nous fournit de justes raisons de revoquer en doute le contenu du passage en question de la Chronique Belgique, & cela nous détermine à lui refuser entierement notre créance.

XVII. Un autre témoin, sur le suffrage duquel Meibomius cherche à s'appuyer, c'est *Gobelinus Persona* ; dont on fait, qu'il fleurissoit au commencement du XV. Siècle, puisqu'il a poussé son Ouvrage, intitulé *Cosmodromium*, jusqu'à l'an 1418. Mais c'est inutilement qu'on voudroit recourir à ce témoignage ; la distance des tems est beaucoup trop considérable, pour qu'on puisse en admettre la validité, d'autant

plus que *Gobelinus Persona* ne cite point d'autres témoins contemporains, & dignes de foi. Il est clair par conséquent, qu'on doit lui appliquer ce que nous avons dit du Compilateur de la Chronique Belgique, & il seroit superflu de le répéter ici.

XVIII. Enfin la Chronique de Halberstadt sert aussi de base au témoignage de *Meibomius* ; & cette Chronique paroît avoir été écrite, lorsque le XIII. Siècle n'étoit pas fort avancé, puisqu'elle s'arrête à l'Evêque Conrad, qui renonça à l'Evêché en 1209. * Il est donc constant que le Compilateur de cette Chronique vivoit en même tems que Henri, qui a tenu les rênes de l'Empire jusqu'en 1197. Cet avantage du tems, joint à celui du mérite, lui doivent donc faire donner une entière préférence, par rapport au témoignage dont il s'agit, sur le Compilateur de la Chronique Belgique, & sur *Gobelinus Persona*, Ecrivains fort postérieurs à ces tems-là. Mais comme la Chronique de Halberstadt ne parle point de l'abolition des Elections libres, & de l'introduction du droit héréditaire, mais qu'on y lit simplement, que l'Empereur Henri demanda aux Princes, que la Succession de l'Empire passât à ses héritiers ; il a plu à *Meibomius* de faire précéder des témoins beaucoup plus modernes, croyant donner par là une certaine force à son opinion. Or il est manifeste que l'ordre ne sauroit être renversé de cette manière, & que des Ecrivains plus récents, qui n'ont point vécu, lorsque les faits sont arrivés, ne sauroient servir à répandre du jour sur de plus anciens, sans quoi on tombe dans le défaut de raisonnement, qui se nomme *vitium obreptionis*. Si quelqu'un croyoit néanmoins pouvoir inferer de la teneur du témoignage, qui se trouve dans la Chronique de Halberstadt, que Henri VI. voulut effectivement abroger la coutume d'élire les Empereurs, pour faire passer la succession de l'Empire à ses héritiers, il nous paroît qu'il tomberoit dans une grande erreur, en tirant du seul mot d'*heritiers*, employé au pluriel par ces Ecrivains, l'abrogation du droit d'élire, & l'introduction du droit héréditaire. Cela est d'autant moins supportable, que l'Auteur ne dit rien du tout d'approchant, mais se borne à rapporter que Henri se désista de la demande qu'il avoit faite aux Princes. Or cette demande dont il se désista, n'avoit d'autre objet que

* Voy. Leib-
nitz, Script.
Res. Brunsw.
Tom. II. p. 15.

que l'élection de son fils Frédéric, comme ces paroles, tirées des Lettres d'Innocent III. le mettent dans une pleine évidence. * „Depuis „cependant, son Pere s'appercevant qu'il avoit fait une fausse démar- „che, dégagea les Princes de leur serment, & leur rendit les Lettres „d'élection de Frédéric.“ Si les Lettres qui furent rendues aux Prin- ces par Henri, ne concernoient que l'élection de son Fils, il faut né- cessairement qu'elles n'aient pas contenu l'abrogation des Elections; autrement ceux qui en parlent, feroient mention de l'un & l'autre de ces deux chefs, le second étant pour le moins aussi remarquable que le premier. Tout cela montre clairement que *Meibomius*, pour établir ce qu'il avance, travaille inutilement à se munir de l'autorité du passa- ge en question, qui ne renferme rien de nouveau, ni d'étranger aux usages de l'Empire, mais qui rapporte seulement un fait commun aux Em- pereurs précédens, qui n'avoient jamais manqué de faire tous leurs efforts, pour procurer de leur vivant l'élection de leurs Fils en qualité de Rois des Romains, & pour leur laisser une esperance assurée de succéder à l'Empire.

• Tom. I.
p. 698.

XIX. J'ai envie d'ajouter à tout ceci un passage qui vient de tom- ber fortuitement sous mes yeux. Il se trouve dans *Gervaise Tilbe- rienfis*, † & en voici la teneur. „Il (*Henri*) institua cette Loi chez „les Allemands, que suivant la coutume des François & des Anglois, „les Fiefs (*militia*) servient dévolus par droit de Succession, & se „transmettroient suivant les degrés des générations, au lieu qu'aupara- „vant ils ne dépendoient presque que de la faveur du Prince. Mais „pour faire tourner à son propre avantage le bienfait qu'il avoit ac- „cordé, il obtint de ses sujets que l'ancienne forme d'élection des „Seigneurs (*Palatinorum*) cesseroit, & que l'Empire demeureroit à ses „descendans, par un ordre de Succession fondé sur la proximité, en „sorte qu'il seroit le dernier des Empereurs élus, & la tige de cette „dignité rendue successive.“

† Dans ses
Orig. Imper. p.
66. Edit. de
Maderus, in-
ser. dans les
Script. Brunsw.
de *Leihnitz*.
Tom. I. p. 943.

XX. Nous n'avons aucun sujet de douter que cet Auteur n'ait fleuri du tems de Henri VI. Car il rapporte * qu'il a vu lui-même au Concile de Venise Frédéric I. père d'Henri VI. faisant sa pénitence. A cet égard nous n'avons donc rien à objecter contre lui. Cepen- dant la fausseté manifeste de son témoignage découle, non seulement

* Loc. cit.
p. 64. & 65.

des mêmes raisons que nous avons alleguées ci-dessus contre la supposition, que Henri ait voulu abolir le droit des Elections, & établir le droit héréditaire ; mais encore de ce qu'il rapporte, qu'à cause de cela Henri fit une Loi sur la dévolution des Fiefs aux heritiers, pour fortifier l'acquisition du droit de succession héréditaire à l'Empire qu'il avoit acquis à ses descendans.

XXI. Mais, puisque les Empereurs qui ont régné avant Henri VI. avoient déjà établi des Loix publiques sur la succession des Enfans aux Fiefs, on ne sauroit assurément attribuer à Henri d'être l'Auteur de cette Loi en Allemagne, & d'avoir réglé le premier que les Fiefs seroient dévolus par droit de Succession, suivant la proximité des degrés dans les générations. En voici la preuve dans ces paroles de la Con-

* De benef.
Fend. 5. Tit. I.

stitution de l'Empereur Conrad. * „Nous ordonnons aussi que lorsque quelque noble, (*miles*) soit d'entre les principaux, soit d'entre les moins, viendra à sortir de cette vie, ses fils obtiendront son benefice ; que s'il n'a point de fils, mais qu'il reste quelque fils d'un de ses fils, il en jouira de même, en conservant l'usage où sont les grands Vassaux de fournir des Armes & des Chevaux à leurs Seigneurs.“ Et dans la Constitution

† Fend. II.
Tit. LV. §. 2.

de Frédéric I. † „De plus si le fils d'un Vassal vient à offenser son Seigneur, le père en étant requis par le Seigneur, amenera son fils pour lui faire satisfaction, ou bien il se séparera de son Fils ; autrement il sera privé du Fief. Et si le Père ayant voulu mener le Fils, pour faire satisfaction, celui-ci n'en a tenu aucun compte ; à la mort du Père il ne succedera point au Fief.“ *Guntberus* fait sur cette Constitution de Frédéric I. la Remarque suivante. * Lorsque le suc-

* In Ligu-
rimo apud Ren-
berum. V.
Scripts. Rev.
Germ. L. VIII.
p. 410.

cessseur, ou heritier d'un Fief, qui a déjà atteint l'adolescence, laisse écouler un an & un jour, soit par dol, soit par négligence, ou par orgueil, sans demander à son Seigneur les droits feudaux, il est déchu du Fief, & le Seigneur peut le convertir à son propre usage.“

XXII. Mais avant ces tems mêmes, la Succession héréditaire avoit lieu dans les Fiefs, comme cela paroît clairement par la vie de *Conrad le Salique* écrite par *Wippon*, où cet Auteur a mis formellement ces paroles. † „L'Empereur Conrad le Salique se concilia beaucoup l'esprit des Nobles, en ce qu'il ne permit pas qu'aucun des-
cendant

† Ap. Pi-
stor. Scripts.
VI. p. 430.

„pendant perdit quoi que ce soit des anciens benefices de ses Ancêtres.“ Et le Continuateur de *Reginon* * rapporte le fait suivant, au sujet du Comte *Uton*, Seigneur illustre à la Cour de l'Empereur Otton le Grand : „Le Comte Uton venant à mourir, partagea avec la permission „de l'Empereur tout ce qu'il possédoit de benefices & de Gouverne- „mens entre ses Fils, comme un héritage.“ La même chose se dé- montre par la Loi suivante de Lothaire le Saxon ; publiée le 26. Aout 1127. „Pour terminer ces altercations nous ordonnons, que ce qu'un „Frere a fait, (savoir en donnant simplement,) ne pourra préjudicier „à un Frere qui survit ; même si le bien avoit passé à la seconde géné- „ration, à la troisieme, & jusqu'à l'infini.“ Si donc ce qu'un Frere a- voit fait en donnant simplement, ne devoit point préjudicier au Frere qui survit, quand même le bien seroit passé à la seconde, ou troisieme génération, & jusqu'à l'infini, il en résulte nécessairement que la Suc- cession par générations s'étendoit aussi alors jusqu'à l'infini, & qu'ain- si l'institution de ce droit est d'une Epoque fort antérieure au tems de Henri VI.

XXIII. Cette relation de *Gervaise* renferme donc tant de cho- ses contraires à la verité, que nous n'avons aucun lieu de regarder comme digne de foi, & véritablement faite par Henri, l'introduction du droit héréditaire à l'Empire, qu'on voudroit y fonder ; surtout si nous fai- sont réflexion que cet Ecrivain étoit attaché au parti & au service d'Otton, qui étoit en guerre avec la famille de *Stauffen* ; & qu'ainsi c'est un témoin domestique, dont les paroles ne meritent aucune créance, & ne sauroient être alleguées en preuve. Tout nous con- duit plutôt à conclure, que cette abrogation du droit d'elire, & cet- te introduction du droit héréditaire, sont des fictions inventées en haine des Princes de la Maison de *Stauffen*, & nées de l'interpreta- tion sinistre, donnée à un fait qui n'avoit rien de blâmable, & divul- guée comme vraie par une multitude d'Ennemis.

XXIV. Si je ne me trompe beaucoup, je vais prouver la même chose par une autre relation. Il existe, suivant le témoignage des Sa- yans de Goettingen, qui nous ont donné une Description de l'état présent de la Litterature, † une Chronique qui n'a point encore été

000 3

publiée † *Delinea- tio nuperrimi Status Erudi- tionis P. II.*

* p. 77.

publiée, du Monastere de *Reinersbrunn*, ou, sous l'an 1396. l'Auteur, après avoir parlé au long des diverses résolutions prises par les Princes d'Allemagne, au sujet de l'expédition de la Terre Sainte, ajoute ces paroles souverainement dignes d'attention.

XXV. „L'illustre Empereur Henri voyant les Archevêques, les „Evêques, les Ducs, les Marquis, & le Landgrave Hermann lui-même, „avec ses autres Enfans & Officiers, qui ne respiroient que le signe de „la Croix, & qui se portoient avec la plus vive ardeur à cette sainte „entreprise, il voulut satisfaire à leurs desirs, & publia un Edit général, pour former une Assemblée de tous les Princes dans la Ville de „Mayence ; *voulant accorder une licence privilégiée dans le Consistoire „Imperial, à tous ceux qui iroient à la Guerre sainte, par rapport à l'héritage de leurs possessions, en sorte que quiconque n'auroit point de Fils „d'une personne libre, pourroit leguer son heritage à une fille, ou à l'héritier quelconque le plus prochain dans la Généalogie : par où il se proposoit d'augmenter encore leur zele & leur dévotion.* Il se trouva néanmoins peu de personnes à cette Assemblée, & ceux qui y assisterent, „s'obligerent par promesse à l'Empereur de garder d'un consentement „volontaire une fidelité inviolable à sa posterité, qui lui succéderoit héréditairement à l'Empire. Mais assurément, s'ils n'avoient pas voulu „contracter cette obligation, ils auroient été arrêtés, & mis dans les „prisons publiques, comme Prisonniers d'Etat. Ceux donc qui étoient „présens, dans la crainte d'être dépouillés de leurs biens, demandèrent un délai interlocutoire, & promirent, que dans l'Assemblée „prochaine, qui devoit se tenir à Würtzbourg, ils appuyeroient cette „demande de l'Empereur auprès de tous les Princes, & qu'ils les engageroient par toutes les voyes qui dépendroient d'eux, à donner leur „consentement à ce que l'Empire devint hereditaire ; en sorte que si „leurs conseils étoient écoutés, l'affaire auroit une heureuse issue, „mais que s'il en arrivoit autrement, ils ne seroient responsables de „rien auprès de l'Empereur. Ensuite se rendant promptement à Würtzbourg, ils y donnerent leur consentement aux propositions de l'Empereur, mais d'une maniere fort foible. Car quelques Princes, „par la crainte, accorderent leurs voix à l'Empereur, d'autres y furent

„rent engagés par toutes sortes de voyes ; d'autres refusèrent de don-
 „ner aucune résolution décisive, protestant qu'ils n'avoient aucune
 „disposition à traiter cette affaire. Il fut donc aisé à l'Empereur de
 „comprendre par cette conduite des Princes, quels étoient leurs veri-
 „tables sentimens. Hermann, Landgrawe de Thuringe, présenta sa
 „fille encore en bas âge à l'Empire, & obtint qu'en vertu du suffrage
 „des Princes, l'Empereur lui confereroit le droit à ses Principautés.
 „ Cependant l'Empereur étant appelé par ses affaires en Ita-
 „lie, crut devoir agir par ses Ambassadeurs en Allemagne,
 „pour amener les esprits au point qu'il desiroit. Pour cet
 „effet il fit partir le Bourgrave Burchard (de Quernforde) qui se trou-
 „voit alors par hasard auprès de lui, & le chargea de Lettres pour
 „l'Allemagne lequel étant arrivé à Erford, renou-
 „vella devant tous les Princes la proposition de l'Empereur, & pro-
 „duisit les Lettres, par lesquelles il continuoit à demander que la suc-
 „cession à l'Empire fut rendue héréditaire dans sa famille, & que cela
 „fut réglé d'une maniere irrevocable dans cette Assemblée. Mais pre-
 „mierement, il n'y eut rien du tout de conclu à cet égard, & tout ce
 „qui en arriva fut, que les Princes fatigués des dépenses onereuses
 „qu'ils étoient obligés de faire, commencerent à se refroidir dans l'at-
 „tachement qu'ils portoient à l'Empereur qui voyant les dif-
 „ficultés que les Princes d'Allemagne opposoient à la Succession hé-
 „réditaire, prit aussi-tot une autre route, & dissimulant adroitement
 „ses intentions, employa les ruses ordinaires à ses Ancêtres, pour
 „effectuer ce dont il ne pouvoit venir à bout par autorité; aussi parut-
 „il bien clairement qu'il n'avoit point changé de volonté, lorsqu'il sem-
 „bla s'offrir une occasion très favorable d'obtenir ce qu'il avoit sou-
 „haité. Car ayant déclaré aux Princes qu'il vouloit se désister du pri-
 „vilège qui lui avoit été accordé à cet égard, leur esprit changea telle-
 „ment tout à coup, que ceux qui peu auparavant ne faisoient que plain-
 „tes & menaces, aimant mieux être proscrits & bannis que de souscri-
 „re, se rendirent à l'Assemblée qui fut indiquée à Francfort, & y élu-
 „rent pour Successeur à l'Empire Constantin (Frédéric) fils de l'Em-
 „pereur encore en bas âge ; & ramenés à si peu de frais de leur éloig-
 „nement

„gnement, ils s'épuiserent à combler l'Empereur* de loüanges. C'est ainsi que la paix succéda à la division qui régnoit auparavant entre l'Empereur & les Princes.“

XXVI. Quoique tout ce recit semble établir l'imputation faite à Henri d'avoir voulu abolir le droit d'élection à l'Empire, nous ne le croyons pourtant pas assez authentique, pour qu'on puisse y faire un fonds assuré. Le Compilateur de cette Chronique n'est point un Auteur contemporain, ni même d'un tems voisin du règne de Henri, puisqu'il va jusqu'à celui de Charles IV. & que le caractère du MS. *f* V.1 c. p. 119. rapporte aux tems de l'Empereur Sigismond. * De plus l'endroit de *Gervaise Tilberiensis* que nous avons cité ci-dessus §. XIX. ne s'accorde point entièrement avec celui de l'Auteur de cette Chronique, le premier assurant que la cause pour laquelle Henri étendit le droit de succéder aux fiefs de l'Empire, en l'accordant aux parens suivant les degrés de proximité, c'étoit pour obtenir la même chose à l'égard de l'Empire en faveur de sa postérité ; au lieu que l'autre, comme nous l'avons vu, rapporte la chose en ces termes : „Que le Landgrave Hermann, avec les autres Enfans & Officiers, ne respirant que le Signe de la Croix (l'Empereur) voulant accorder une licence privilégiée dans le Consistoire Imperial à tous ceux qui iroient à la Guerre Sainte, par rapport à l'héritage de leurs possessions, en sorte que quiconque n'auroit point de fils d'une personne libre, pourroit leguer son héritage à une fille, ou à l'héritier quelconque le plus prochain dans la Genealogie ; se proposa d'augmenter encore par ce moyen leur zele & leur dévotion.“ Peut-on s'empêcher de voir, que les accusateurs de Henri accumulent plusieurs choses qui ne sauroient subsister ensemble ; tandis qu'au contraire ceux qui ont écrit l'Histoire de ces tems-là, gardent le plus profond silence sur ces prétendues entreprises de l'Empereur Henri VI. suivant la remarque que nous avons déjà faite §. VII.

XXVII. Pour conclurre, nous nous rappelons encore ces paroles fort remarquables de *Pelix Faber*, Moine d'Ulm. † „Quoique la mémoire des Empereurs de Souabe soit demeurée en execration, & que

† Dans *Goldschmidt Haiminsfeld, Script. Rer. Suev. p. 120.*

„que cela soit fondé sur l'autorité des Saints Canons, auxquels il n'est
 „pas permis de contredire, il paroît cependant que si les Princes de
 „cette Maison avoient rencontré autant d'Apologiftes que d'Accusa-
 „teurs, autant d'Ecrivains favorablement difpofés pour eux, que de
 „laches détracteurs, on verroit fans contredit éclater bien des chofes
 „à leur avantage, & l'injuftice de l'état où ils ont été réduits, fe mani-
 „fefteroit. Mais comme les ennemis de ces Princes ont été en même
 „tems leurs Juges, un ennemi ne feroit fervir de témoin contre fon
 „ennemi, & la fimple négative fuffit pour le réfuter dans les règles.
 „*Us de test. quorrens.* La même chofe fe prouve par ce qu'on lit *in c.*
 „*veniens 2 de teste in fi.* Les Soiiabes donc, vaincus par les témoigna-
 „ges des Italiens leurs ennemis, gardent le fîlence, n'oppofant aucune
 „contradiction aux difcours, ni aux cris de leurs ennemis, & ne vou-
 „lant point, pour la paix de l'Eglife, fe défendre, comme ils le pour-
 „roient. C'eft ce qui fait que la haine demeure fur leur mémoire, &
 „cela verifie ce qui eft dit dans les Paradoxes des Stoïciens; *Qu'il n'y*
 „*a rien de fi incroyable, que les difcours ne fâchent rendre probable.*





DISSERTATION SUR HIPPOCRATE DE CHIO.

PAR M. CRAMER.



* Vie de
Solon, p. 413.
Trad. de Da-
cier. 1735. 12.
† Eude-
mior. L. VIII.
c. 14.
* Joh.
Gramm. in
Aristol. Phys.
L. I. p. 13. Edit.
Aldi. Ven.
1539.

† Proclus
in Eucl. Liv.
III. p. 59.

* Apud
Fabr. Bib. Gr.
II. 13. p. 505.

Hippocrate le Mathématicien étoit de Chio. Sa patrie le distingue du fameux Médecin qui étoit de Cos. *Plutarque* * nous dit qu'il avoit été Marchand. Mais le commerce ne lui réussit pas. Sans prudence, sans génie pour les affaires, il perdit, par sa sottise, une somme considérable avec les Receveurs du 50. à Byzance. C'est d'*Aristote* † que nous tenons ce caractère d'*Hippocrate*, & ce trait de sa vie. *Philoponus* * nous en apprend un autre, qui nous intéresse d'avantage. Notre Marchand eut le malheur de tomber entre les mains des Pirates, & d'y perdre tout son bien. Apparemment, que ces Corsaires se réfugièrent à Athènes, puisqu'il vint les y poursuivre. Mais le procès traînant en longueur, il s'amusa, dans son loisir, à écouter les Philosophes, & il prit tant de goût pour la Géométrie, qu'il y fit des progrès admirables. Cette Étude développa chez lui un talent sans pareil, † & qu'on n'auroit jamais crû trouver dans un Esprit d'ailleurs lent & bouché. On assure que *Clavius*, le Géomètre du XVI. Siècle, avoit un génie de la même trempe.

Je ne fais si les Mathématiques détournèrent *Hippocrate* du commerce ; mais du moins il en conserva l'esprit. Si l'on en croit *Jamblique*, * il se fit chasser de l'Ecole de *Pythagore*, pour

1

1

avoir voulu trafiquer de la Géometrie. Ce procédé ne passoit pas pour honnête; & il marquoit peu de jugement. Car les Pythagoriciens faisoient alors grande figure, & il n'y avoit point de meilleure compagnie que la leur.

Je n'enfle pas mes Eloges, & je ne me pique pas de peindre mon Heros uniquement par ses beaux côtés. Qu'on ne se laisse pourtant pas trop prévenir contre lui. Ce qui me reste à en dire est mieux. Il est rare qu'un Géometre ne paie tribut à la Physique. *Aristote* * nous a conservé un morceau de celle d'*Hippocrate*, qui marque quelque génie. C'est un Système sur les queues des Comètes. Notre Philosophe qui les regardoit, avec tous les Pythagoriciens, comme des Astres errants, souvent cachés sous les raions du Soleil, & souvent perdus dans l'immensité des Cieux, jugea fort bien que la queue ne leur est pas essentielle. Il l'attribue à des Vapeurs dont elles se chargent, & dans lesquelles les raions du Soleil venant à se rompre, font paroître un trait de lumière, lors que la Comète est dans une position qui permet à ces raions rompus de venir à nos yeux. Il prétend expliquer par ce Système, d'où vient que les Comètes ne paroissent que dans la partie Septentrionale des Cieux, & rarement ou jamais, entre les Tropiques & au delà, du côté du Midi. Il faut croire qu'on regardoit cela comme un Fait, puis qu'*Hippocrate* cherche à l'expliquer. Des observations postérieures contredisent ce Principe. Au reste dans le même endroit où *Aristote* cite notre Philosophe, il nous apprend le nom d'un de ses Disciples, qui pensoit sur les Comètes comme son Maître. Il s'appelloit *Eschyle*. * Meteorol. L. 6.

Mais le côté brillant d'*Hippocrate*, c'est la Géometrie. C'est lui, dit *Proclus*, † qui en a le premier composé des Elémens. C'est donc lui, qui a ouvert à son Siècle & aux Siècles suivans les portes de la Géometrie, en ramassant les découvertes considérables de ses Prédécesseurs, les rédigeant en bon ordre, & y ajoutant ce qui étoit nécessaire pour en faire un corps bien lié. C'est donc notre Géometre, pour le dire en passant, qui a jetté les premiers fondemens de l'admirable Ouvrage d'*Euclide*. Car le même *Proclus* nous en-
† In Eucl. L. I. p. 19.

gno qu'après *Hippocrate*, *Deon*, puis *Theandrus*, & ensuite *Hermosime*, travaillèrent à perfectionner les Elémens de la Géométrie, jusqu'à ce qu' *Euclide* vint & y mit la dernière main, avec tant de succès que la Posterité n'y a rien trouvé à changer. Revenons à *Hippocrate*.

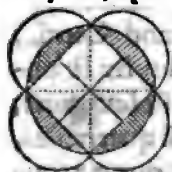
p. 20. Edit.

avag. 1544.

Eutocius, dans ses Comment. sur *Archimede*, * nous a conservé une lettre d' *Eratoſthene* au Roi *Protome*, dans laquelle il lui fait l'Histoire d'un Problème fameux dans la Géométrie. Un ancien Auteur Tragique, dit-il, introduit le Roi *Minos*, qui fait élever un Tombeau à *Glaucus*. On lui vient rapporter qu'on avoit donné 100. pieds en tout sens à cet édifice : mais il le trouve trop petit, & ordonne qu'on le fasse double. Si l'on donnoit 200. pieds à chacun de ses côtés, on le feroit huit fois plus grand. C'étoit donc un Problème à résoudre, que de doubler un Corps donné, en lui conservant la même figure. Et comme il n'est point de Corps plus simple que le Cube, ce Problème s'appelloit la Duplication du Cube. Longtems, dit *Eratoſthene*, les Géometres y furent embarrassés, lors qu'enfin *Hippocrate* de Chios s'avisâ le premier, qu'il falloit chercher deux moiennes proportionnelles entre deux droites données, dont l'une soit double de l'autre, parce qu'alors le cube de la plus petite des deux moiennes est justement le double du cube de la plus petite des deux données. En démontrant cette Proposition, il réduisit le Problème de la Duplication du Cube au Problème de l'invention de deux moiennes proportionnelles. Cette réduction n'est pas indifferente. Car encore que ce second Problème soit, tout comme le premier, inaccessible à la Géometrie Elementaire, il est bien plus facile d'en venir à bout par des tentatives, ou des voies mechaniques : & c'est beaucoup que d'avoir su réduire deux difficultés à une seule. C'est ainsi qu'on louë *Archimede* d'avoir réduit le Problème de la Quadrature du Cercle au Problème de la rectification de la Circonference, & d'avoir réduit à la quadrature du Cercle la mesure des Cones, des Cylindres, de la Sphère, & de leurs surfaces. Et c'est ainsi qu'aujourd'hui plusieurs beaux Problèmes ne sont résolus que *concessis figurarum quadraturis*, c'est à dire, que la solution de ces Problèmes est réduite à la quadrature de quelques espaces terminés par des lignes courbes. L'utilité de ces réductions est très grande dans

la Pratique. Aussi *Proclus*, qui attribue * à *Hippocrate* l'invention de cette Méthode, lui donne à ce sujet les plus grands Eloges, & en parle comme d'un génie aussi heureux dans la Géométrie que qui que ce soit. * In Euclid. L. III. p. 59.

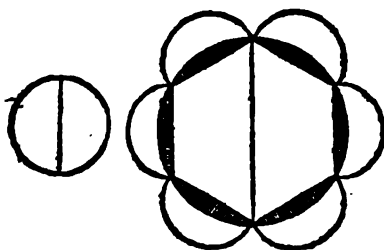
Mais la découverte d'*Hippocrate*, qui l'a fait le plus connoître à la Postérité, c'est la quadrature de la Lunule. Quoique ce soit une chose fort connue, il ne sera pas inutile d'en dire ici un mot. On appelle Lunule [*Μηνιαυος*] une figure de Croissant terminée par deux arcs de Cercles. Figurez-vous donc un Cercle, avec un quarré inscrit, dont les Diagonales sont des diamètres de ce Cercle. Imaginez de plus, quatre demi-cercles décrits sur les quatre côtés du Quarré,



qui sont avec les quatre arcs du grand Cercle quatre Lunules. Puisqu'un quarré n'est que la moitié du quarré de la Diagonale, & que les Cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres, le Cercle auquel le quarré est inscrit, & qui a pour diamètre la diagonale, est double d'un Cercle qui auroit pour diamètre le côté; il est donc égal aux quatre demi-cercles décrits sur les côtés de ce quarré. Ainsi étant, & du grand Cercle, & des quatre demi-cercles, qui lui sont égaux, les segments qui sont communs à ces Figures, il y aura égalité entre les restes, qui sont, d'une part le quarré inscrit au Cercle, & de l'autre part les quatre Lunules. Chaque Lunule est donc égale au quart du Quarré, qui est lui-même un Quarré.

Voilà le premier espace circulaire qui ait été quarré, & cette quadrature, indépendamment de ce qu'elle a de curieux, sert à prévenir une erreur où l'on pourroit tomber, & qu'il semble que *Descartes* † même n'a pas évitée. C'est de croire que les Lignes droites & les Courbes sont d'une nature si dissemblable qu'il est impossible de les comparer. *Hippocrate* avoit donc lieu de s'applaudir de sa découverte, & il meritoit toutes sortes d'eloges, s'il s'en fut tenu là. Mais quelques pas qu'il voulut faire plus loin, le firent tomber dans un Sophisme, que je ne fais si l'on trouvera ingénieux ou grossier. Le voici. Concevez deux Cercles, dont l'un ait un diamètre double de

† Geomet. Lib. II. p. 39. Edit. 1659. 4.



l'autre : il sera donc quatre fois plus grand. Inscrivez lui un Hexagone régulier, dont chaque côté, égal au demi-diamètre de ce grand Cercle, sera égal au diamètre entier du petit Cercle. Sur les six côtés de cet Hexagone décrivez six demi-cercles, qui avec les six arcs du grand Cercle font six Lunules. Chacun de ces six demi-cercles

étant égal à la moitié du petit Cercle, on aura, en comptant ces deux moitiés, huit demi-cercles, égaux ensemble à quatre Cercles tels que le petit, égaux par conséquent au grand Cercle, qui est quadruple du petit. Donc si on ôte les segments, qui sont communs au grand Cercle & aux huit petits demi-cercles, les restes sont égaux. De la part du grand Cercle, il reste l'Hexagone, & de la part des huit demi-cercles, il reste le petit Cercle & les six Lunules. Si donc on retranche de l'Hexagone, figure rectiligne & quarrable, les six Lunules, qui sont aussi quarrables, il restera un espace quarrable égal au petit Cercle. On a donc trouvé la quadrature du Cercle, cherchée avec tant d'ardeur dès lors comme aujourd'hui.

C'est grand dommage qu'un raisonnement qui débute fort bien, & qui aboutit à une Conclusion si désirée, se tourne en Sophisme à la dernière ligne. L'erreur consiste en ce qu'on affirme que les six Lunules sont quarrables. Quoi, direz, vous, ne le sont-elles pas ? Non, Celles qu'*Hippocrate* a quarrées, ne sont pas celles qu'il emploie ici. Les premières étoient comprises entre une demi-circonférence & un quart de circonférence. Les autres sont bien terminées d'un côté par une demi-circonférence, mais l'arc qui les termine de l'autre côté n'est que la sixième partie de la circonférence. Il semble que ce n'est rien que la différence de ces deux sortes de Lunules : mais dans le point dont il s'agit, c'est tout. Les unes sont quarrables. Les autres ne le sont pas, comme elles devroient l'être pour donner la quadrature du Cercle. On a peine à croire qu'*Hippocrate* ait pu s'y tromper, lui qui étoit si bon Geometre. Aussi *Blancanus* * plein de zèle

* Loca
Mathem. A-
ristot. §. 16.

zèle pour l'honneur de notre Mathématicien, prétend-il qu'il n'étoit pas lui même la dupe de son Sophisme, & qu'il le proposoit seulement pour se divertir, & pour tenter l'habileté des autres Géomètres. Il faut avoir bien de la pénétration pour lire si avant dans les pensées. Je ne saurois voir les choses de si loin. Il me suffit qu'*Hippocrate* ait cru, on ait pu croire, avoir trouvé la quadrature du Cercle par le moien des Lunules. Il faut vous nommer mes garants. Le premier, c'est *Aristote* qui parle en plusieurs endroits du Sophisme des Lunules *, ou, comme il l'appelle quelque fois, de la Quadrature par les segments. † *Art. I. Livre de Sophist. Elench.* * il attribue nommément à *Hippocrate* ce Paralogisme (*ψευδογχαφήμα*, expression heureuse, puisque l'erreur ne vient que d'une fausse figure,) & il l'oppose aux Sophismes d'*Antiphon* & *Bryson*, lesquels, dit-il, péchant contre les Principes de la Géométrie, ne méritent point d'être réfutés par un Géomètre; au lieu que celui d'*Hippocrate* retient les principes & demande une réfutation Géométrique. Ce qu'*Aristote* n'indique qu'en deux mots, les Commentateurs l'expliquent au long. Je ne parle pas des Commentateurs modernes, auxquels on feroit on droit de demander de qui ils l'ont appris. Je parle des anciens, *Alexandre d'Aphrodisée*, *Theophrastus*, *Simplicius*, *Jean le Grammairien*, &c. qui ont écrit aux V. VI. & VII. Siècle, c'est à dire, dans des tems où il subsistoit encore des monuments, que, dans la suite, la faux du tems, l'ignorance des Chrétiens, & l'aveugle piété des Arabes, ont consummés. Ils ne manquent point à nous dire, dans leurs Commentaires sur les endroits cités d'*Aristote*, que le Sophisme des Lunules est d'*Hippocrate*, de Chio, qui a le premier considéré & quarré cette figure. Leur témoignage n'est pas une simple tradition, & il est respectable par leur unanimité.

On ne peut guères douter que ce ne soit à ce même Sophisme que fait allusion *Eurocius*, dans la Préface de son Commentaire sur la mesure du Cercle par *Archimède*. † Il y dit que ce grand Homme a recherché une chose, sur laquelle *Hippocrate* de Chio & *Antiphon* s'é- tant fort exercés n'ont produit que les Paralogismes connus de ceux

qui

* Anal. prior. II. 25.

† Physic. I. 2. Cap. 10.

† Pag. 49. Edit. Hervag.

qui ont lu l'Histoire de la Geometrie par *Eudemus*, & les *Κήρια* d'*Aristote*. Je laisse ce Titre en Grec, ne sachant comment le rendre en François. *Κήριον* signifie un gateau de Cire, un Raion de miel. Mais quel rapport de ce mot avec le Titre d'un Livre ? Il est vrai que les Titres singuliers peuvent être bien anciens, puisqu'ils ont leur origine dans la bizarrerie de l'Esprit humain & dans l'envie de mettre de l'esprit par tout.

A cette nuée de temoins, *M. Heinius* oppose uniquement *Proclus*, qui, dans le II. Livre de son Comment. sur *Euclide*, attribue la quadrature de la Lunule à *Oenopide*. Il seroit pourtant juste de balancer son témoignage avec celui des autres, & de discuter lequel merite la préférence. Mais sans nous arrêter à cette comparaison, j'oppose à *Proclus* *Proclus* lui-même. Au III. Livre du Commentaire *
 * Pag. 59. cité, parlant d'*Hippocrate* de Chio, à l'occasion de sa Méthode des réductions, il dit positivement, qu'il a quarré la Lunule, *ὅς καὶ Μηνίσκων τετραγώνισεν*. A qui croirons-nous donc ; si *Proclus* est notre seul Oracle ? Sera-ce à *Proclus*, qui affirme qu'*Hippocrate* a quarré la Lunule, ou à *Proclus* qui donne cette Invention à un autre. Je ne erois pas que ce Problème soit fort difficile à résoudre.

Je ne pense pas même que c'en soit un. Dans l'endroit où on veut que *Proclus* parle d'*Oenopide*, comme de celui qui a quarré la Lunule, je prétends au contraire que c'est à *Hippocrate* qu'il en attribue l'invention. Comme le sentiment opposé est celui de *M. Heinius* & *Fabricius*, † deux Savants dont les lumieres sont infiniment au dessus des miennes, je n'oserois penser autrement qu'eux, sans les plus fortes
 † Bibl. des miennes, je n'oserois penser autrement qu'eux, sans les plus fortes
 preuves. Je vais tacher de les développer, & pour cet effet, je présente d'abord le Texte de *Proclus*, tel qu'il se trouve dans l'édition unique, à ce que je pense, de cet Auteur. C'est celle d'*Hervagius*, à Basle 1533. On y lit pag. 49. Μετὰ δὲ τῶτον [Πυθαγόρου] Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος πολλῶν ἐφήσατο κατὰ Γεωμετρίαν καὶ Ὀνοπίδης ὁ Χίος, ὁ τὸν τῷ Μηνίσκῳ τετραγώνισμον εὐρῶν, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναιὸς ὀλίγω νεώτερος ἢ τῷ Αναξαγόρῳ, ὃν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς Ἀ-
 γορασὶς

τετραταῖς διηγημένους, ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δοξαν λαβόντων. Εἴ
οἱς ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ τοῦ τῷ Μηρίσκῳ τετραγώνισμον εὐρύων, καὶ Θεώ-
δωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ Γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Πρῶτος γὰρ
ὁ ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ σοίχῃα συνέγραψε. Πλάτων δὲ
ἐπὶ τούτῳ γένομενος καὶ τ. λ.

Je conviens ensuite avec ces deux Messieurs que cette phrase
repetée, ὁ τὸν τῷ Μηρίσκῳ τετραγώνισμον εὐρύων, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρη-
ναῖος doit être retranchée dans l'un des deux endroits où elle se trou-
ve. Il n'est point croiable qu'*Oenopide* & *Hippocrate* aient tous deux
trouvé la Lunule. La répétition de *Theodore* de Cyrene est visiblement
vicieuse, & le mot *Χῖος*, qui précède la phrase dans l'un &
l'autre endroit, a pu facilement donner lieu au Copiste, ou à l'Impri-
meur, de repeter cette ligne par erreur. Mais au lieu que M. *Heinius*
& *Fabricius* la retranchent de la seconde place, je crois qu'il faut
plûtôt l'oter de la première, & voici mes raisons.

1. Ces Messieurs font dire à *Proclus* que c'est *Oenopide*, & non
Hippocrate, qui a quarré la Lunule: ce qui est contraire au témoigna-
ge d'*Aristote*, de tous ses Commentateurs, & de *Proclus* même.

2. Selon eux, *Proclus*, après avoir nommé *Anaxagoras*, *Oeno-
pide*, & *Theodore*, dit que *Platon* en a fait mention dans son Dialogue
des Amants. Cette citation seroit fautive. *Platon* dans cet Ouvrage
ne parle que d'*Anaxagoras* & d'*Oenopide*. Il ne dit pas un mot de
Theodore.

3. Ils font faire quelques solécismes à *Proclus*. Car aiant effacé
ce qu'ils veulent qu'on supprime, il resteroit Εἴ οἱς ἱπποκράτης ὁ
Χῖος ἐγένοντο περὶ Γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Qui pourroit supporter ces
pluriels après le singulier? Aussi M. *Fabricius* change-t-il, de son au-
torité, ἐγένοντο en ἐγένετο, & ἐπιφανεῖς en ἐπιφανής.

4. Malgré cette correction, il reste quelque incongruité, en ce
que *Proclus* repete le nom d'*Hippocrate* dans la même ligne sans né-
cessité. Ces Mrs. lui font dire, Εἴ οἱς ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐγένετο πε-

ἐ. Γεωμετρίαν ἐπιφανῆς. Πρῶτος γὰρ ὁ Ἰπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ σοιχεῖα συνέγραψε. C'est au moins un défaut de style, dont on ne trouvera guères d'exemples dans cet Auteur.

5. Un peu plus haut, *Proclus* disoit, Ἀναξαγόρας . . . καὶ Οἰνοπίδης . . . Καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ὡλίγων νεώτερος ἢ τῷ Ἀναξαγόρῃ. Veut-il dire de *Theodore* seul, qu'il étoit un peu plus jeune qu'*Anaxagoras*? Mais alors, pourquoi placer *Oenopide* entre deux, & le joindre à *Theodore* plutôt qu'à *Anaxagoras*? Veut-il dire d'*Oenopide* & de *Theodore*, qu'ils ont été un peu plus jeunes qu'*Anaxagoras*? Mais alors pourquoi νεώτερος, & non pas νεώτεροι?

6. Jevite tous ces inconveniens, sans faire aucun changement au Texte que celui d'effacer de la premiere place cette phrase, dont on convient qu'elle doit être retranchée quelque part. De cette maniere, *Proclus* dit, qu'après Pythagore, *Anaxagoras de Clazomène* s'attacha extrêmement à la Géometrie, aussi bien qu'*Oenopide de Cbio*, un peu plus jeune qu'*Anaxagoras*, desquels Platon parle dans ses Amans, comme ayant acquis de la réputation dans les Mathématiques. Après eux, Hippocrate de Cbio, celui qui a trouvé la quadrature de la Lunule, & *Theodore de Cyrene*, se sont rendus illustres dans la Géometrie. Car Hippocrate est le premier qui en a composé les Elémens, & Platon formé sur celui-là, &c.

7. Ce narré s'accorde parfaitement avec ce que nous savons d'ailleurs de la Chronologie de ces Mathématiciens. *Anaxagoras* est né, selon *Diogene Laërce*, la 1. année de la 70. Olympiade. *Oenopide*, un peu plus jeune que lui, sera né vers la 72. *Hippocrate* & *Theodore*, qui sont venus après, auront paru vers la 80 : de sorte que Platon, né dans la 88. Olymp. aura fort bien pu être disciple de *Theodore*, comme nous l'apprend *Diogene Laërce* ; III. 6. & comme *Proclus* semble l'insinuer.

Il est difficile de s'arranger aussi bien dans le Systême de M. *Heinius* & *Fabricius*. Si *Theodore* est seulement un peu plus jeune qu'*Anaxagoras*, il faut qu'il soit né vers la 72. ou au plus, la 75. Olymp. &

& qu'il ait eu 60. ans à la naissance de *Platon*. Il auroit donc été bien vieux, lorsque *Platon*, âgé d'environ 30. ans, alla étudier sous lui à Cyrène.

8. Ces preuves se fortifient par cette considération. C'est qu'il y a un ordre dans les vérités Géométriques qui ne permet pas d'entendre, moins encore d'inventer, celles qui suivent sans connoître celles qui précédent. La quadrature de la Lunule suppose nécessairement, ce me semble, ces deux Propositions; qu'un quarré n'est que la moitié du quarré de sa diagonale, & que les Cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres. Je crois volontiers que la première a été connuë d'*Oenopide*, & avant lui de *Pythagore*, parce que c'est une conséquence fort simple de la Proposition trouvée par ce grand Philosophe, que le quarré de l'hypoténuse est égal à ceux des deux autres côtés. Mais je ne pense pas de même de la seconde. Du moins la démonstration qu'en donne *Euclide*, Liv. XII. Prop. 2. suppose une Géométrie assez avancée. J'aurois donc peine à croire qu'*Oenopide* en fut venu là, lui dont les principales découvertes ont été, selon *Proclus* * la 12. & la 23. Prop. du I. Livre des Eléments: *Abaisser une perpendiculaire, & Faire un angle égal à un angle*. Il y a loin de là à la Lunule. Mais dans les 30. ou 40. ans, qui se sont écoulés d'*Oenopide* à *Hippocrate*, la Géométrie, cultivée avec ardeur par les plus beaux Génies, a fait sans doute de grands progrès, & celui-ci, qui avoit essayé & avancé jusqu'à un certain point le Problème de la Duplication du Cube, a pu fort naturellement être tenté de travailler sur la quadrature du Cercle, & a dû avoir les principes nécessaires pour la quadrature de la Lunule.

* Libr. cit. pag. 76. & 87.

Si j'ai réussi à réhabiliter *Hippocrate* dans la gloire de l'invention de la Lunule, il sera assez inutile d'écarter les ressemblances que *M. Heinius* trouve entre *Oenopide* & *Hippocrate*, & desquelles il semble vouloir inferer qu'*Hippocrate* n'est qu'un personnage imaginaire copié d'après *Oenopide*.

Ils ont, dit-il, tous deux fleuri pendant les mêmes années. Mais, au contraire, *Proclus*, de quelque manière qu'on le lise, dit qu'*Hip-*

Hippocrate n'est venu qu'après *Oenopide*. Il se peut bien que les années de la vieillesse de l'un aient été celles de la jeunesse de l'autre. Mais cela même les distingue assez.

Ils ont été, continue M. *Heinius*, tous deux peu estimables en Physique. Je conviens qu'il le prouve assez bien d'*Oenopide*, quoiqu'il soit vrai de dire que les Physiciens de cette date-là méritent quelque indulgence. Mais je ne vois pas qu'il ait montré qu'*Hippocrate* étoit un mauvais Physicien. Son opinion sur les queues des Comètes, qui est tout ce qui nous reste de sa Physique, peut bien être fausse, mais elle n'est pas si fort à mépriser que plusieurs Modernes ne l'aient fait revivre. Voyez *Riccioli Almag. L. VIII. Sect. II. chap. 25*. Il semble même qu'on en peut conclure que notre Philosophe avoit déjà observé que les queues des Comètes s'étendent toujours du côté opposé au Soleil, observation dont les Modernes se sont fait honneur.

Il est vrai que Mr. *Heinius* trouve le caractère d'un Physicien ignorant dans la simplicité d'*Hippocrate*, qui lui fit perdre une grosse somme avec les Reçevueurs de Byfance. Mais je crois que de très habiles Physiciens peuvent être la dupe des Fermiers, & que ceux qui n'ont aucune teinture de Physique n'en sont pas moins propres à éviter les pièges de ces gens-là.

Mr. *Heinius* ajoute qu'*Hippocrate*, aussi bien qu'*Oenopide*, a été en Egypte. Il se fonde sur le passage de *Plutarque*, qui parlant des Philosophes qui ont fait le commerce, nomme *Thales*, *Hippocrate* & *Platon*. Mais quoique le premier & le dernier aient fait le voyage d'Egypte, je ne vois pas que Mr. *Heinius* soit en droit d'inferer qu'il en ait de même d'*Hippocrate*. *Plutarque* ne le joint aux deux autres que comme ayant fait le commerce. Ne pouvoit on pas commercer, sans voyager en Egypte?

Je ne sens pas, comme Mr. *Heinius*, que le trafic que faisoit *Hippocrate* de sa Géométrie, soit dans le caractère d'*Oenopide*. Il n'a point établi que ce Philosophe fut avare & intéressé.

Enfin

Enfin, comme il n'est plus vraisemblable qu'*Oenopide* ait part à la quadrature de la Lunule, on peut bien me permettre de conclure qu'*Oenopide* & *Hippocrate* ont été deux hommes différens; quoique tous deux de Chio, tous deux Mathématiciens, tous deux de la Secte de Pythagore.

Je finis par quelques Réflexions mathématiques que la Lunule d'*Hippocrate* m'a occasionnées. Les voici.

TROUVER UNE INFINITÉ DE LUNULÈS QUARRABLES.

La Lunule CEDFC (Fig. 1.) sera quarrable, si le Secteur AC ED compris entre l'arc CED & ses raions AC, AD, est égal au Secteur BCFD, compris entre l'arc CFD & ses raions BC, BD. Car étant, de l'un & de l'autre de ces deux Secteurs égaux, la partie commune BCED, il y aura égalité entre les restes, qui sont, d'un côté, le quadrilatère ACBD, & de l'autre la Lunule CEDFC.

Or les Secteurs ACED, BCFD sont égaux, si les angles CAD, CBD, ou leurs moitiés CAF, CBF sont entr'eux en raison doublée inverse des raions AC, BC. Car si l'on mène par le centre B le raion BG parallèle à AC, le Secteur GBF, est au Secteur CBF du même Cercle, comme l'angle GBF ou son égal CAE, à l'angle CBF. Mais le même secteur GBF est au secteur semblable CAE en raison doublée des raions BG ou BC & AC. Donc si les angles CAE, CBF sont en raison doublée inverse des raions AC, BC, le secteur GBF a la même raison aux secteurs CBF, CAE. Ils sont donc égaux, aussi bien que leurs doubles CBDF, CADE, & conséquemment la Lunule CEDFC est quarrable.

Pour avoir donc tant de Lunules quarrables qu'on voudra, il ne s'agit que de décrire sur une même corde CD deux arcs CED, CFD tels que les angles au Centre CAD, CBD, soient en raison doublée inverse des raions AC, BC.

La Solution générale de ce Problème est transcendente, & suppose la multisection indéfinie de l'angle. Il faut donc recourir à des

Courbes transcendentes. Par ex. si après avoir divisé la demi-circonférence ADB (Fig. 2.) en tant de parties égales qu'on voudra, on divise le diamètre AB en un pareil nombre de parties égales, & que prenant les points de division correspondants, E sur la circonférence, & F sur le diamètre on mène les droites EG, FG parallèles aux rayons perpendiculaires CA, CD; que du point G où ces droites se coupent, on mène la droite GA & la perpendiculaire AH, qui coupe en H la droite GE prolongée, on pourra avoir une infinité de points H de la Courbe ALHKA, qui donne fort simplement une infinité de Lunules quarrables. On voit que la nature consiste en ce que AF ou IG troisieme proportionnelle de l'ordonnée HI à l'abscisse AI a une raison donnée à l'arc correspondant AE savoir, celle du diamètre AB à la demi-circonf. ADB.

Donc, si on mène une droite quelconque CL parallele à CD, qui coupe cette Courbe aux points K & L, desquels on mène KM, LN, paralleles à AB, & qui rencontrent la circonférence en M & N qu'on tire le rayon NC & par le point M une droite MO parallele à NC, qui coupe en O la droite AB prolongée s'il le faut; qu'enfin du centre O on décrive par le point M l'arc de Cercle MTV; Je dis que cet arc comprendra avec l'arc MAV une Lunule MAVTM, qui sera quarrable.

Car, par la nature de la Courbe, l'arc AM est à la 3^e. proportionnelle de KR à RA, qui est $AR^2 : KR$ comme l'arc AN à la 3^e. proportionnelle de LS à AS, qui est $AS^2 : LS$. Donc, *alternando*, l'arc AM est à l'arc AN, ou l'angle ACM à l'angle ACN, ou TOM, comme $AR^2 : KR$ est à $AS^2 : LS$, soit AR^2 à AS^2 , puisque KR & LS sont égales, ou comme PM^2 à QN^2 , ou enfin comme OM^2 à CN^2 , puisque les triangles POM, QCN sont semblables. Ainsi les secteurs ACM, TOM ont leurs angles en raison doublée inverse de leurs rayons. Ils sont donc égaux, aussi bien que les secteurs doubles MAVCM, MTVOM. La Lunule MAVTM est donc égale au quadrilatère MOVC, & par conséquent quarrable.

Mais

Mais laissant cette Construction générale ; qui doit passer pour mécanique, puisque la Courbe AKHLA est transcendante, & qui ne peut proprement servir qu'à trouver des Solutions approchées : Si l'on veut se renfermer dans les bornes des solutions algébriques, on pourra concevoir la Courbe KCL (Fig. 1.) dont la nature soit telle que menant d'un de ses points quelconque C, aux deux points donnés A, B, les droites CA, CB, les angles CAF, CBF soient entr'eux en raison donnée de m à n ; & le Cercle ICH, dont la nature est telle, que menant d'un de ses points quelconque C les droites CA, CB, elles soient entr'elles en raison de \sqrt{m} à \sqrt{n} . Le point C, où ces deux Courbes se coupent, sera celui par lequel décrivant, des centres A & B, les arcs CED, CFD, les secteurs ACEDA, BCFDB seront égaux, & la Lunule CEDFC fera quarrable.

Quand la raison de m à n est rationnelle, la Courbe KCL est algébrique. On peut en trouver facilement une infinité de points par les Sections angulaires, & même par la Géométrie élémentaire, toutes les fois qu'un des deux nombres, m ou n , ait ou l'unité, ou une puissance de 2. Il seroit même aisé de construire un Instrument qui feroit tourner deux droites AC, BC, autour des points A, B, de sorte que leurs vitesses angulaires fussent en raison de m à n ; & alors l'intersection C de ces deux droites décriroit la Courbe KCE.

L'équation générale de cette Courbe, en nommant AB, 1 ; AP, x ; BP, z ; PC, y ; est $\pm \left(\frac{y - z \sqrt{-1}}{y + z \sqrt{-1}} \right)^m = \left(\frac{y - x \sqrt{-1}}{y + x \sqrt{-1}} \right)^n$, où le signe + doit servir, quand les deux nombres m & n sont impairs, & le signe —, quand l'un des deux est pair. Si on développe ces Puissances, qu'on ôte les termes communs de part & d'autre, & qu'on divise par les communs diviseurs, il en résultera cette équation

$$x^2 - \frac{n-1}{1}x + \frac{n-2}{2}x - \frac{n-3}{3}x + \frac{n-4}{4}x - \frac{n-5}{5}x + \dots$$

$$-mx^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{m}{1} x^{\frac{n-2}{2}} - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{m}{4} x^{\frac{n-4}{2}} + \dots$$

$$-\frac{n}{1} \times \frac{m}{1} \times \frac{m-2}{2} x^{\frac{n-1}{2}} y^{\frac{m-2}{2}} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} x^{\frac{n-3}{2}} y^{\frac{m-2}{2}}$$

$$+ \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \frac{m-5}{6} \times \frac{m-6}{7} \times \frac{m-7}{8} \times \frac{m-8}{9} \times \frac{m-9}{10} \times \frac{m-10}{11} \times \frac{m-11}{12} \times \frac{m-12}{13} \times \frac{m-13}{14} \times \frac{m-14}{15} \times \frac{m-15}{16} \times \frac{m-16}{17} \times \frac{m-17}{18} \times \frac{m-18}{19} \times \frac{m-19}{20} \times \frac{m-20}{21} \times \frac{m-21}{22} \times \frac{m-22}{23} \times \frac{m-23}{24} \times \frac{m-24}{25} \times \frac{m-25}{26} \times \frac{m-26}{27} \times \frac{m-27}{28} \times \frac{m-28}{29} \times \frac{m-29}{30} \times \frac{m-30}{31} \times \frac{m-31}{32} \times \frac{m-32}{33} \times \frac{m-33}{34} \times \frac{m-34}{35} \times \frac{m-35}{36} \times \frac{m-36}{37} \times \frac{m-37}{38} \times \frac{m-38}{39} \times \frac{m-39}{40} \times \frac{m-40}{41} \times \frac{m-41}{42} \times \frac{m-42}{43} \times \frac{m-43}{44} \times \frac{m-44}{45} \times \frac{m-45}{46} \times \frac{m-46}{47} \times \frac{m-47}{48} \times \frac{m-48}{49} \times \frac{m-49}{50} \times \frac{m-50}{51} \times \frac{m-51}{52} \times \frac{m-52}{53} \times \frac{m-53}{54} \times \frac{m-54}{55} \times \frac{m-55}{56} \times \frac{m-56}{57} \times \frac{m-57}{58} \times \frac{m-58}{59} \times \frac{m-59}{60} \times \frac{m-60}{61} \times \frac{m-61}{62} \times \frac{m-62}{63} \times \frac{m-63}{64} \times \frac{m-64}{65} \times \frac{m-65}{66} \times \frac{m-66}{67} \times \frac{m-67}{68} \times \frac{m-68}{69} \times \frac{m-69}{70} \times \frac{m-70}{71} \times \frac{m-71}{72} \times \frac{m-72}{73} \times \frac{m-73}{74} \times \frac{m-74}{75} \times \frac{m-75}{76} \times \frac{m-76}{77} \times \frac{m-77}{78} \times \frac{m-78}{79} \times \frac{m-79}{80} \times \frac{m-80}{81} \times \frac{m-81}{82} \times \frac{m-82}{83} \times \frac{m-83}{84} \times \frac{m-84}{85} \times \frac{m-85}{86} \times \frac{m-86}{87} \times \frac{m-87}{88} \times \frac{m-88}{89} \times \frac{m-89}{90} \times \frac{m-90}{91} \times \frac{m-91}{92} \times \frac{m-92}{93} \times \frac{m-93}{94} \times \frac{m-94}{95} \times \frac{m-95}{96} \times \frac{m-96}{97} \times \frac{m-97}{98} \times \frac{m-98}{99} \times \frac{m-99}{100} \times \frac{m-100}{101} \times \frac{m-101}{102} \times \frac{m-102}{103} \times \frac{m-103}{104} \times \frac{m-104}{105} \times \frac{m-105}{106} \times \frac{m-106}{107} \times \frac{m-107}{108} \times \frac{m-108}{109} \times \frac{m-109}{110} \times \frac{m-110}{111} \times \frac{m-111}{112} \times \frac{m-112}{113} \times \frac{m-113}{114} \times \frac{m-114}{115} \times \frac{m-115}{116} \times \frac{m-116}{117} \times \frac{m-117}{118} \times \frac{m-118}{119} \times \frac{m-119}{120} \times \frac{m-120}{121} \times \frac{m-121}{122} \times \frac{m-122}{123} \times \frac{m-123}{124} \times \frac{m-124}{125} \times \frac{m-125}{126} \times \frac{m-126}{127} \times \frac{m-127}{128} \times \frac{m-128}{129} \times \frac{m-129}{130} \times \frac{m-130}{131} \times \frac{m-131}{132} \times \frac{m-132}{133} \times \frac{m-133}{134} \times \frac{m-134}{135} \times \frac{m-135}{136} \times \frac{m-136}{137} \times \frac{m-137}{138} \times \frac{m-138}{139} \times \frac{m-139}{140} \times \frac{m-140}{141} \times \frac{m-141}{142} \times \frac{m-142}{143} \times \frac{m-143}{144} \times \frac{m-144}{145} \times \frac{m-145}{146} \times \frac{m-146}{147} \times \frac{m-147}{148} \times \frac{m-148}{149} \times \frac{m-149}{150} \times \frac{m-150}{151} \times \frac{m-151}{152} \times \frac{m-152}{153} \times \frac{m-153}{154} \times \frac{m-154}{155} \times \frac{m-155}{156} \times \frac{m-156}{157} \times \frac{m-157}{158} \times \frac{m-158}{159} \times \frac{m-159}{160} \times \frac{m-160}{161} \times \frac{m-161}{162} \times \frac{m-162}{163} \times \frac{m-163}{164} \times \frac{m-164}{165} \times \frac{m-165}{166} \times \frac{m-166}{167} \times \frac{m-167}{168} \times \frac{m-168}{169} \times \frac{m-169}{170} \times \frac{m-170}{171} \times \frac{m-171}{172} \times \frac{m-172}{173} \times \frac{m-173}{174} \times \frac{m-174}{175} \times \frac{m-175}{176} \times \frac{m-176}{177} \times \frac{m-177}{178} \times \frac{m-178}{179} \times \frac{m-179}{180} \times \frac{m-180}{181} \times \frac{m-181}{182} \times \frac{m-182}{183} \times \frac{m-183}{184} \times \frac{m-184}{185} \times \frac{m-185}{186} \times \frac{m-186}{187} \times \frac{m-187}{188} \times \frac{m-188}{189} \times \frac{m-189}{190} \times \frac{m-190}{191} \times \frac{m-191}{192} \times \frac{m-192}{193} \times \frac{m-193}{194} \times \frac{m-194}{195} \times \frac{m-195}{196} \times \frac{m-196}{197} \times \frac{m-197}{198} \times \frac{m-198}{199} \times \frac{m-199}{200} \times \frac{m-200}{201} \times \frac{m-201}{202} \times \frac{m-202}{203} \times \frac{m-203}{204} \times \frac{m-204}{205} \times \frac{m-205}{206} \times \frac{m-206}{207} \times \frac{m-207}{208} \times \frac{m-208}{209} \times \frac{m-209}{210} \times \frac{m-210}{211} \times \frac{m-211}{212} \times \frac{m-212}{213} \times \frac{m-213}{214} \times \frac{m-214}{215} \times \frac{m-215}{216} \times \frac{m-216}{217} \times \frac{m-217}{218} \times \frac{m-218}{219} \times \frac{m-219}{220} \times \frac{m-220}{221} \times \frac{m-221}{222} \times \frac{m-222}{223} \times \frac{m-223}{224} \times \frac{m-224}{225} \times \frac{m-225}{226} \times \frac{m-226}{227} \times \frac{m-227}{228} \times \frac{m-228}{229} \times \frac{m-229}{230} \times \frac{m-230}{231} \times \frac{m-231}{232} \times \frac{m-232}{233} \times \frac{m-233}{234} \times \frac{m-234}{235} \times \frac{m-235}{236} \times \frac{m-236}{237} \times \frac{m-237}{238} \times \frac{m-238}{239} \times \frac{m-239}{240} \times \frac{m-240}{241} \times \frac{m-241}{242} \times \frac{m-242}{243} \times \frac{m-243}{244} \times \frac{m-244}{245} \times \frac{m-245}{246} \times \frac{m-246}{247} \times \frac{m-247}{248} \times \frac{m-248}{249} \times \frac{m-249}{250} \times \frac{m-250}{251} \times \frac{m-251}{252} \times \frac{m-252}{253} \times \frac{m-253}{254} \times \frac{m-254}{255} \times \frac{m-255}{256} \times \frac{m-256}{257} \times \frac{m-257}{258} \times \frac{m-258}{259} \times \frac{m-259}{260} \times \frac{m-260}{261} \times \frac{m-261}{262} \times \frac{m-262}{263} \times \frac{m-263}{264} \times \frac{m-264}{265} \times \frac{m-265}{266} \times \frac{m-266}{267} \times \frac{m-267}{268} \times \frac{m-268}{269} \times \frac{m-269}{270} \times \frac{m-270}{271} \times \frac{m-271}{272} \times \frac{m-272}{273} \times \frac{m-273}{274} \times \frac{m-274}{275} \times \frac{m-275}{276} \times \frac{m-276}{277} \times \frac{m-277}{278} \times \frac{m-278}{279} \times \frac{m-279}{280} \times \frac{m-280}{281} \times \frac{m-281}{282} \times \frac{m-282}{283} \times \frac{m-283}{284} \times \frac{m-284}{285} \times \frac{m-285}{286} \times \frac{m-286}{287} \times \frac{m$$

$$+ \frac{n}{1} \times \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{2} \times \frac{m-4}{4},$$

$$-\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} x^5 \cdot z^{m-5} y^4$$

dans laquelle, quoiqu'il paroisse trois inconnûes, il est pourtant aisé de les réduire à deux, puisque $z = x - 1$, ou $x = z + 1$. Cette équation est ordonnée selon les puissances paires de y , y^0 , y^2 , y^4 , y^6 , y^8 , &c. & l'on en trouvera sans peine les coefficients par cette Règle, quoique d'ailleurs la Loy de continuation soit assez manifeste.

Qu'on élève $z + 1$ à la puissance m , & $x + 1$ à la puissance n ,
& soient ces puissances $z^m + a z^{m-1} + b z^{m-2} + c z^{m-3}$ &c.

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \&c.$ Qu'on change, de deux en deux, les signes des termes de ces series, de sorte qu'alternativement les termes correspondants aient même signe & différents signes, comme on le voit-ici,

$$z^m - az^{m-1} - bz^{m-2} + cz^{m-3} + dz^{m-4} - ez^{m-5} \&c.$$

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} \&c.$$

Après quoi, pour avoir le coefficient de y^2 , on prendra les deux premiers termes de chaque série, & les multipliant en croix, on aura $Ax^{n-1}z^m - ax^n z^{m-1}$. Pour avoir le coefficient de yy , on prendra les quatre premiers termes de chaque série & les multipliant les uns par les autres dans un ordre retrograde, on aura $-Cx^{n-3}z^m + Bax^{n-2}z^{m-1} - Abx^{n-1}z^{m-2} + cx^n z^{m-3}$. De même, prenant les six premiers termes de chaque série, & les multipliant en ordre retrograde, on aura $Ex^{n-5}z^m - Dax^{n-4}z^{m-1} + Cbx^{n-3}z^{m-2} - Bcx^{n-2}z^{m-3} + Adx^{n-1}z^{m-4} - ex^n z^{m-5}$, pour le coefficient de y^4 , & ainsi de suite. C'est ainsi qu'on a calculé ces équations,

si $m=1, n=2 \dots (xx-2x) + yy = 0$. Equation au Cercle, conformément à Eucl. III, 20

si $m=1, n=3 \dots (2x^3-3xx) + (2x+1)yy = 0 \dots$ Equat. à une Courbe du 3^e. Ordre, Espèce 4^{ie}. de Mr. Newton.

si $m=2, n=3 \dots (x^4-4x^3+3xx) + (2xx-4x-1)yy + y^4 = a$.

si $m=1, n=4 \dots (3x^4-4x^3) + (2xx-4x)yy - y^4 = a$.

si $m=3, n=4 \dots (x^6-6x^5+9x^4-4x^3) + (3x^4-12x^3+6xx+4x)yy + (3xx-6x-3)y^4 + 3y^6 = a$.

si $m=1, n=5 \dots (4x^5-5x^4) + (10x^2)yy - (4x+1)y^4 = 0$.

si $m=2, n=5 \dots (3x^6-8x^5+5x^4) + (5x^4-10xx)yy + (xx+8x+1)y^4 - y^6 = a$.

si $m=3, n=5 \dots (2x^7-9x^6+12x^5-5x^4) + (6x^5-15x^4+10x^2)yy + (6x^3-3xx-12x+1)y^4 + (2x+3)y^6 = a$.

si $m=4, n=5 \dots (x^8-8x^7+18x^6-16x^5+5x^3) + (4x^6-24x^5+30x^4+20x^2-40x)yy - (4x^4+24x^3-6xx-16x-1)y^4 + (4xx-8x-6)y^6 = 0$.

On peut aussi, & cela est souvent plus court & plus simple, substituer dans ces équations au lieu de yy la valeur $xx + \frac{2}{n-m} x - \frac{n}{n-m}$,

ce qui donnera une équation en x , d'où l'on tirera la valeur de cette inconnue, qui fera ensuite connoître y . Ainsi quand $m = 1$ & $n = 2$, ou $x = 1$, & $y = 1$, ce qui est le cas de la Lunule d'*Hippocrate*; quand $m = 1$ & $n = 3$, on a $xx = \frac{1}{2}$ & $yy = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2}$; quand $m = 2$ & $n = 3$, où $7xx - 15x + 6 = 0$, ou $x = \frac{15 - \sqrt{57}}{14}$,

& $y = \frac{\sqrt{390 - 54\sqrt{57}}}{14}$. Ainsi ces deux Cas, qui sembloient

dependre de la trisection de l'angle, donnent pourtant géométriquement des Lunules quarrables. Je ne dis rien des Quadratures partielles de ces Lunules. Cela me meneroit trop loin.

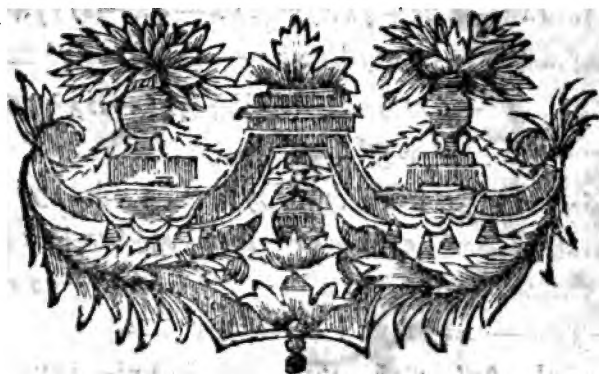


TABLE.

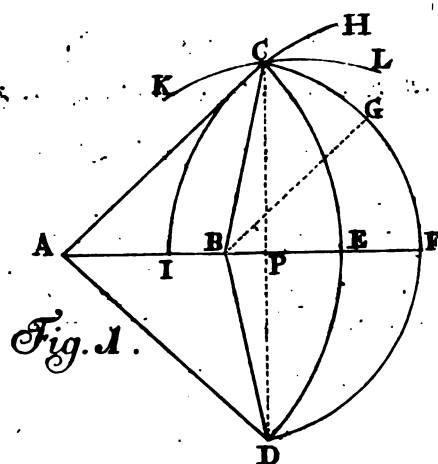


Fig. 1.

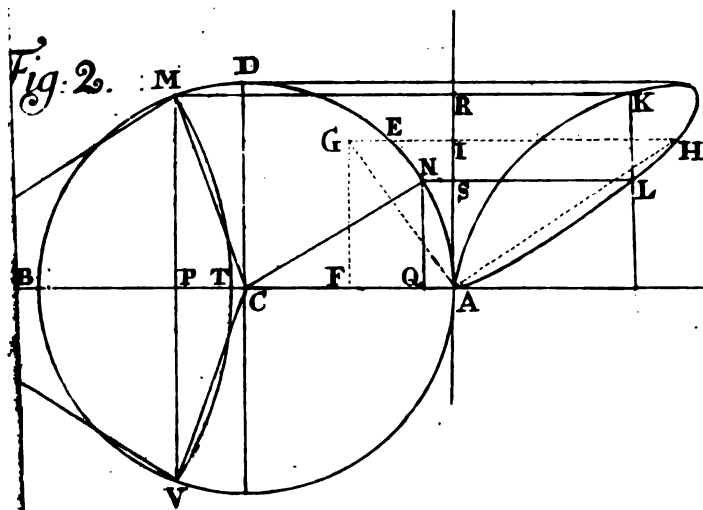
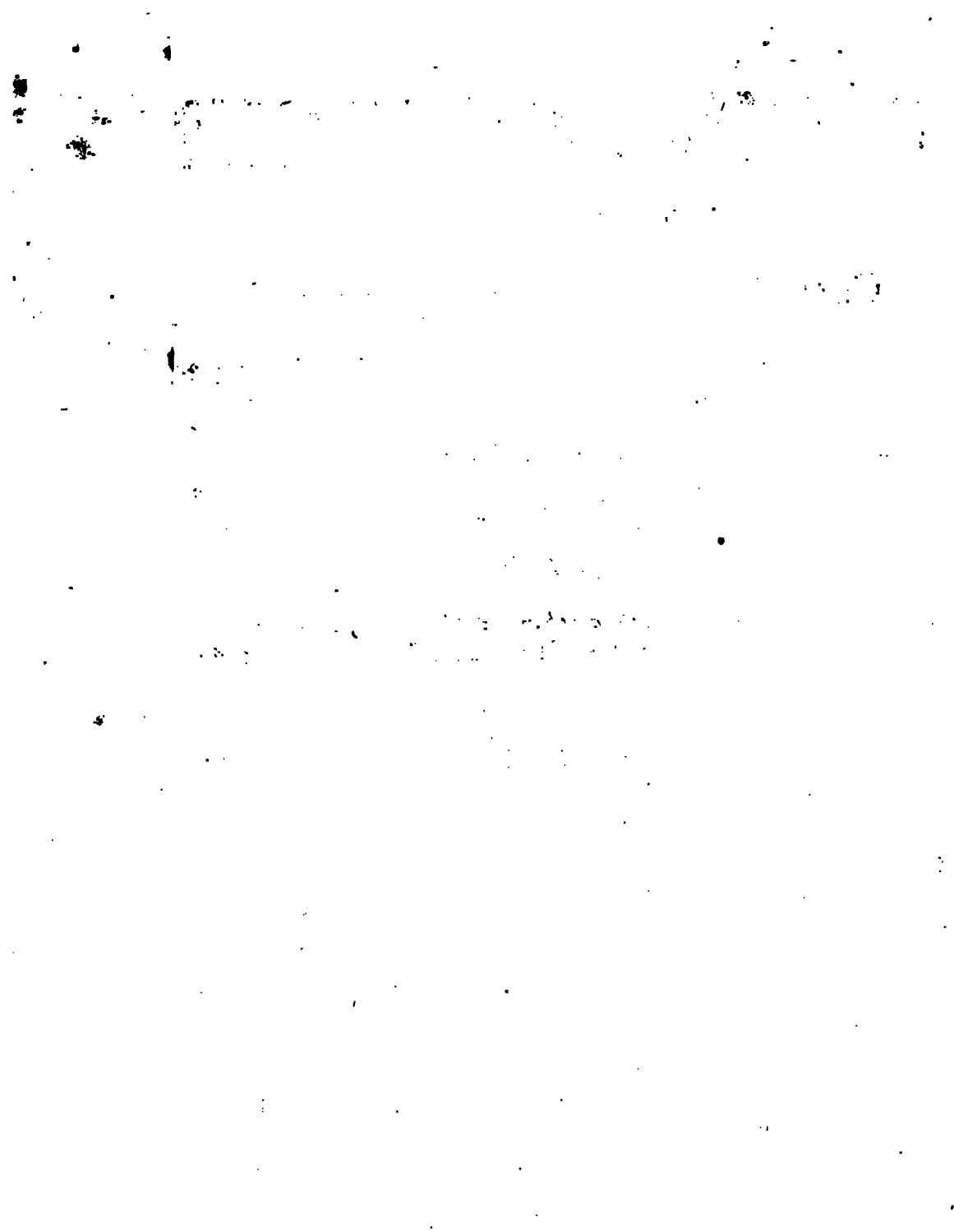


Fig: 2.





T A B L E.

CLASSE de Philosophie Experimentale.

<i>Essai sur la formation des Corps en général, par M. ELLER.</i>	pag. 3.
<i>Recherches sur la nature & les propriétés du Fiel de Verre, par M. POTT.</i>	p. 16.
<i>Sur les moyens propres à découvrir la construction des viscères, par M. LIEBERKUHN.</i>	p. 28.
<i>Observations sur la véritable Osteocolle de la Marche de Brandebourg, par M. GLEDITSCH.</i>	p. 32.
<i>Experiences Chymiques, faites sur l'Osteocolle de la Marche, par M. MARGGRAF.</i>	p. 52.
<i>Conjecture sur l'usage des Corps diaphanes de Michellius, dans les Champignons à lame, par M. GLEDITSCH.</i>	p. 60.

CLASSE de Mathématique.

<i>Sur la vibration des Cordes, par M. EULER.</i>	p. 69.
<i>Sur l'accord des deux dernières Éclipses du Soleil & de la Lune avec mes Tables, pour trouver les vrais momens des Plénis-Lunes & Nœvi-Lunes, par M. EULER.</i>	p. 86.
<i>Observation de l'Éclipse Annulaire du Soleil le 25. Juillet 1748. selon le nouveau stile, à Berlin, par M. KIES.</i>	p. 99.
<i>Sur l'Atmosphère de la Lune, prouvée par la dernière Éclipse du Soleil, par M. EULER.</i>	p. 103.
<i>Sur le frottement des Corps solides, par M. EULER.</i>	p. 122.
<i>Sur la diminution de la résistance du frottement, par M. EULER.</i>	p. 133.
<i>Recherches sur les plus grands & plus petits qui se trouvent dans les actions des forces, par M. EULER.</i>	p. 149.
REF 2	Réflé-